



# **Résolution du contact frottant déformable-déformable par lagrangien augmenté et GCR préconditionné**

**Thèse**

**Patrick Lacasse**

**Doctorat en mathématiques**  
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© Patrick Lacasse, 2014



# Résumé

Ce document traite le problème de l'élasticité en grandes déformations avec contact frottant. Dans le premier chapitre, nous présentons un rappel des lois auxquelles nous ferons référence : lois de comportement matériau, conditions aux limites, contact et frottement selon la loi de Coulomb.

Le cœur de la thèse commence par la discrétisation des conditions de bord. L'imposition *en moyenne* de la non-pénétration et de la loi de Coulomb est explicitée dans le but de se ramener en dimension finie. C'est dans ce domaine que les algorithmes sont développés. Les conditions d'optimalité sont donc calculées pour le problème déjà discrétisé et sont linéarisées par la suite selon le paradigme des *contraintes actives*.

Suivant cette stratégie, l'état de contact est fixé à chaque itération de la méthode de Newton, transformant les conditions de contact en contraintes d'égalité. Le système de conditions d'optimalité ainsi obtenu peut alors être linéarisé. La résolution de ce nouveau système linéaire constitue l'autre partie importante de cette thèse. Les méthodes de pénalisation et d'Uzawa sont d'abord exposées ; elles serviront de point de comparaison. Nous construisons par la suite un algorithme basé sur un GCR préconditionné par une factorisation faisant apparaître un complément de Schur. Le tout est présenté d'abord dans le cas plus simple du contact sans frottement, puis en ajoutant le frottement.

Des résultats numériques, parfois académiques (des cubes) et parfois industriels (des lamelles de pneus), viennent finalement appuyer les convictions que non seulement ces méthodes sont rapides, mais qu'elles sont aussi robustes.



# Abstract

This thesis addresses the problem of large deformation elasticity with frictional contact. In the first chapter, we recall the laws to which we refer: material behavior laws, boundary conditions, contact and friction according to Coulomb's law.

The heart of the thesis begins with the discretization of boundary conditions. Mortar formulations for non-penetration and Coulomb's law are explained in order to set the problem in a finite dimensional space. Optimality conditions are calculated for the discretized problem and are subsequently linearized according to the paradigm of active set strategy.

Under this approach, the contact state is set at each iteration of Newton's method, transforming the contact conditions in equality constraints. The system of optimality conditions thus obtained can then be linearized. The resolution of this new linear system is another important part of this thesis. Methods of penalization and Uzawa are first exposed; they serve as a comparison point. Thereafter, we introduce a preconditioned GCR algorithm based on a factorization using a Schur complement. The whole problem is presented first in the simplest case of contact without friction, and, in the last chapter, with friction.

Numerical results, sometimes academic (cubes) and sometimes industrial (slides tires) finally support the belief that not only these methods are efficient, but they are also robust.



# Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Remerciements	xiii
Introduction	1
<b>1 Énoncé du problème</b>	<b>5</b>
1.1 Lois de comportement . . . . .	6
1.2 Conditions aux limites . . . . .	9
1.3 Non-pénétration, non-dégénérescence et non-renversement . . . . .	11
1.4 Loi de frottement de Coulomb . . . . .	14
1.5 Problème quasi-statique . . . . .	16
1.6 Loi d'équilibre . . . . .	16
1.7 Résumé et transformation du problème . . . . .	16
1.8 Équivalence des formulations . . . . .	18
1.9 Discrétisation . . . . .	19
<b>2 Problème glissant sans frottement</b>	<b>39</b>
2.1 Pénalisation . . . . .	40
2.2 Lagrangien augmenté . . . . .	43
2.3 Résidu conjugué généralisé . . . . .	52
2.4 Méthodes itératives pour le problème mixte sans frottement . . . . .	56
2.5 Résultats numériques en élasticité linéaire . . . . .	58
2.6 Résultats numériques en élasticité non linéaire . . . . .	63
<b>3 Problème de contact frottant</b>	<b>71</b>
3.1 Stratégie de contraintes actives . . . . .	72
3.2 Linéarisation . . . . .	73
3.3 Solveur itératif . . . . .	76
3.4 Lagrangien à trois champs pour le frottement . . . . .	76
3.5 Lagrangien non augmenté avec glissement régularisé . . . . .	82

3.6	Mise à l'échelle de la correction angulaire . . . . .	84
3.7	Réécriture de la principale méthode . . . . .	84
3.8	Résultats numériques . . . . .	87
	<b>Conclusion</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>
	<b>Index</b>	<b>113</b>



# Liste des tableaux

2.1	Temps de calcul, cube glissant en élasticité linéaire à 3072 tétraèdres . . . . .	62
2.2	Temps de calcul, cube glissant en élasticité linéaire à 24 576 tétraèdres . . . . .	62
2.3	Temps de calcul, cube glissant en élasticité linéaire à 196 608 tétraèdres . . . . .	63
2.4	Temps de calcul, cube glissant en Mooney-Rivlin à 24 576 tétraèdres . . . . .	64
2.5	Temps de calcul, cube glissant en Mooney-Rivlin à 196 608 tétraèdres . . . . .	64
2.6	Temps de calcul, cube glissant en Mooney-Rivlin avec $\kappa = 10\,000$ . . . . .	65
2.7	Temps de calcul, lamelles glissantes en Mooney-Rivlin à 9 714 tétraèdres . . . . .	66
2.8	Temps de calcul, lamelles glissantes en Mooney-Rivlin à 77 712 tétraèdres . . . . .	68
2.9	Temps de calcul, lamelles glissantes en Mooney-Rivlin à 621 696 tétraèdres . . . . .	68
3.1	Temps de calcul, cube frottant en Mooney-Rivlin à 3 072 tétraèdres . . . . .	89
3.2	Temps de calcul, cube frottant en Mooney-Rivlin à 24 576 tétraèdres . . . . .	89
3.3	Temps de calcul, cube frottant en Mooney-Rivlin à 196 608 tétraèdres . . . . .	90
3.4	Temps de calcul, lamelles frottantes en Mooney-Rivlin . . . . .	90



# Liste des figures

1.1	Déformation d'un solide . . . . .	5
1.2	Solide en contact avec lui-même (auto-contact) . . . . .	12
1.3	Illustration de l'écart au bord dans différentes situations . . . . .	13
1.4	Mauvaise détermination de contact par le <i>gap</i> intégré avec un multiplicateur quadratique . . . . .	23
1.5	Élément en porte-à-faux . . . . .	27
1.6	Glissement ponctuel . . . . .	30
1.7	Dérivée du glissement tangentiel . . . . .	34
1.8	$\hat{g}_{ti}$ non aligné sur $\vec{\lambda}_{ti}$ . . . . .	38
2.1	Un cube déformable de loi Mooney-Rivlin indenté par une sphère rigide . . . . .	61
2.2	Multiplicateurs aux coins . . . . .	66
2.3	Lamelles de 621696 tétraèdres en contact glissant, vue extérieure . . . . .	67
2.4	Forces surfaciques sur les lamelles de 621 696 tétraèdres en contact glissant . . . . .	67
2.5	Graphique de résidu du GCR . . . . .	69
3.1	Correction angulaire de $\vec{\lambda}_t$ sur la partie glissante-frottante . . . . .	74
3.2	Frottement et glissement tangentiels à la surface de la sphère . . . . .	88
3.3	Frottement et glissement tangentiels à la surface du bloc lamellé . . . . .	91
3.4	Lamelles en contact frottant compressées . . . . .	94
3.5	Lamelles en contact frottant cisailées . . . . .	95
3.6	Graphique de convergence des itérations de Newton . . . . .	96
3.7	Oscillation de l'état de contact d'un point d'intégration . . . . .	97
3.8	Non pénétration en moyenne des lamelles glissantes. . . . .	98
3.9	Mauvaise projection de points d'intégration . . . . .	98
3.10	Oscillation du multiplicateur lorsqu'il a des inconnues au même sommet sur deux faces . . . . .	99
3.11	Instabilité du déplacement de type Couzeix-Raviart au bord d'attaque . . . . .	99
3.12	Graphique de convergence des itérations de Newton . . . . .	100



# Remerciements

Tout au long de l'élaboration de cette thèse, j'ai profité du soutien et des apports de nombreuses personnes que je tiens à remercier : ma conjointe Julie et nos enfants Arthur et Alice pour leur adorable existence, mes directeurs André, qui m'a repris après mon errance loin des mathématiques, et Michel, revendeur d'idées et d'algorithmes sans qui rien de cela ne serait pareil, le professeur Yves Renard, pour avoir l'amabilité d'examiner cette thèse, les professionnels de recherche du GIREF (en ordre alphabétique) Cristian, Éric et Jean (maintenant professeur) qui à eux trois connaissent tous les rouages du gigantesque MEF++, l'équipe de chez Michelin, particulièrement Patrice et Amine, des professeurs, José, Robert, et mes collègues doctorants, Sophie, Benoît, Ibrihima et Thomas pour nos nombreuses discussions numériques.



# Introduction

Le problème considéré ici est de déterminer le déplacement d'un corps élastique soumis à des forces et pouvant entrer en contact avec lui-même ou un autre corps, ce qui génère du frottement. Que l'on pense simplement à un accident d'automobile, à la déformation d'un pneu sous le poids d'une voiture ou même au battement d'un cœur, les applications de ce problème ne manquent pas. De plus en plus, la modélisation numérique est incorporée au processus de compréhension et de création bien avant l'étape de prototypage matériel. Il devient donc primordial de développer des méthodes fournissant rapidement les résultats permettant de valider ou d'invalider une nouvelle conception, et ce pour des modèles dont la taille et la complexité ne cessent de croître.

La théorie de l'élasticité remonte aux siècles précédents alors que [Hertz \(1882\)](#), [Korn \(1907\)](#) et [Volterra \(1907\)](#) publiaient les premiers résultats sur le sujet. Peu après, [Signorini \(1933\)](#) donnait son nom au problème d'un corps déformable entrant en contact glissant (sans frottement) avec un corps rigide. Vers la fin du vingtième siècle, l'informatique et les méthodes numériques de résolution du contact gagnent en maturité. Bénéficiant de leur simplicité, les méthodes de pénalisation telles que celle de [Kikuchi et Song \(1981\)](#) prennent les devants. Lorsqu'on pénalise le problème de contact, plutôt que d'imposer strictement la contrainte, on associe un coût à l'interpénétration des corps en contact. On se retrouve ainsi à résoudre un problème non contraint.

Pour ce qui est de la modélisation du frottement, la loi de [Coulomb \(1821\)](#) est peut-être la plus étudiée. Celle-ci stipule que le frottement cause une force proportionnelle à la pression de contact et dans la direction opposée au glissement, mais que pour glisser il faut d'abord avoir une force tangentielle suffisante. Selon cette loi, la surface se décompose donc en deux parties : la partie glissante et la partie adhérente. Popularisé par les articles de [Alart et Curnier \(1991\)](#), puis de [Laursen et Oancea \(1994\)](#) et [Wriggers \(1995\)](#), le lagrangien augmenté s'est imposé comme méthode de prédilection pour les problèmes de contact avec frottement. Au prix d'un plus grand nombre d'itérations, cette technique permet d'améliorer la robustesse et la précision qui peuvent faire défaut aux méthodes de pénalisation simple.

Suivant les lois de Moore, la puissance des ordinateurs a constamment repoussé la taille des calculs réalisables. Du même souffle, la complexité des algorithmes en fonction de la taille du

maillage est devenue le point limitant la croissance. Le coût de calcul de la factorisation  $LU$  d'une matrice, aussi peu dense soit-elle, devient rapidement prohibitif. Or, en modifiant la matrice de rigidité par un terme de pénalisation, le lagrangien augmenté détériore grandement son conditionnement, rendant inefficaces les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Au début du vingt-et-unième siècle, des préconditionneurs se développent pour profiter des nouvelles ressources disponibles. Basé sur une approche géométrique, le préconditionneur multigrille, exploité récemment par Hübner *et al.* (2008), propose d'utiliser une solution calculée sur un maillage plus grossier comme approximation de la solution sur un maillage plus fin. Dans le cas particulier où on approxime par des polynômes de degré deux (ou plus), le préconditionneur hiérarchique propose plutôt de résoudre d'abord avec des polynômes linéaires. En profitant d'une base hiérarchique de polynômes, le résultat  $P_1$  obtenu s'interpole sans le moindre calcul sur la base  $P_2$ . Cette approche est utilisée avec succès en élasticité incompressible par El maliki *et al.* (2010), puis pour des problèmes de contact sans frottement dans l'article de El maliki *et al.* (2013).

Plusieurs recherches portent actuellement sur l'amélioration de ces différents préconditionneurs et leur intégration dans la résolution non linéaire du problème de contact frottant. Un autre axe de recherche concerne plutôt la discrétisation du problème. On propose notamment différentes interpolations pour les fonctions de bord, telles que les NURBS (Temizer *et al.* (2012)) ou les bases duales (Wohlmuth (2000)). Dans cette thèse, nous aborderons ces deux aspects du problème : d'abord la discrétisation et ensuite sa résolution.

Indépendamment du choix des fonctions de base, les discrétisations les plus courantes du frottement reposent sur des coordonnées curvilignes convectées. Comme la géométrie différentielle nécessaire à leur usage est assez délicate, on se réfère souvent à la monographie de Laursen (2002) pour ces calculs. Les coordonnées curvilignes permettent de séparer, en chaque point de la surface, les composantes normales et tangentielles des vecteurs tridimensionnels représentant les forces ou les déplacements. Lorsque le solide se déforme, ces coordonnées se déplacent avec lui. Les multiplicateurs calculés se comparent alors à des pressions suiveuses. Dans cette thèse, nous avons préféré nous contenter de la base euclidienne, ce qui fait que nos multiplicateurs représentent plutôt des conditions aux limites de Neumann. Ce choix aura pour première conséquence de grandement simplifier nos notations. Cela nous permettra aussi de réécrire les contraintes normales (non-pénétration) et tangentielles (frottement) en une seule équation couplée.

Pour ce qui est des fonctions de base de la discrétisation, nous avons conservé les fonctions d'interpolation de Lagrange. Nous porterons beaucoup d'attention sur la façon dont nous imposons faiblement nos contraintes ; celle de non-pénétration et celle de la loi de Coulomb.

Une fois le problème bien discrétisé, nous nous intéresserons à accélérer la résolution de nos



équations non linéaires. Comme nos contraintes sont de type inégalité, nous appliquerons d'abord la stratégie des contraintes actives afin de les transformer en une suite de contraintes de type égalité. À chaque itération, pour un état de contact fixé, nous aurons à résoudre un système d'équations linéarisées. Nous définissons par la suite des préconditionneurs adaptés qui nous permettront de résoudre ces systèmes pour des maillages très fins.

Une particularité de notre approche est de ne pas employer de lagrangien augmenté afin de ne pas détériorer le conditionnement du système primal. Nous verrons en fait que si nous nous restreignons à la surface glissante, il est possible d'utiliser un lagrangien augmenté seulement sur la partie tangentielle sans affecter le système primal. Comme l'alignement du multiplicateur sur le glissement est la principale difficulté de la loi de Coulomb, nous verrons que notre approche permet de stabiliser la méthode de Newton pour ainsi obtenir une convergence satisfaisante même pour un maillage irrégulier et des lois de matériaux quasi-incompressibles.



# Chapitre 1

## Énoncé du problème

On considère  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , pas nécessairement connexe, qui sera appelé la configuration non déformée. Le cas du contact entre plusieurs corps correspond au choix de  $\Omega$  non connexe, chacune de ses composantes connexes représentant un corps différent.

Sur  $\bar{\Omega}$ , on cherche à définir un champ de déplacement  $\vec{u}$  satisfaisant à la fois des lois de comportement, des lois de conservation, des conditions aux limites, des conditions de non-pénétration, non-dégénérescence et non-renversement ainsi qu'une loi de frottement. Nous notons  $\omega$  l'image de  $\Omega$  déplacé par  $\vec{u}$  (voir figure 1.1).

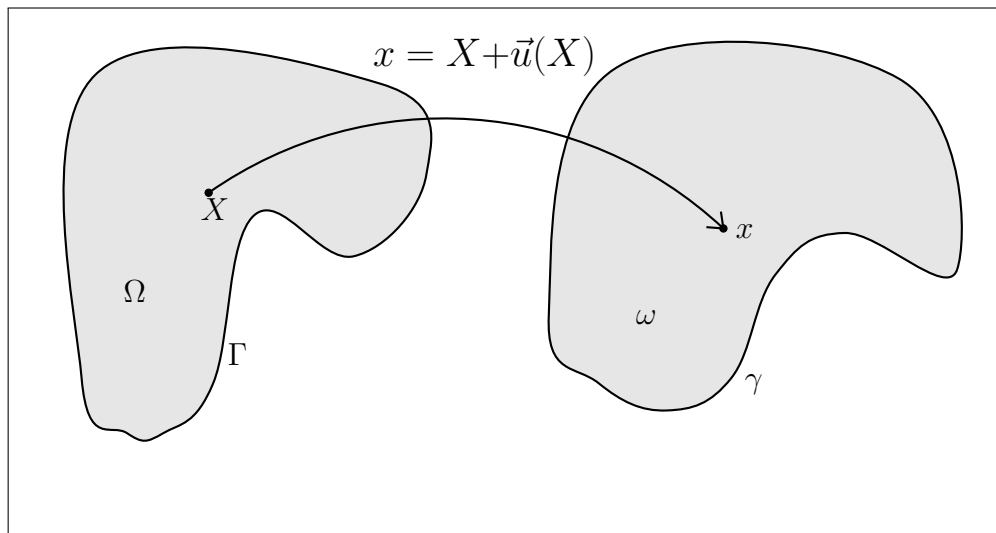


FIGURE 1.1: Déformation d'un solide

## 1.1 Lois de comportement

Les techniques présentées dans cette thèse sont spécifiques aux matériaux hyperélastiques. Plus de détails sur ces lois peuvent être trouvés dans les ouvrages de Vallée (1978) et Wriggers (2006) pour ne nommer que ceux-là.

Les tenseurs de la mécanique des milieux continus s'expriment sous différentes notations selon les auteurs. Pour lever les ambiguïtés, nous avons rassemblé ici les principaux tenseurs intervenant dans nos lois et calculs en donnant des références pour leur définition.  $\vec{u} \in V = (H^1(\bar{\Omega}))^3$  représente un déplacement. On considère  $x$  comme une fonction définie sur le domaine  $\Omega$  (et sur son bord  $\Gamma$ ) telle que  $x(X) = X + \vec{u}(X)$  et nous appelons cette fonction la déformation.  $X$  est aussi considérée comme la fonction inverse de  $x$ , définie sur le domaine  $\omega$  (et sur son bord  $\gamma$ ). Pour  $\vec{u}$  cinématiquement admissible,  $x$  est une bijection de  $\Omega$  sur  $\omega$ . Il s'agit aussi d'une bijection de  $\Gamma$  sur  $\gamma$ .

### 1.1.1 Tenseur gradient de la déformation

Supposons que la fonction  $x = X + \vec{u}(X)$  définie sur  $\Omega$  soit différentiable, notons  $\mathbf{F}$  le gradient de la déformation associée au déplacement  $\vec{u}$  qui se calcule ainsi :

$$\mathbf{F} = \nabla_X x = \mathbf{I} + \nabla_X \vec{u}$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice (tenseur) identité. Nous notons  $J$  le jacobien :

$$J = \det \mathbf{F}$$

Ici la notation  $\nabla_X x$  signifie simplement qu'on a dérivé  $x$  sur son domaine de définition  $\Omega$ . Comme l'image de  $\vec{u}$  est dans  $\omega$ , on pourrait aussi vouloir la dériver par rapport à  $x$  sur son image, auquel cas on noterait  $\nabla_x \vec{u}$ .

### 1.1.2 Tenseur de Cauchy-Green

Le tenseur des déformations de Cauchy-Green est noté  $\mathbf{C}$ . Il est appelé en anglais le *strain tensor* (Ciarlet (1988) page 89) et en français le tenseur des dilatations par Duvaut (1998). Il se définit par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} .$$

Nous aurons besoin des invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , de ce tenseur.

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}_{kk} = \mathbf{C} : \mathbf{I} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left( I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) \right) = \frac{1}{2} \left( I_1^2 - (\mathbf{C}^\top : \mathbf{C}) \right) \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = \det (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) = J^2 \end{aligned}$$

### 1.1.3 Tenseur de Green-Lagrange ou de Green-Saint-Venant

Le tenseur des déformations, noté  $\mathbf{E}$ , est parfois appelé tenseur de Green-Saint-Venant et parfois tenseur de Green-Lagrange. Il se définit par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1}{2}\left((\mathbf{I} + \nabla_X \vec{u})^\top \cdot (\mathbf{I} + \nabla_X \vec{u}) - \mathbf{I}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\nabla_X \vec{u} + \nabla_X^\top \vec{u} + \nabla_X^\top \vec{u} \cdot \nabla_X \vec{u}\right) \\
 &= \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\nabla_X^\top \vec{u} \cdot \nabla_X \vec{u}
 \end{aligned}$$

où le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur des petites déformations (la partie linéaire du tenseur des déformations) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X \vec{u} + \nabla_X^\top \vec{u}\right)$$

### 1.1.4 Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes de Cauchy (1827), noté  $\boldsymbol{\sigma}$ , est défini sur  $\omega$ . Il s'agit en fait d'un champ de tenseur qui à chaque point de  $\omega$  associe pour chaque vecteur de  $\mathbb{R}^3$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Ce tenseur tient compte de la force élastique causée par la déformation du matériau. À l'intérieur du volume, cette force doit s'équilibrer avec le terme source, ce qui donne la formule dite classique  $-\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \vec{r}$ . Ce terme source est composé de la densité du solide  $\rho$  et d'une force volumique  $\vec{r}$ , par exemple la gravité.

Dans les sections qui suivent, particulièrement aux sections 1.1.5 et 1.1.6, nous donnerons les formules permettant de calculer explicitement ce tenseur. On remarque la dépendance de  $\boldsymbol{\sigma}$  envers  $\vec{u}$  autant pour ses valeurs que pour son domaine de définition. L'existence de ce tenseur et sa symétrie découlent des lois de la thermodynamique (Duvaut (1998) théorème II.5, Germain (1973)).

### 1.1.5 Tenseurs de Piola-Kirchhoff

Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, noté  $\mathbf{\Pi}$ , est obtenu du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  par la transformation de Piola. On le calcule ainsi (Ciarlet 1988) page 71 :

$$\mathbf{\Pi} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

où  $\mathbf{S}$  est le second tenseur de Piola-Kirchhoff qui se définit selon la nature du matériau. Ce second tenseur est purement lagrangien, c'est-à-dire qu'il est défini (ainsi que son image) sur le domaine non déformé. Il est relié au tenseur de Cauchy par la formule suivante :

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

ce qui en fait un tenseur symétrique. Ce tenseur  $\mathbf{S}$  est simplement le tirant arrière (en anglais *pull back*) du tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 1.1.6 Matériau hyperélastique

Dans le modèle hyperélastique, on suppose l'existence d'une fonction  $\Psi$  représentant un potentiel d'énergie élastique dont la valeur en un point ne dépend pas du déplacement  $\vec{u}$  dans son ensemble mais seulement du déplacement et de ses dérivées premières en ce point précis. Il est possible de définir ce potentiel en fonction de chacun des tenseurs  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{C}$ . Ciarlet (1988), à son chapitre 4, préfère employer différentes notations pour les différentes fonctions définissant le potentiel selon chacun des tenseurs. Nous nous en abstenons.

À partir de ce potentiel, on pose la loi de comportement du matériau telle que le second tenseur de Piola-Kirchoff satisfasse :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} .$$

Cette dérivée partielle est en fait la dérivée partielle au sens de Fréchet. Explicitement, possédant suffisamment de régularité, cela équivaut à la dérivée de  $\Psi$  par rapport à chacune des composantes de  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} .$$

Par la suite, nous aurons besoin d'une formule explicite pour le tenseur  $\mathbf{S}$  qui apparaîtra dans nos termes de formulation. Dans nos tests numériques, nous utilisons deux lois de comportement différentes : l'élasticité linéaire et le modèle de Mooney-Rivlin quasi incompressible.

### 1.1.7 Élasticité linéaire

En élasticité linéaire, on émet l'hypothèse que la déformation est très petite et que  $\Omega = \omega$ . Ce modèle se paramétrise par les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  qui se définissent eux-mêmes par le module d'élasticité (module d'Young)  $E$  (à ne pas confondre avec notre tenseur des déformations de Green-Saint-Venant,  $\mathbf{E}$ ) et le coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} .$$

On définit alors  $\mathbf{S}$  à partir du tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  par la formule :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr}(\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} .$$

### 1.1.8 Modèle de Mooney-Rivlin quasi incompressible

Bonet et Wood (1997) au chapitre 5.5 traite de matériaux incompressibles et quasi incompressibles. On y retrouve notamment à l'exemple 5.5 le modèle hyperélastique de Mooney-Rivlin quasi incompressible et à la section 5.5.3 un terme de pénalité sur l'incompressibilité. Le potentiel élastique s'obtient alors par :

$$\Psi(\mathbf{C}) = \mu_{10}(\hat{I}_1 - 3) + \mu_{01}(\hat{I}_2 - 3) + \frac{1}{2}\kappa(J - 1)^2 .$$

Dans cette formule,  $\mu_{10}$  et  $\mu_{01}$  sont des paramètres du matériau. Pour leur part,  $\hat{I}_1$  et  $\hat{I}_2$  sont les deux premiers invariants de la partie distortionnelle du tenseur de Cauchy-Green, elle-même noté  $\hat{\mathbf{C}}$ , et se définissent ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= I_3^{-\frac{1}{3}}\mathbf{C} \\ \hat{I}_1 &= \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}) = I_3^{-\frac{1}{3}}I_1 \\ \hat{I}_2 &= \frac{1}{2}(\hat{I}_1^2 - \text{tr}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{C}})) = I_3^{-\frac{2}{3}}I_2 . \end{aligned}$$

Le troisième invariant étant lui-même  $\hat{I}_3 = \det \hat{\mathbf{C}} = \det(I_3^{-\frac{1}{3}}\mathbf{C}) = I_3^{-1}\det \mathbf{C} = 1$ .

La constante  $\kappa$  est nommée en anglais « *bulk modulus* » et en français module de compressibilité (ou module de rigidité à la compression par Duvaut (1998) page 81).

À partir de ce potentiel, nous pouvons calculer  $\mathbf{S}$  en dérivant (voir Fortin et Garon (2012)) :

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2\mu_{10}\frac{\partial \hat{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2\mu_{01}\frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \mathbf{C}} + 2\kappa(J - 1)\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} .$$

### 1.1.9 Modèle de Mooney-Rivlin quasi incompressible en formulation mixte

Il est d'usage de résoudre les problèmes quasi incompressibles en ajoutant une inconnue, la pression  $p$ . On la pose égale à  $-\kappa(J - 1)$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \\ &= 2\mu_{10}\frac{\partial \hat{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2\mu_{01}\frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \mathbf{C}} - 2p\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned}$$

et en développant

$$\mathbf{S} = 2\mu_{10}I_3^{-\frac{1}{3}}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{C}^{-1}\right) + 2\mu_{01}\left(I_1\mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3}I_2\mathbf{C}^{-1}\right) - 2pJ\mathbf{C}^{-1} .$$

## 1.2 Conditions aux limites

Le bord du domaine peut être subdivisé en plusieurs sections,  $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_P = \Gamma$ , où s'appliquent des conditions aux limites différentes. La partie du bord en contact est, quant à elle, traitée à part. En effet, on ne connaît pas cette zone avant d'avoir résolu le problème.

### 1.2.1 Dirichlet

On note  $\Gamma_D$  la partie de  $\Gamma$  où une condition de Dirichlet est imposée, c'est-à-dire que le déplacement  $\vec{u}$  est imposé sur  $\Gamma_D$ . Sans condition de contact, il est nécessaire que la mesure de  $\Gamma_D$  soit strictement positive. La conséquence de la nullité de  $\Gamma_D$  est la perte d'unicité de la solution, qui devient parfois unique à un déplacement rigide près. En ajoutant la condition de contact définie plus bas, on retrouve parfois l'unicité de la solution malgré l'absence de condition de Dirichlet. Dans d'autres situations, Hild (2006), la condition de contact va plutôt nous faire perdre l'unicité de la solution.

### 1.2.2 Neumann

On note  $\Gamma_N$  la partie de  $\Gamma$  où une condition de Neumann est imposée, ce qui signifie qu'une force extérieure, notée  $\vec{t}_0$ , est appliquée sur la surface. L'équation classique de la condition de Neumann s'écrit dans le domaine non déformé :

$$(\mathbf{\Pi}\vec{N})|_{\Gamma_N} = \vec{t}_0 \quad .$$

Il faut se demander ce qui survient lorsque, après déformation, le contact survient sur une portion de cette surface. On a essentiellement le choix entre continuer d'appliquer la force  $\vec{t}_0$  ou cesser, le bon choix dépendant de ce que représente la condition de Neumann.

Cette condition aux limites s'applique habituellement au problème en petites déformations, pour lequel on ne fait pas de distinction entre  $\omega$  et  $\Omega$ . En grandes déformations, il est difficile d'imaginer à quelle situation réelle correspond une condition de Neumann. Des problèmes avec conditions de Neumann apparaîtront aussi comme intermédiaire dans la résolution de problèmes plus complexes. Par exemple on pourrait remplacer une pression suiveuse (section 1.2.3) par une boucle de point fixe sur la condition de Neumann, ce qui revient grossièrement à négliger la dérivée de la normale dans la méthode de Newton. Si le champ  $\vec{t}_0$  est nul (ou négligeable), la condition de Neumann est alors équivalente à la condition de pression suiveuse.

### 1.2.3 Pression suiveuse

On note  $\Gamma_P$  la partie de  $\Gamma$  où une condition de pression suiveuse est imposée. Une force de pression notée  $P$  est définie partout dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , typiquement constante mais pas nécessairement. On peut penser à cette condition comme une pression d'air. Lorsqu'on gonfle un ballon, ou un pneu, celui-ci se déforme. Si on maintient la pression à une valeur constante, l'intensité de la force par unité de surface ne dépend pas de la déformation, mais la direction de cette force en dépend. Si la pression suiveuse représente une pression d'air, il est normal de cesser d'appliquer cette pression sur la partie du bord qui est en contact. On exprime cette condition par :

$$\boldsymbol{\sigma}\vec{n} = P\vec{n}$$



et on réfère à Ciarlet (1988) page 79 et exercice 2.8 ou aux notes du cours d'éléments finis de Fortin et Garon (2012).

### 1.2.4 Contact

Nous nous intéressons au cas très général où le contact peut survenir partout, y compris sur  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_N$ . La zone de contact peut s'agrandir ou diminuer et on ne le sait pas à l'avance. Nous nommons  $\gamma_C$  la partie du bord déformé  $\gamma$  sur laquelle le contact a effectivement lieu. Comme nos termes de formulation seront définis sur le domaine non déformé, nous définissons aussi  $\Gamma_C$  la préimage de  $\gamma_C$ .

Sur la zone de contact, la condition de non-pénétration s'applique (section 1.3), ainsi que la condition de frottement expliquée à la section 1.4.

## 1.3 Non-pénétration, non-dégénérescence et non-renversement

On souhaite un déplacement tel que deux points du domaine  $\Omega$  ne soient pas déplacés vers le même endroit, c'est-à-dire que la fonction  $x(X) = X + \vec{u}(X)$  soit injective. On souhaite aussi que notre déplacement ne soit pas dégénéré et qu'il ne renverse pas notre domaine. Par exemple, une réflexion par un axe de symétrie n'est pas un déplacement cinématiquement admissible. Mathématiquement, ces deux dernières conditions se résument en une seule : que le déterminant du gradient du déplacement soit strictement positif en chaque point. La positivité du gradient à elle seule n'est pas suffisante pour assurer l'injectivité de la déformation. Il est nécessaire d'imposer cette condition séparément, mais il est suffisant pour cela de travailler sur le bord du domaine (cela découle d'un théorème qu'on retrouve dans le livre de de la Vallée Poussin (1926) à la page 355). Comme nous nous intéressons à l'auto-contact, il est possible que deux points du bord du domaine soient déplacés sur la même image (tel qu'illustré à la figure 1.2).

On dit qu'un point  $x_1 \in \gamma$  est interpénétré s'il existe un point de l'intérieur du domaine  $X_2 \in \Omega$  déplacé vers ce point du bord  $x_1 = X_2 + \vec{u}(X_2)$ . Si au contraire  $x_1 \notin x(\Omega)$ , alors  $x_1$  n'est pas interpénétré. De plus, s'il existe un autre point de  $\Gamma$  ayant la même image  $x_1$ , alors  $x_1$  est un point de contact.

### 1.3.1 Fonction d'écart

Nous introduisons une fonction d'écart, ou de distance, en anglais *gap*, notée  $g_n$  et définie sur  $\gamma$ . Dans cette notation, l'indice  $n$  fait référence à la normale et on dit parfois *gap normal* par opposition au *gap tangentiel* qui sera présenté à la section 1.4. La façon de construire cette fonction n'est pas unique et un choix minutieux de celle-ci est nécessaire pour assurer une

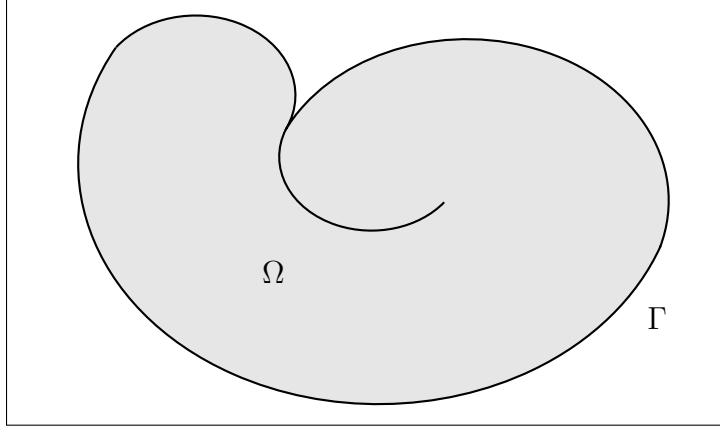


FIGURE 1.2: Solide en contact avec lui-même (auto-contact)

meilleure convergence des algorithmes. Les variantes de cette fonction d'écart ont en commun de définir la distance par le biais d'une fonction qui associe à chaque point du bord son vis-à-vis, que nous notons par la suite  $\pi$ . Cette fonction sera définie de telle sorte qu'un point  $x$  de la surface déformée soit interpénétré lorsque  $g_n(x) < 0$  et en contact lorsque  $g_n(x) = 0$ .

### Distance au bord par projection

Dans l'étude du contact entre deux corps, il est facile de définir l'écart au bord d'un corps par rapport à l'autre. Au point  $x$  appartenant au premier corps, on assigne simplement la distance qui le sépare du second corps, c'est-à-dire

$$g_n(x) = \min_{y \in \gamma_2} \|x - y\| ,$$

où  $\gamma_2$  est le bord du second corps. Cette définition est celle apparaissant dans Laursen (2002), section 4.2.1. Lorsque le contact d'un corps avec lui-même est considéré, une définition si simple est insuffisante.

Pour chaque point  $x$  du bord  $\gamma$  on définit l'ensemble  $E \subset \gamma$  des points candidats. Un point  $y \in \gamma$  tel que  $\gamma$  admette une normale  $\vec{n}(y)$  au point  $y$  est candidat lorsque le segment  $\vec{y}x$  est parallèle à la normale  $\vec{n}(y)$ . Il reste certains  $y \in \gamma$  où  $\gamma$  n'admet pas de normale. Dans ce cas, la direction du segment  $\vec{y}x$  devra être comprise dans le cône délimité par les normales à la limite de  $y$ , tel qu'illustré sur la figure 1.3 (D).

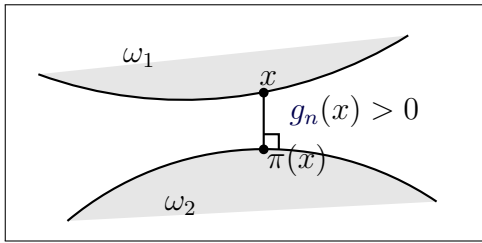
Pour  $x$  donné, son vis-à-vis  $\pi(x)$  est choisi parmi tous les points  $y$  candidats comme étant celui le plus près de  $x$ . Dans le cas où le point le plus près n'est pas unique, nous en choisissons arbitrairement un des deux. Cette situation pourrait poser des problèmes dans certains cas, particulièrement pour des géométries élaborées comme les lamelles que nous présentons aux sections 2.6 et 3.8.2. Pour définir l'écart au bord du point  $x$ , qui sera noté  $g_n(x)$ , on prend simplement la distance séparant  $x$  de  $\pi(x)$  à laquelle on accole le signe + lorsque la condition de non-pénétration est satisfaite ou le signe - sinon.

Il est possible pour certains  $x$  de ne pas avoir de vis-à-vis et il ne faudra pas oublier de gérer ce cas dans notre formulation. On s'assure cependant que notre fonction d'appariement soit définie de telle sorte que ce manquement ne soit pas possible pour les points interpénétrés.

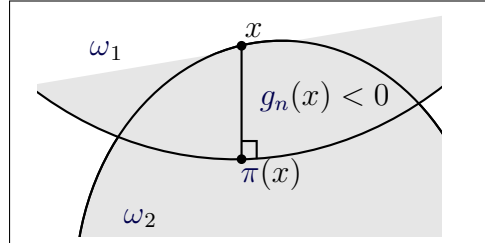
### Écart au bord par prolongement de normale

Une autre façon possible de définir  $\pi(x)$  est de prolonger la normale en  $x$  et de prendre le premier point du domaine déformé que l'on rencontre dans cette direction. Cette méthode est utilisée notamment dans l'article de Wang et Nakamachi (1997). Évidemment, il faut d'abord se définir une normale en chaque point du bord, y compris là où le bord n'est pas dérivable. Encore là, certains points n'auront pas de vis-à-vis.

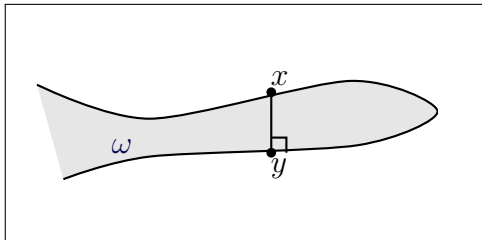
Pour le reste de cette thèse, nous n'utiliserons que la méthode par projection, qui a en particulier l'avantage de définir une distance plus facile à dériver. Un travail plus approfondi pourrait être réaliser pour comparer ces deux méthodes. L'article à paraître de Poullos et Renard (2014) s'y attaque et présente les formules nécessaires de dérivation de la distance par prolongement de normale.



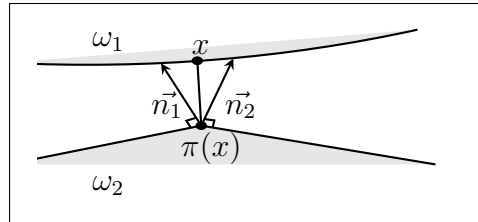
(A) Une surface s'approchant d'une autre surface.



(B) Une surface pénétrant une autre surface.



(C) Une lamelle mince. La normale partant de  $y$  n'est pas dans la même direction que le vecteur  $y\vec{x}$ . Ce  $y$  n'est pas un candidat pour être le vis-à-vis de  $x$



(D) Une surface s'approchant d'une autre surface non dérivable. Le vecteur reliant  $\pi(x)$  à  $x$  doit être compris entre les normales limites lorsqu'on s'approche de  $\pi(x)$  par la gauche ou par la droite.

FIGURE 1.3: Illustration de l'écart au bord dans différentes situations

## 1.4 Loi de frottement de Coulomb

De nombreux modèles de frottement existent et s'appliquent à différentes situations. La modélisation du frottement est discutée en détail dans Moreau (1970), Curnier (1984) et Persson (2000). Pour le cas plus spécifique des pneumatiques, on peut consulter Klüppel et Heinrich (2000). La tribologie n'étant pas le sujet de cette thèse, un seul modèle de frottement sera employé : la loi de Coulomb (1821).

En chaque point du bord  $\Gamma$  trois états sont possibles : ne pas être en contact ou être en contact, lequel peut être glissant ou adhérent. La fonction de distance  $g_n$  nous permet de distinguer les points de contact comme étant ceux où  $g_n = 0$ . Les forces surfaciques nous permettront de distinguer les points de contact glissant de ceux adhérents. Pour ce faire, il faudra séparer la force de pression appliquée sur la surface (ou plutôt la densité de force comme le précisent Duvaut et Lions (1972), section 5.1.1) en une composante normale à la surface plus une composante tangentielle,  $\vec{p} = p_N \vec{n} + \vec{p}_T$ . Pour  $\vec{u}$  le déplacement solution du problème, cette force de pression sera opposée à celle provenant du potentiel élastique. Nous aurons alors les égalités  $p_N = \sigma_n$  et  $\vec{p}_T = \vec{\sigma}_t$  de sorte que nous exprimerons la loi de Coulomb en fonction du tenseur des contraintes  $\sigma$ .

L'application du tenseur  $\sigma$  sur la normale  $\vec{n}$  à la surface  $\gamma$  donne la force par unité de surface. Cette contrainte, assimilable à une pression, est usuellement décomposée en une partie normale et une tangentielle. Nous définissons  $\sigma_n$  et  $\vec{\sigma}_t$  ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (\sigma \vec{n}) \cdot \vec{n} \\ \vec{\sigma}_t &= (\sigma \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\sigma \vec{n} = \sigma_n \vec{n} + \vec{\sigma}_t .$$

Remarquons que  $\sigma_n$  est un scalaire tandis que  $\vec{\sigma}_t$  est un vecteur. Aussi par abus de notation, sans que cela ne soit ambigu, nous avons noté  $\sigma$  la trace de  $\sigma$  au bord de  $\omega$ . Nous ferons de même en lagrangien, où  $\mathbf{\Pi}$  désignera indifféremment le champ tensoriel défini sur  $\Omega$  et sa trace sur  $\Gamma$ .

Nous choisissons de ne pas permettre de force d'adhésion entre deux surfaces, elles peuvent seulement se pousser l'une sur l'autre. Soit  $x$  un point en contact et  $\pi(x)$  le point de  $\gamma$  avec lequel il est en contact, nous imposons cette condition par l'inégalité  $\sigma_n(x) \geq 0$ .

Selon la loi de Coulomb, un paramètre de rugosité  $\mu > 0$  (coefficient de frottement) est donné sur la surface  $\Gamma$ , qui n'est pas nécessairement constant. Plus le paramètre  $\mu$  est faible, plus la surface est glissante. Si  $|\vec{\sigma}_t| < \mu \sigma_n$ , la force tangentielle n'est pas suffisante pour lutter contre le frottement, alors les deux surfaces adhèrent l'une à l'autre. Lorsque la force tangentielle

augmente assez pour que  $|\vec{\sigma}_t| = \mu\sigma_n$ , les surfaces se mettent à glisser dans la direction opposée à  $\vec{\sigma}_t$ . L'inégalité  $|\vec{\sigma}_t| > \mu\sigma_n$  n'est pas permise.

### 1.4.1 Cône de Coulomb

On appelle cône de Coulomb l'ensemble des déplacements qui satisfont l'inégalité  $|\vec{\sigma}_t| \leq \mu\sigma_n$ . Dans le cadre de l'élasticité linéaire, il s'agit effectivement d'un cône. La loi de Coulomb impose également que le glissement soit aligné sur le tenseur  $\vec{\sigma}_t$ , mais de sens opposé. Le glissement dont il est question est en fait la différence entre la vitesse d'un point et celle de son vis-à-vis. Pour qu'il y ait du frottement en un point, il faut que le contact demeure au moins sur un petit intervalle de temps, on considère donc que cette vitesse relative entre les points en contact est tangentielle à la surface.

Tel qu'expliqué dans l'article de Curnier *et al.* (1995) et dans le livre de Wriggers et Laursen (2007), la vitesse relative dont il est question ici est prise au sens de la dérivée de Lie. En effet, notant  $x_1 = X_1 + \vec{u}(X_1)$  un point du bord déformé et  $x_2 = X_2 + \vec{u}(X_2)$  son vis-à-vis, la simple différence de vitesse  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_2) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_1)$  n'a pas la propriété d'être invariante par changement de repère (en anglais *frame invariant*). On lui préfère donc la quantité  $\mathcal{L}\vec{g}_t$  définie par :

$$\mathcal{L}\vec{g}_t = \mathbf{F} \frac{\partial(\mathbf{F}^{-1}\vec{g}_t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

où  $\vec{g}_t$  est la partie tangentielle du *gap*

$$\vec{g}_t = (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n})(x_2 - x_1) . \quad (1.2)$$

On résume la loi de Coulomb par les équations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\vec{g}_t = 0 & \text{si } |\vec{\sigma}_t| < \mu\sigma_n \\ \vec{\sigma}_t = -\mu\sigma_n \frac{\mathcal{L}\vec{g}_t}{|\mathcal{L}\vec{g}_t|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.4.2 Cylindre de Tresca

Il est courant, tant dans la littérature que dans la programmation, de se doter d'une variable intermédiaire supplémentaire  $s$  qui doit satisfaire l'égalité  $s = \mu\sigma_n$ . On se place alors dans une boucle de point fixe et à  $s$  donné, on résout

$$\begin{cases} \mathcal{L}\vec{g}_t = 0 & \text{si } |\vec{\sigma}_t| < s \\ \vec{\sigma}_t = -s \frac{\mathcal{L}\vec{g}_t}{|\mathcal{L}\vec{g}_t|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4)$$

On nomme alors cylindre de Tresca l'ensemble des déplacements qui satisfont  $|\vec{\sigma}_t| \leq s$ , tandis que le champ scalaire  $s$  est appelé seuil de Tresca.

## 1.5 Problème quasi-statique

Les problèmes qui nous intéressent sont, par la nature du frottement, dynamiques. Dans le cadre de cette thèse, nous posons l'hypothèse simplificatrice, dite quasi-statique, que l'inertie est négligeable et qu'il n'y a pas d'accélération. Sous cette hypothèse, parler de vitesse n'a plus de sens. Heureusement, nous verrons à la section 1.9.6 que notre loi de Coulomb discrétisée en temps ne fait plus intervenir la vitesse, mais seulement sa direction.

Le temps n'apparaît nulle part dans les équations que nous aurons à résoudre. Les pas de temps ne font donc plus référence au temps et nous emploierons de préférence l'expression pas de chargement. En effet, nous appliquerons les conditions aux limites graduellement, augmentant petit à petit les forces (chargements) et déplaçant lentement les conditions de Dirichlet.

## 1.6 Loi d'équilibre

La dernière loi qu'il nous reste à satisfaire est celle de l'équilibre des forces. Sous l'hypothèse quasi-statique, nous recherchons une solution sans accélération. Autrement dit, en chaque élément de volume ou de surface la somme des forces doit évaluer zéro. Pour les éléments de volume, cela se traduit par :

$$-\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \vec{r} \text{ dans } \omega .$$

Ici, le champ vectoriel  $\vec{r}$  représente l'accélération gravitationnelle et  $\rho$  représente la densité de masse. Dans les applications, il arrive que le terme de droite soit négligé.

Pour la partie normale de la contrainte sur la surface de contact, elle est simplement opposée à la force de pression provenant de l'autre corps (ou du même) en contact. Dans le cas de contact déformable-rigide, l'égalité sur la contrainte normale sera considérée comme automatiquement respectée, puisqu'on suppose simplement que le corps rigide oppose une force d'intensité égale. On obtient alors :

$$\sigma_n \vec{n} = -(\sigma_n \circ \pi) \vec{n} \text{ sur } \gamma_C .$$

## 1.7 Résumé et transformation du problème

Il y a trois façons équivalentes de formuler notre problème complet. L'une en force, l'une en travail et l'autre en énergie. De plus, chacune de ces formulations peut être posée autant sur le domaine non déformé  $\Omega$  que sur le domaine déformé  $\omega$ . On les désignera alors de formulation lagrangienne ou eulérienne.

La formulation eulérienne en force est celle dite classique, elle sera le point de départ de notre sujet. La méthode des éléments finis agit, quant à elle, sur la formulation lagrangienne en travail, dite formulation variationnelle. Finalement, les algorithmes développés dans cette

thèse se basent sur la formulation lagrangienne en énergie. Le passage de l'une à l'autre de ces égalités est très laborieux dans les cas complexes que nos algorithmes traitent. Nous n'avons pas trouvé, à ce jour, de démonstration complète. Nous citons plus bas certaines démonstrations sur des cas simplifiés.

### 1.7.1 Formulation classique

Avec toutes les conditions énumérées plus haut, le déplacement solution de notre problème  $\vec{u}$ , en supposant qu'il soit assez régulier, doit satisfaire le système suivant :

$$\begin{aligned}
-\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \rho \vec{r} && \text{dans } \omega \\
\boldsymbol{\sigma} \vec{n} &= P \vec{n} && \text{sur } \gamma_P \setminus \gamma_C \\
\sigma_n \vec{n} &= -(\sigma_n \circ \pi) \vec{n} && \text{sur } \gamma_C \\
g_n &\geq 0 && \text{sur } \gamma_C \\
\mathcal{L} \vec{g}_t &= 0 && \text{sur } \gamma_C \text{ là où } |\vec{\sigma}_t| < \mu |\sigma_n| \\
\vec{\sigma}_t &= -\mu |\sigma_n| \frac{\mathcal{L} \vec{g}_t}{|\mathcal{L} \vec{g}_t|} && \text{sur } \gamma_C \text{ là où } |\vec{\sigma}_t| = \mu |\sigma_n|
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Rappelons qu'ici  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{\Pi}$ ,  $\pi$ ,  $\vec{n}$ ,  $\rho$ ,  $x(X)$  et  $\gamma$  sont définis en fonction de  $\vec{u}$  et que la partie  $\gamma_C$  fait partie des inconnues du problème.

### 1.7.2 Formulation en travail

Pour obtenir une solution quasi-statique, il nous faut un déplacement tel que tout mouvement infinitésimal nécessiterait un travail positif. En explicitant le travail en question, nous obtenons une inégalité quasi-variationnelle. Une fonction  $\vec{u}$  satisfaisant la condition de Dirichlet sera dite une solution lorsque pour tout déplacement infinitésimal admissible (on dit aussi travail virtuel) :

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \vec{w} - \int_{\omega} \rho \vec{r} \cdot \vec{w} - \int_{\gamma_P} P \vec{n} \cdot \vec{w} + \int_{\gamma_C} \mu \sigma_n |\mathcal{L} \vec{g}_t(\vec{u})| - \int_{\gamma_C} \mu \sigma_n |\mathcal{L} \vec{g}_t(\vec{u} + \vec{w})| \geq 0 . \tag{1.6}$$

L'expression « déplacement infinitésimal admissible » désigne un élément  $\vec{w}$  de l'espace des différences de déplacements qui préserve la non-pénétration linéarisée

$$(\vec{w}(x)) \cdot \vec{n}(x) \leq (\vec{w}(\pi(x))) \cdot \vec{n}(x) . \tag{1.7}$$

Essentiellement, on obtient l'inégalité (1.6) en multipliant la première ligne de (1.5) par le déplacement virtuel  $\vec{w}$ , puis en intégrant sur  $\omega$ . Il faut ensuite appliquer un théorème de divergence approprié puis introduire les autres équations de (1.5) et tenir compte du choix de  $\vec{w}$ .

À l'aide de la transformée de Piola, on peut ramener ces intégrales sur le domaine non déformé. En notant  $\mathbf{\Pi}_N = \mathbf{\Pi} \vec{N} \cdot \vec{N}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{\Pi} : \nabla_X \vec{w} - \int_{\Omega} \rho \vec{r}(x) \cdot \vec{w} - \int_{\Gamma_P} -P J \mathbf{F}^{-T} \vec{N} \cdot \vec{w} \\ + \int_{\Gamma_C} \mu \mathbf{\Pi}_N |\vec{u}_t| - \int_{\Gamma_C} \mu \mathbf{\Pi}_N |\vec{u}_t + \vec{w}_t| \geq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

### 1.7.3 Formulation en énergie

La dernière façon d'exprimer notre problème consiste à chercher un déplacement qui minimise localement l'énergie du système. Il faut alors vérifier que l'inéquation (1.8) est en fait la condition d'optimalité du problème de minimisation

$$J(\vec{u}) + \int_{\Gamma_C} s |\mathcal{L} \vec{g}_t(\vec{u})| = \min_{g_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) + \int_{\Gamma_C} s |\mathcal{L} \vec{g}_t(\vec{v})| \right) \quad (1.9)$$

où (voir Bonet et Wood (1997))

$$J(\vec{v}) = \int_{\Omega} \Psi - \int_{\Omega} \rho \vec{r}(x) \cdot \vec{v} - \int_{\Gamma_N} \vec{t}_0 \cdot \vec{v}$$

et satisfaire aussi l'équation  $s = \mu \sigma_n$ .

## 1.8 Équivalence des formulations

Depuis l'énoncé du problème de Signorini (1933) jusqu'à nos jours, des générations de mathématiciens ont travaillé à démontrer l'existence et l'unicité ou la non-unicité de la solution de différentes formulations du problème d'élasticité. En petites ou en grandes déformations, avec ou sans contact, avec ou sans frottement, complètement adhérent, glissant ou un peu des deux, avec une zone de contact connue à l'avance, inconnue mais ne pouvant que rapetisser, une zone de contact quelconque, etc. Pour chacune de ces variantes, on s'intéresse aussi à formuler le problème en différentes variantes afin d'en faire ressortir les différentes propriétés. Nous avons rassemblé ici quelques-unes de ces démonstrations :

- Duvaut et Lions (1972) en élasticité linéaire avec frottement ou contraintes unilatérales ;
- Ciarlet (1988) aux pages 68-69 pour la déformation sans contact ;
- Kikuchi et Oden (1988) en déformable-déformable, petites déformations, loi de Coulomb. L'équivalence des formulations en forces et en travaux est faite aux pages 267-271. Aux pages 272-274 le problème est amoindri en oubliant la non-pénétration et en supposant la pression normale connue sur la zone de contact potentielle. L'équivalence des formulations en travaux et en énergie est ensuite démontrée sous certaines conditions.
- Haslinger *et al.* (1996) s'intéresse au problème de contact déformable-déformable en petites déformations avec frottement et loi de Coulomb lorsque la zone de contact est



donnée à l’avance ou qu’elle croît régulièrement. Le problème avec force de pression de contact donnée sur la zone de contact potentiel est traité en premier lieu. On y présente le problème de Signorini avec loi de Coulomb comme une inégalité quasi-variationnelle.

- Youbissi (2006) aux pages 16-21 pour la déformation avec contact unilatéral sans frottement.

## 1.9 Discrétisation

Les techniques élaborées dans cette thèse ne sont pas dépendantes du choix précis de la discrétisation. Exception faite du préconditionneur hiérarchique, présenté à la section 2.4.1, tous nos calculs pourraient être faits, par exemple, avec des interpolations affines par élément. Des éléments hexaédraux peuvent aussi être utilisés sans difficultés supplémentaires. Nous avons cependant choisi d’exécuter nos tests sur des maillages constitués d’éléments tétraédraux et avec des déplacements quadratiques par élément, en employant une pression linéaire par élément dans le cas des matériaux incompressibles. Dans le livre de Boffi *et al.* (2013), il est démontré qu’imposer l’incompressibilité par une combinaison d’inconnues de types  $P_1 - P_0$  entraîne des phénomènes de verrouillage et que ceux-ci s’enveniment par l’usage d’éléments rectangulaires  $Q_1$ . Les taux de convergences théoriques indiquent également que les approximations  $P_2$  permettent d’obtenir plus de précision pour la même quantité de degrés de liberté. Les résultats théoriques sont aussi corroborés numériquement dans l’article de Chamberland *et al.* (2010). Dans cet article, des solutions manufacturées non triviales sont employées pour mesurer précisément l’erreur commise par différentes approximations. On y démontre que, autant pour l’usage de mémoire que pour le temps de calcul, les approximations de type  $P_2$  sont, pour une précision égale, nettement moins coûteuses.

### 1.9.1 Notations

Nous essaierons dans cette section de suivre le plus possible Fortin *et al.* (2007). Nous notons :

- $\Omega_h$  une discrétisation du domaine non déformé  $\Omega$ . Cette thèse ne s’intéressera pas aux difficultés liées à la discrétisation du domaine non déformé. Nous pouvons pour la suite supposer que  $\Omega_h = \Omega$ .
- $\mathcal{T}_h$  l’ensemble des éléments du maillage. Nous utilisons dans nos calculs des éléments tétraédriques quadratiques, bien que nos algorithmes ne soient pas dépendants de ce choix.
- $V_h$  l’espace discrétisé des déplacements satisfaisant la condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_D$ . Il s’agira pour nous de l’espace  $P_2$  des polynômes de degré 2 par morceaux.
- $\{\vec{\varphi}_j^u\}$  la base choisie pour  $V_h$ . Pour chaque nœud  $j$  (soit un sommet ou un milieu d’arête), on a trois fonctions de base chacune à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ . Les trois fonctions de bases associées au nœud  $j$  sont notées  $\vec{\varphi}_{j,1}^u, \vec{\varphi}_{j,2}^u$  et  $\vec{\varphi}_{j,3}^u$ . Concrètement, ces trois fonctions

peuvent toutes êtres exprimées en fonctions de la fonction de base scalaire  $\varphi_j^u$ , de la façon suivante :

$$\vec{\varphi}_{j,1}^u = (\varphi_j^u, 0, 0) \quad (1.10)$$

$$\vec{\varphi}_{j,2}^u = (0, \varphi_j^u, 0) \quad (1.11)$$

$$\vec{\varphi}_{j,3}^u = (0, 0, \varphi_j^u) . \quad (1.12)$$

—  $\vec{v}$  un élément quelconque de  $V_h$  et sa décomposition :

$$\vec{v} = \sum_j \sum_{\alpha \in \{1,2,3\}} v_{j,\alpha} \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u \quad (1.13)$$

$$= \sum_j \vec{v}_j \varphi_j^u \quad (1.14)$$

Ainsi, pour chaque nœud  $j$ , la composante  $\vec{v}_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, v_{j,3}) \in \mathbb{R}^3$  et

$$\vec{v}_j \varphi_j^u = v_{j,1} \vec{\varphi}_{j,1}^u + v_{j,2} \vec{\varphi}_{j,2}^u + v_{j,3} \vec{\varphi}_{j,3}^u$$

est une fonction à valeur vectorielle dans  $\mathbb{R}^3$ . Chacun des  $v_{j,\alpha}$  pour  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  est appelé un degré de liberté de  $\vec{v}$ , qu'on abrège parfois par ddl.

—  $\underline{\vec{v}} = (\vec{v}_j)$  le vecteur des coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base choisie pour  $V_h$ . Cette notation sera maintenue cohérente de sorte qu'on puisse parler de l'opérateur de soulignement  $(\underline{\cdot})$  qui projette sur  $V_h$  et extrait ensuite le vecteur de coordonnées dans la base  $\{\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u\}$ . Cet opérateur de soulignement sera aussi défini de la même manière pour chacun des espaces discrets que nous rencontrerons.

—  $\vec{u}$  le déplacement solution du problème qui se décompose en :

$$\vec{u} = \sum_j \vec{u}_j \varphi_j^u .$$

—  $\underline{\vec{u}} = (\vec{u}_j)$  le vecteur des coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base choisie pour  $V_h$ . Encore ici, pour chaque nœud  $j$  on a trois degrés de liberté car  $\vec{u}_j = (u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3})$

—  $\vec{n}$  la normale au bord du domaine déformé. Elle est donc implicitement dépendante du déplacement.

### 1.9.2 Discrétisation de l'énergie

L'énergie que nous souhaitons minimiser, définie à la section 1.7.3, est définie en fonction de chaque déplacement  $\vec{v}$  de notre espace discrétisé par la formule :

$$J(\vec{v}) = \int_{\Omega} \Psi - \int_{\Omega} \rho \vec{r}(x) \cdot \vec{v} - \int_{\Gamma_N} \vec{t}_0 \cdot \vec{v}$$

S'il n'y avait pas de contrainte de contact, nous obtiendrions la solution  $\vec{u}$  simplement en annulant le gradient de cette fonctionnelle par rapport au vecteur  $\underline{\vec{u}}$  des degrés de liberté de

$\vec{u}$  dans  $V_h$ . Ce gradient se calcule comme étant la composition de la dérivée de  $J$  par rapport au déplacement  $\vec{u}$  avec la dérivée de  $\vec{u}$  par rapport à ses degrés de liberté :

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{u}} J &= \nabla_{\vec{u}} \left( \int_{\Omega} \Psi(\vec{u}) - \int_{\Omega} \rho \vec{r}(x) \cdot \vec{u} - \int_{\Gamma_N} \vec{t}_0 \cdot \vec{u} \right) \\ &= \int_{\Omega} \nabla_{\vec{u}} \Psi(\vec{u}) - \int_{\Omega} \nabla_{\vec{u}} (\rho \vec{r}(x) \cdot \vec{u}) - \int_{\Gamma_N} \nabla_{\vec{u}} (\vec{t}_0 \cdot \vec{u}) .\end{aligned}$$

Sachant que  $\nabla_{\vec{u}_{i,\alpha}} \vec{u} = \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u$ , on calcul d'abord

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{u}_{i,\alpha}} \Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} : \nabla_{\vec{u}_{i,\alpha}} \mathbf{E} \\ &= \mathbf{S} : \left( \mathbf{F}^\top \nabla_X \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u + (\nabla_X \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u)^\top \mathbf{F} \right)\end{aligned}$$

et comme  $\mathbf{S}$  est symétrique et  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{F}\mathbf{S}$  :

$$\nabla_{\vec{u}_{i,\alpha}} \Psi = \mathbf{\Pi} : \nabla_X \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u$$

et

$$J'(\vec{u}) = \left( \int_{\Omega} \mathbf{\Pi} : \nabla_X \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u - \int_{\Omega} \rho \vec{r}(x) \cdot \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u - \int_{\Gamma_N} (\vec{t}_0 \cdot \vec{\varphi}_{i,\alpha}^u) \right) .$$

En élasticité linéaire (petites déformations), le premier de ces termes dépend linéairement de  $\vec{u}$  (à travers  $\mathbf{S}$ ) tandis que les autres sont constants. Annuler ce gradient consiste donc à résoudre un problème de la forme

$$A' \vec{u} = F . \quad (1.15)$$

En grandes déformations par contre,  $\mathbf{S}$  ne dépend plus linéairement de  $\vec{u}$  et le terme de pression suiveuse qui remplace éventuellement la condition de Neumann n'est plus constant. Par analogie (ou nostalgie), nous écrirons tout de même le problème sous la forme

$$J'(\vec{u}) = A(\vec{u}) - F . \quad (1.16)$$

Comme le gradient  $J'$  n'est pas affine, on résout le problème  $J'(\vec{u}) = 0$  par une méthode de Newton en cherchant, pour  $\vec{u}$  donné, une correction  $\delta \vec{u}$  telle que  $J'(\vec{u} + \delta \vec{u}) = 0$ . On approxime linéairement ce système en posant

$$J'(\vec{u}) + J''(\vec{u}) \delta \vec{u} = 0$$

que l'on résout itérativement. Ici,

$$J''(\vec{u}) \delta \vec{u} = A'(\vec{u}) \delta \vec{u} - F'(\vec{u}) \delta \vec{u}$$

mais nous omettrons souvent d'écrire la dérivée des termes de bord pour ne garder que

$$J''(\vec{u}) \delta \vec{u} = A'(\vec{u}) \delta \vec{u} . \quad (1.17)$$

Dans la pratique, lorsqu'on applique une pression suiveuse sur la surface, il arrive qu'on omette effectivement  $F'(\vec{u})$ , ce qui revient à ajouter une boucle de point fixe dans laquelle on substitue la pression suiveuse par une condition de Neumann.

### 1.9.3 Discrétisation de la condition de non-pénétration

Nous serons amenés à minimiser l'énergie parmi un ensemble de déplacements satisfaisant deux conditions de contact au bord : la positivité de  $g_n$  et la loi de Coulomb. Pour discrétiser ces conditions, différentes approches s'offrent et nous nous devons de bien expliciter la nôtre.

1. Le choix le plus simple est probablement d'imposer les conditions sur un nombre donné de points.
2. Une autre avenue consiste à d'abord projeter les traces sur  $\gamma$  dans un espace de dimension finie avant d'appliquer les conditions. En déformable-rigide, ceci peut n'avoir aucun effet si la trace est déjà dans le bon espace. Par contre en déformable-déformable, ou dès qu'on entre en contact avec une forme irrégulière, la projection n'est pas sans conséquence.
3. Finalement, on peut choisir d'imposer les conditions faiblement selon un espace de multiplicateurs. C'est la voie que nous suivrons, notre *nindo*.

### 1.9.4 Distance discrétisée

À la section 1.3, un déplacement  $\vec{v}$  étant connu et continu, les notions de non-pénétration et de contact ont été définies en chaque point. Dans le cas discret, il serait possible de vérifier ces conditions de la même manière, mais on préfère habituellement une version affaiblie. En effet, imposer la non-pénétration en chaque point du bord créerait plus de contraintes qu'on a de degrés de liberté pour les satisfaire.

Par nature, la distance au bord  $g_n$  se définit sur  $\gamma$ , le bord du domaine déformé, mais c'est sur la configuration non déformée que nous souhaitons l'employer (l'intégrer). Nous définissons donc  $g_n$  sur  $\Gamma$  simplement par  $g_n(X) = g_n(x(X))$ . Nous n'avons pas fait attention ici à la déformation des éléments de surface, comme on le fait en définissant les tenseurs de Piola-Kirchhoff (1.1.5). Il faudra en tenir compte plus tard, notamment dans l'interprétation des multiplicateurs qui apparaîtront.

Pour définir notre discrétisation, nous devançons l'introduction des multiplicateurs de Lagrange en choisissant  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$  un espace de dimension finie de fonctions à support sur le bord du domaine  $\Gamma$ . Les éléments de notre base préférée de  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$  sont notés  $\varphi_j^\lambda$ . Pour cette base,

$$\eta_n = \sum_j \eta_{nj} \varphi_j^\lambda \quad \forall \eta_n \in \mathcal{M}_{\lambda_n} .$$

Dans le cadre de cette thèse, quelques espaces  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$  ont été testés. Ainsi :

- pour des déplacements construits à l'aide de polynômes de Lagrange de degré 1 ( $\vec{u}$  de type  $P_1$ ), nous prenons pour  $\varphi_j^\lambda$  des polynômes de Lagrange de degré 1 partageant les mêmes sommets ;
- si les déplacements sont de degré 2 (de type  $P_2$ ), il n'est pas aisé de prendre aussi des multiplicateurs de degré 2. Nous nous sommes limités à garder des polynômes de

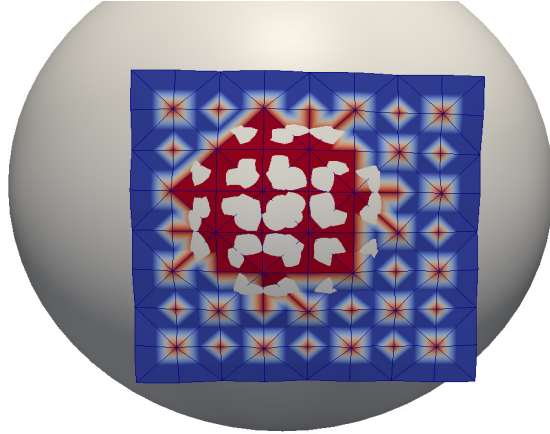


FIGURE 1.4: La surface d'un cube entre en contact avec une sphère. Comme les fonctions de base  $P_2$  ne sont pas partout positives, certains nœuds complètement décollés de la sphère ont un *gap* intégré négatif (en rouge).

Lagrange de degré 1, mais avons testé deux variantes : soit définir moins de  $\varphi_j^\lambda$  en gardant seulement les sommets géométriques (et pas les milieux d'arêtes) ou définir autant de  $\varphi_j^\lambda$  qu'on en aurait en quadratique (on les dit alors  $P_1$  iso  $P_2$ ).

Les fonctions de degré plus élevé amènent des difficultés par le fait qu'il n'y a plus d'équivalence entre la positivité aux nœuds et la positivité partout. Il est alors possible d'avoir un *gap* strictement positif tout en ayant certains *gap* intégrés négatifs, tel qu'illustré à la figure 1.4. Notons que les multiplicateurs de degré 2 ont été abordés par exemple dans l'article de Hild et Laborde (2002), mais dans le cas où le bord du domaine est constitué de segments de droite ce qui ne fait pas apparaître la difficulté que nous avons observée.

Un autre choix envisageable, prendre des masses de Dirac comme  $\varphi_j^\lambda$ , revient à imposer la condition de non-pénétration ponctuellement en certains nœuds. On peut aussi obtenir ce comportement en approximant le produit de dualité  $\langle g_n, \eta_n \rangle$  par une formule de quadrature limitée à un point. On impose la contrainte aux sommets géométriques en employant une formule de quadrature de Newton-Cotes. Un inconvénient de cette approche est de ne pas percevoir le contact s'il survient à l'intérieur des éléments. Un autre inconvénient est d'être plus sensible aux irrégularités géométriques, telles que les porte-à-faux illustrés à la figure 1.5 (page 27).

Nous aurons besoin de  $\mathcal{M}_{\lambda_n+}$  le cône positif des multiplicateurs normaux. Dans le cas qui nous concerne, les polynômes de Lagrange de degré 1, les éléments de  $\mathcal{M}_{\lambda_n+}$  sont les multiplicateurs  $\eta_n = \sum_j \eta_{n_j} \varphi_j^\lambda$  tels que  $\eta_{n_j} \geq 0$  pour tout  $j$ , c'est-à-dire que  $\eta_n$  prend des valeurs positives sur chacun des nœuds définissant nos polynômes de Lagrange. Ceci est d'ailleurs équivalent à imposer la positivité de ces multiplicateurs partout.

Nous imposons la positivité faible de  $g_n$  selon  $\mathcal{M}_{\lambda_n+}$  comme étant

$$\int_{\Gamma} \eta_m g_n \geq 0 \quad \forall \eta_m \in \mathcal{M}_{\lambda_n+} .$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \eta_m g_n &= \int_{\Gamma} \sum_j \eta_{mj} \varphi_j^\lambda g_n \\ &= \sum_j \eta_{mj} \int_{\Gamma} \varphi_j^\lambda g_n \geq 0 \quad \forall \eta_m \in \mathcal{M}_{\lambda_n+} . \end{aligned}$$

Soulignons que l'intégrale est prise sur le bord du domaine non déformé. La fonction  $g_n$  étant originellement définie sur le bord du domaine déformé, il faut la ramener. Cependant, cela n'est pas fait par une transformée de Piola et aucun jacobien n'apparaît. L'omission de ce jacobien est un choix qui pourrait ne pas être fait. L'effet secondaire est de modifier la pondération de la pénétration. La pénétration d'un élément grandement étiré ne sera pas plus pénalisée que s'il avait gardé sa taille ou s'il avait rapetissé. Ceci aura d'ailleurs un impact sur l'interprétation à donner à nos multiplicateurs.

On remarque aussi que l'intégrale est prise sur tout le bord. En fait, pour limiter la détection du contact à une partie seulement de bord, il suffit de ne définir des  $\varphi_j^\lambda$  que sur cette partie.

Pour notre choix de  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$ , nous avons posé

$$\mathcal{M}_{\lambda_n+} = \left\{ \eta_m = \sum_j \eta_{mj} \varphi_j^\lambda \mid \forall j, \eta_{mj} \geq 0 \right\} .$$

Dans ce cas, la positivité faible de  $g_n$  est équivalente à la positivité du vecteur des distances intégrées  $\widehat{g}_n$  dont les composantes sont  $\left( \int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda g_n \right) = (\widehat{g}_{ni})$ , que nous appelons aussi le *gap* intégré. Nous distinguons ce vecteur de celui contenant les coordonnées de la projection de  $g_n$  sur l'espace des multiplicateurs, qui sera noté pour sa part  $\underline{g}_n = (g_{nj})$  tel que  $\text{proj}_{\mathcal{M}_{\lambda_n}}(g_n) = \sum_j g_{nj} \varphi_j^\lambda$ .

Remarquons que la base de Lagrange  $(\varphi_i^\lambda)$  choisie n'est pas orthonormée. Notons  $M_{\lambda_n}$  la matrice masse constante égale à :

$$M_{\lambda_n} = \left( \int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda \varphi_j^\lambda \right) .$$

Cette matrice mesure le manque d'orthogonalité de notre base, elle ne sera diagonale que si les fonctions de bases sont orthogonales deux-à-deux, ce qu'on obtient notamment en utilisant un schéma d'intégration minimaliste de Newton-Cotes. Nous avons l'égalité

$$\widehat{g}_n = M_{\lambda_n} \underline{g}_n .$$

Il en découle que les vecteurs  $\widehat{g}_n$  et  $\underline{g}_n$  ne sont pas égaux. Cette positivité faible n'est pas non plus équivalente à la positivité de  $g_n$  sur les nœuds du maillage. Il s'agit plutôt d'une

positivité en moyenne pondérée par les multiplicateurs. On dit parfois que cette formulation donne une approximation non conforme, puisque la solution de ce problème discret n'est pas cinématiquement admissible au sens continu.

Cette discrétisation n'est pas la seule possible. Dans Coorevits *et al.* (2002), on essaie aussi de remplacer le cône positif  $\mathcal{M}_{\lambda_n+}$  par l'ensemble des multiplicateurs faiblement positifs, c'est-à-dire de poser

$$\mathcal{M}_{\lambda_n+} = \{\lambda \in \mathcal{M}_{\lambda_n} : \langle \lambda, F \rangle \geq 0 \text{ pour tout } F \in \mathcal{M}_{\lambda_n} \text{ positive partout}\} .$$

Bien que les théorèmes de convergence soient légèrement meilleurs ainsi, les calculs numériques qu'ils présentent dans cet article ne laissent pas entrevoir un gain net d'une méthode sur l'autre.

Par la suite, Hild et Laborde (2002) ne gardent que cette version. Ils imposent la positivité faible sur le multiplicateur plutôt que sur la distance ( $\widehat{\lambda}_n \geq 0$  et  $\underline{g}_n \geq 0$  plutôt que  $\underline{\lambda}_n \geq 0$  et  $\widehat{g}_n \geq 0$ ). Ceci a l'effet esthétiquement néfaste de faire osciller le multiplicateur en bordure de la zone de contact, tel qu'illustré à la figure 26 de l'article de Hild (2000). Plus tard, dans l'article de Hild (2011) cet effet est encore illustré et on suggère une nouvelle discrétisation où on impose à la fois  $\underline{\lambda}_n \geq 0$  et  $\underline{g}_n \geq 0$ . D'autres articles, notamment celui de Tur *et al.* (2009) aux conditions (46), imposent plutôt la condition faiblement à la fois sur le multiplicateur et sur le *gap* ( $\widehat{\lambda}_n \geq 0$  et  $\widehat{g}_n \geq 0$ ).

### 1.9.5 Lagrangien

Afin de résoudre le problème discrétisé de minimisation

$$J(\vec{u}) = \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) \tag{1.18}$$

nous reformulons la minimisation de la fonctionnelle d'énergie en la remplaçant par la recherche du point-selle d'un lagrangien, que nous notons  $L^n$ .

$$\begin{aligned} J(\vec{u}) &= \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) \\ &= \min_{\vec{v} \in V_h} \max_{\eta_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) - \widehat{g}_n \cdot \eta_n \right) \\ &= \max_{\eta_n \geq 0} \min_{\vec{v} \in V_h} \underbrace{\left( J(\vec{v}) - \widehat{g}_n \cdot \eta_n \right)}_{L^n(\vec{v}, \eta_n)} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Pour que ce lagrangien atteigne un minimum en  $\vec{u}$ , l'inconnue duale  $\eta_n$  étant fixé, il faut nécessairement que son gradient par rapport à celui-ci s'annule. Nous avons déjà dérivé  $J(\vec{v})$  en (1.16), nous avons maintenant besoin de la dérivée du *gap* intégré.

Pour un déplacement donné  $\vec{v}$ , nous considérons  $X \in \Gamma$  et son image  $x = X + \vec{v}(X)$ . Dans la section (1.3), nous avons noté  $\pi(x(X))$  le vis-à-vis lui étant assigné, et  $g_n(X)$  la distance qui

sépare  $x$  et  $\pi(x)$ . Toutes ces valeurs dépendant implicitement de  $\vec{v}$ , nous sommes intéressés à dériver cette distance par rapport au déplacement  $\vec{v}$ . Nous utilisons le fait que

$$g_n(\vec{u} + \vec{v}) = g_n(\vec{u}) + (\vec{v}(X) - \vec{v}(\pi(X))) \cdot \vec{n}_2 + o(\vec{v})$$

où  $\vec{n}_2$  est la normale à la surface au point  $\pi(X)$  et  $o(\vec{v})$  désigne un terme tel que  $\lim_{\|\vec{v}\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|} = 0$ . Ici, la projection  $\pi(X)$  ainsi que la normale  $\vec{n}_2$  sont calculés pour le déplacement  $\vec{u}$ . Ce résultat peut être retrouvé notamment dans le livre de Delfour et Zolésio (2001) (au théorème 4.4 page 224) ainsi que dans la thèse de Marceau (2001) annexe B.3.

Comme nous travaillons avec des discrétisations, nous nous intéressons plutôt à dériver la distance par rapport à chacun des degrés de liberté du déplacement. En considérant  $u_{j,\alpha}$  le degré de liberté associé à la fonction de base  $\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left( \partial_{u_{j,\alpha}} g_n \right) (x) &= \partial_{\vec{u}} g_n \cdot \partial_{u_{j,\alpha}} \vec{u} \\ &= (\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X) - \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(\pi(X))) \cdot \vec{n}_2 . \end{aligned}$$

Bien sûr, ce résultat est valable seulement lorsque  $\gamma$  est dérivable au point  $\pi(x)$ . Parfois,  $\pi(x)$  se trouve sur un sommet ou une arête du maillage, auquel cas la normale  $\vec{n}_2$  n'existe pas directement. Pour nos calculs, nous remplaçons  $\vec{n}_2$  par une variante lissée. Il y a plusieurs façons de s'y prendre et nous avons choisi de calculer la projection en norme  $L^2$  du champ de normale sur l'espace des multiplicateurs tridimensionnels  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$ <sup>3</sup>.

Une fois le *gap* ponctuel dérivé, nous pouvons facilement dériver sa version intégrée :

$$\begin{aligned} \partial_{u_{j,\alpha}} \widehat{g}_n &= \partial_{u_{j,\alpha}} \left( \int_{\Gamma} g_n \varphi_i^\lambda \right) \\ &= \left( \int_{\Gamma} (\partial_{u_{j,\alpha}} g_n) \varphi_i^\lambda \right) \\ &= \left( \int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda (\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X) - \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(\pi(X))) \cdot \vec{n}_2 \right) . \end{aligned}$$

Nous prenons le temps de rappeler que c'est par choix qu'aucun jacobien n'apparaît dans l'intégrale. Nous portons l'attention du lecteur sur le fait que l'intégrale est calculée sur le domaine non déformé, bien que la normale soit celle sur le domaine déformé. Une dernière précision concerne le support de cette intégrale. Lorsque nous avons défini le *gap* ponctuel, nous avons précisé que certains points peuvent ne pas se faire assigner de vis-à-vis. Ces points ne contribuent pas à l'intégrale. On appelle porte-à-faux cette situation où une surface s'appuie partiellement sur une autre surface et tient partiellement dans le vide (figure 1.5).

Ainsi, les termes de formulations définis sur la surface de contact sont des intégrales dont le support change avec l'inconnue  $\vec{u}$  du déplacement. En dérivant un de ces termes par rapport à  $\vec{u}$ , on obtient en plus de l'intégrale de la dérivée, un terme d'intégration sur la frontière de



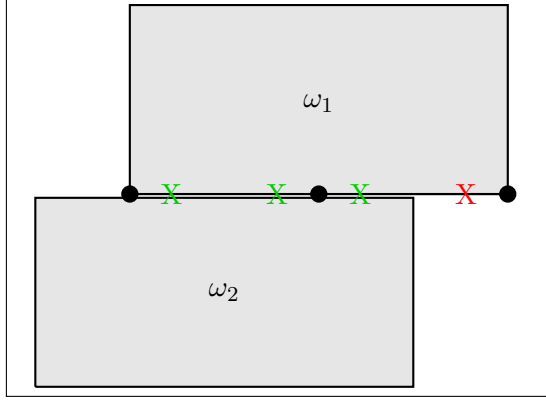


FIGURE 1.5: L'élément de droite est en porte-à-faux avec un point d'intégration (X vert) qui a un vis-à-vis et un autre point d'intégration (X rouge) qui n'en a pas.

la zone de contact. En notant  $\Gamma_C$  la partie de  $\Gamma$  constituée des points avec un vis-à-vis, nous aurions quelque chose du genre :

$$\partial_{\vec{u}_j} \int_{\Gamma_C} F = \int_{\Gamma_C} \partial_{\vec{u}_j} F + \int_{\partial\Gamma_C} F \partial_{\vec{u}_j} \Gamma_C \quad (1.20)$$

Dans nos calculs, nous avons laissé tombé ce terme de variation de la zone de contact. Pour les conserver, nous aurions d'abord besoin de construire un maillage qui représente le contour de la zone en porte-à-faux, ce qui n'est pas disponible à ce jour dans notre logiciel.

Nous notons  $B_n = (b_{ij}^n)$  et  $B_n^{\text{ext}} = (b_{ij}^{n, \text{ext}})$  les matrices dont les coefficients sont des blocs de taille  $1 \times 3$  et valent :

$$b_{ij\alpha}^{n, \text{int}} = \int_{\Gamma} (\varphi_i^\lambda \bar{\varphi}_{j,\alpha}^u(X) \cdot \vec{n}_2) \quad \text{et} \quad b_{ij\alpha}^{n, \text{ext}} = \int_{\Gamma} (\varphi_i^\lambda \bar{\varphi}_{j,\alpha}^u(\pi(X)) \cdot \vec{n}_2) \quad \text{pour } \alpha \in \{1, 2, 3\} .$$

Ceci nous permet de réécrire

$$\nabla_{\vec{u}} \widehat{\mathcal{G}}_n = (B_n^{\text{int}} - B_n^{\text{ext}})^\top, \quad (1.21)$$

que nous abrègerons par  $B_n^\top$ .

Nous pouvons maintenant écrire la condition primale d'optimalité comme étant :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}} L^n(\vec{v}, \eta_n) &= 0 \\ J'(\vec{u}) - \nabla_{\vec{u}} \widehat{\mathcal{G}}_n(\vec{u}) \cdot \underline{\eta}_n &= 0 \\ A(\vec{u}) - B_n^\top(\vec{u}) \underline{\eta}_n &= F \end{aligned} \quad (1.22)$$

La variable  $\underline{\eta}_n$  est, pour sa part, contrainte. Pour calculer ses conditions d'optimalité, il faudra distinguer les cas à l'intérieur de son domaine d'admissibilité des cas sur le bord de son domaine. Considérons  $\lambda_{ni}$  une entrée du vecteur  $\underline{\lambda}_n$ , solution du point-selle contraint. Si

$\lambda_{ni} > 0$ , alors il faut que la dérivée du lagrangien par rapport à cette composante s'annule, c'est-à-dire

$$\lambda_{ni} > 0 \Rightarrow \widehat{g}_{ni} = 0 .$$

Si par contre  $\lambda_{ni} = 0$  alors il faut que la dérivée directionnelle du lagrangien soit positive pour toute variation positive de  $\lambda_{ni}$ , c'est-à-dire

$$\lambda_{ni} = 0 \Rightarrow \widehat{g}_{ni} \geq 0 .$$

On peut résumer ces conditions d'optimalité, qu'on appelle de Kuhn et Tucker (1950), sous la forme

$$\forall i \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ni} \geq 0 \\ \lambda_{ni} \widehat{g}_{ni} = 0 \\ \widehat{g}_{ni} \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.23)$$

On distingue dans ces conditions deux sortes de nœuds. Ceux pour lesquels  $\lambda_{ni} > 0$  (et donc nécessairement  $\widehat{g}_{ni} = 0$ ) sont les nœuds en contact ou actifs. Les autres sont les nœuds sans contact ou inactifs.

Les différentes méthodes de résolutions du problème d'élasticité avec contact que nous présenterons utiliserons différentes formules pour prédire l'état de contact en chaque point. Nous définirons alors deux opérateurs de restrictions  $R_C$  et  $R_{SC}$  aux zones avec et sans contact. Il s'agit de deux matrices diagonales. La première,  $R_C$ , a pour valeur 1 sur la ligne  $i$  lorsque le nœud  $i$  est déterminé contact et 0 sinon. La matrice  $R_{SC}$  étant définie par  $R_{SC} = \mathbf{I} - R_C$ . Avec ses deux opérateurs, nous pouvons réécrire matriciellement les conditions d'optimalité ainsi :

$$R_C \underline{\lambda}_n \geq 0 , \quad R_{SC} \underline{\lambda}_n = 0 , \quad R_C \widehat{g}_n = 0 \quad \text{et} \quad R_{SC} \widehat{g}_n \geq 0 .$$

### 1.9.6 Discrétisation de la loi de Coulomb

Nous avons énoncé à la section 1.4 la loi de frottement de Coulomb. Par nature, cette loi est dynamique. Cette thèse ne se penchera pas vraiment sur les aspects dynamiques. Nous ne considérons qu'une seule discrétisation en temps, soit Euler implicite. Pour un point  $x_1 = X_1 + \vec{v}(X_1)$  du domaine déformé, nous notons  $x_2 = \pi(x_1) = X_2 + \vec{v}(X_2)$  son vis-à-vis. Ayant noté  $\vec{u}_p$  le déplacement solution au pas de temps ou de charge précédant, nous définissons les points  $x_1^p = X_1 + \vec{u}_p(X_1)$  et  $x_2^p = X_2 + \vec{u}_p(X_2)$ . Finalement, nous notons  $\mathbf{F}$  le gradient de la déformation au temps présent au point  $x_1$  et  $\mathbf{F}_p$  le gradient de la déformation au temps

précédent au point  $x_1^p$ . Nous approximons la vitesse relative définie par la dérivée de Lie ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_2 - x_1) &= \mathbf{F} \frac{\partial(\mathbf{F}^{-1}(x_2 - x_1))}{\partial t} \\ &\approx \mathbf{F} \left( \frac{\mathbf{F}^{-1}(x_2 - x_1) - \mathbf{F}_p^{-1}(x_2^p - x_1^p)}{\Delta t} \right) \\ &\approx \frac{(x_2 - x_1) - \mathbf{F}\mathbf{F}_p^{-1}(x_2^p - x_1^p)}{\Delta t}.\end{aligned}\quad (1.24)$$

Dans certains cas, le produit  $\mathbf{F}\mathbf{F}_p^{-1}$  est suffisamment près de l'identité pour qu'on puisse le négliger. On obtient alors

$$\frac{(x_2 - x_1) - (x_2^p - x_1^p)}{\Delta t}\quad (1.25)$$

qui est l'approximation de la différence des vitesses  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_2) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_1)$ .

Pour la suite de cette thèse, nous conservons cette deuxième approximation. Dans le cas d'applications où l'invariance par changement de repère est importante, par exemple si des objets tournent rapidement sur eux-mêmes, il serait préférable de conserver la formule 1.24. Pour réécrire la loi de Coulomb en fonction du déplacement  $\vec{v}$ , nous définissons le glissement ponctuel en tant que vecteur de  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v}(x_1) &= \left( (x_1 - x_1^p) - (x_2 - x_2^p) \right) \\ &= \left( (X_1 + \vec{v}(X_1) - (X_1 + \vec{u}_p(X_1))) - (X_2 + \vec{v}(X_2) - (X_2 + \vec{u}_p(X_2))) \right) \\ &= \left( (\vec{v}(X_1) - \vec{u}_p(X_1)) - (\vec{v}(X_2) - \vec{u}_p(X_2)) \right).\end{aligned}\quad (1.26)$$

Nous pouvons maintenant poser le glissement tangentiel ponctuel  $\vec{g}_t(x)$  comme étant le vecteur tangent à la surface :

$$\vec{g}_t(x) = (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \cdot \Delta \vec{v}(x)\quad (1.27)$$

Il s'agit en fait d'une approximation de la vitesse relative entre les deux corps en contact, la division par le pas de temps en moins. Notez qu'ici le point  $X_2$  est bien le même pour  $\vec{v}$  et  $\vec{u}_p$ , il est calculé à partir du domaine déformé et dépend donc implicitement de  $\vec{v}$ . Par analogie à l'écart  $g_n$  que nous appelons parfois *gap* normal, nous appelons parfois  $\vec{g}_t(x)$  le *gap* tangentiel.

La loi de Coulomb ainsi discrétisée en temps devient :

$$\begin{cases} \vec{g}_t = 0 & \text{si } |\vec{\sigma}_t| < \mu |\sigma_n| \\ \vec{\sigma}_t = -\mu \sigma_n \frac{\vec{g}_t}{|\vec{g}_t|} & \text{sinon.} \end{cases}\quad (1.28)$$

Il est intéressant de constater que l'incrément de temps s'est simplifié et que seule la direction de l'incrément de déplacement intervient.

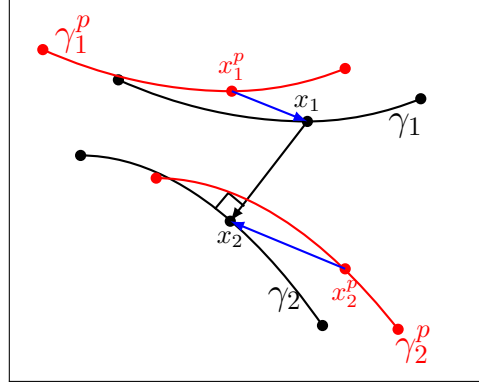


FIGURE 1.6: Sur cette figure, le point  $x_1$  a pour vis-à-vis le point  $x_2 = \pi(x_1)$ . Au pas de chargement précédent, ces deux particules se trouvaient respectivement en  $x_1^p$  et  $x_2^p$ . C'est donc dire que la première s'est déplacé de  $x_1 - x_1^p$  et la seconde de  $x_2 - x_2^p$ . Le glissement d'une par rapport à l'autre  $\Delta \vec{v}(x_1)$  est la différence de ces déplacements :  $(x_1 - x_1^p) - (x_2 - x_2^p)$ .

### 1.9.7 Discrétisation tangentielle

Nous reprenons maintenant le problème 1.9, dans lequel nous remplaçons notre discrétisation en temps :

$$\min_{g_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) + \int_{\Gamma} s |\vec{g}_t| \right), \quad (1.29)$$

ce problème étant lui-même situé à l'intérieur d'une boucle de point-fixe sur la fonction positive  $s > 0$  qui représente le seuil de Tresca sur  $\Gamma$ .

Nous désirons imposer la loi de Coulomb de façon faible. Pour un nœud adhérent, nous désirons que le *gap* tangential s'annule, mais en moyenne plutôt que ponctuellement. Nous avons ici un choix à faire sur la définition du *gap* tangential intégré, qui repose essentiellement sur le choix d'un espace de multiplicateurs.

Le choix le plus courant dans la littérature passe par les coordonnées curvilignes convectées, qui sont bien connues de la mécanique des milieux continus. Plusieurs ouvrages en font une présentation détaillée, notamment Laursen (1992), Laursen (2002) à la section 3.4.1 ou Wriggers (2006) à l'appendice B. Elles apparaissent parfois en deux dimensions sous le nom d'abscisses curvilignes, dans les articles de Baillet et Sassi (2003), Baillet et Sassi (2006). Essentiellement, il s'agit d'une paramétrisation de la surface non déformée (les coordonnées curvilignes) qui se déforme avec le domaine (convectées). En prenant, en chaque point de la surface, les dérivées par rapport à chacun des paramètres, nous obtenons une paire de vecteurs qui sert de base pour le plan tangent à la surface. Nous nommons ces deux champs de vecteurs  $\vec{\tau}_1$  et  $\vec{\tau}_2$ .

Les coordonnées curvilignes impliquent une surcharge de notation et une difficulté d'approche qu'on aimerait éviter. De plus, la construction des champs vectoriels de base  $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n})$  n'est

pas automatisée, elle est même impossible pour certaines situations, telles que la sphère<sup>1</sup>. D'ailleurs ces vecteurs tangents n'ont aucune signification physique et ne se définissent pas canoniquement. Finalement, si ces champs vectoriels ne sont pas assez propres, ils peuvent ruiner la qualité de l'approximation obtenue. Considérant toutes ces bonnes raisons, il paraît judicieux de ne pas les faire intervenir.

La principale différence de l'approche « sans coordonnée curviligne » se situe dans l'espace des fonctions de pression de contact. L'inconnue  $\vec{\lambda}$  sera prise dans un ensemble de dimension finie de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour cet espace, nous prenons simplement le produit cartésien  $(\mathcal{M}_{\lambda_n})^3$ . Ainsi, le multiplicateur n'est pas séparé *a priori* en partie normale et tangentielle. Cette décomposition devra toutefois être faite pour appliquer la loi de Coulomb.

Nous devons maintenant choisir une discrétisation du problème. Pour ce faire nous définissons le glissement tangentiel intégré, analogue du *gap* normal intégré.

### 1.9.8 Échantillonnage du glissement tangentiel

Comme nous l'avons fait pour la contrainte de non-pénétration, nous modifions légèrement la loi de Coulomb pour le problème discret. Nous cherchons une solution non conforme, ce qui signifie que la solution de notre problème discret n'est pas nécessairement admissible pour le problème continu.

Avant de l'échantillonner en  $\hat{g}_t = (\hat{g}_{ti})$  selon chacune de nos fonctions de base, nous devons extraire sa partie tangente à la surface. Pour ce faire, nous avons fait le choix d'utiliser non pas la normale à la surface en chaque point d'intégration, mais plutôt une normale fixe, notée  $\vec{n}_i$ , qui ne dépend que du nœud  $i$ , obtenue en lissant la normale au maillage déformé. Cette normale lissée peut se calculer, par exemple, en projetant le champ de normales sur l'espace des multiplicateurs  $(\mathcal{M}_{\lambda_n})^3$ . Pour chaque nœud  $i$ , nous avons trois fonctions de base  $\vec{\varphi}_{i,1}^\lambda, \vec{\varphi}_{i,2}^\lambda$  et  $\vec{\varphi}_{i,3}^\lambda$ . Tout comme c'était le cas pour les déplacements, ces fonctions de bases vectorielles peuvent se définir selon la fonction de base scalaire  $\varphi_i^\lambda$  ainsi :

$$\vec{\varphi}_{i,1}^\lambda = (\varphi_i^\lambda, 0, 0) \quad (1.30)$$

$$\vec{\varphi}_{i,2}^\lambda = (0, \varphi_i^\lambda, 0) \quad (1.31)$$

$$\vec{\varphi}_{i,3}^\lambda = (0, 0, \varphi_i^\lambda) . \quad (1.32)$$

Nous calculons le glissement tangentiel intégré en intégrant le glissement tangentiel multiplié tour à tour par chacune des trois fonctions de base associées au nœud  $i$  :

$$g_{ti,\alpha} = \int_{\Gamma} \vec{g}_t(x) \cdot \vec{\varphi}_{i,\alpha}^\lambda(x)$$

pour  $\alpha = 1, 2, 3$ .

---

1. On peut imaginer de contourner ce problème en prenant, par exemple, une partition de l'unité. On définirait différents champs de multiplicateurs ne couvrant chacun qu'une partie de la surface.

Le glissement tangentiel intégré  $\widehat{g}_{ti} = (\widehat{g}_{t1}, \widehat{g}_{t2}, \widehat{g}_{t3})$  est donc un vecteur tridimensionnel. On simplifie d'abord ce calcul en remarquant que :

$$\widehat{g}_{ti} = \int_{\Gamma} \vec{g}_t(x) \varphi_i^\lambda(x) \quad (1.33)$$

On remplace ensuite  $\vec{g}_t(x)$  par sa définition (avec  $\vec{n}_i$  au lieu de  $\vec{n}(x)$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ti} &= \int_{\Gamma} (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) \left( (\vec{v}(x) - \vec{u}_p(x)) - (\vec{v}(\pi(x)) - \vec{u}_p(\pi(x))) \right) \varphi_i^\lambda(x) \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) (\vec{v}(x) - \vec{u}_p(x)) \varphi_i^\lambda(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) (\vec{v}(\pi(x)) - \vec{u}_p(\pi(x))) \varphi_i^\lambda(x) . \end{aligned}$$

Si encore une fois on note la fonction  $\vec{u}_p = \sum_j \vec{u}_{pj} \varphi_j^u(x)$  et le vecteur  $\underline{\vec{u}}_p = (\vec{u}_{pj})$ , alors

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ti} &= \int_{\Gamma} \sum_j (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) (\vec{v}_j - \vec{u}_{pj}) \varphi_j^u(x) \cdot \varphi_i^\lambda(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \sum_j (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) (\vec{v}_j - \vec{u}_{pj}) \varphi_j^u(\pi(x)) \cdot \varphi_i^\lambda(x) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\widehat{g}_t = (B_t^{\text{int}} - B_t^{\text{ext}}) (\underline{\vec{v}} - \underline{\vec{u}}_p) \quad (1.34)$$

$$(1.35)$$

où nous avons noté  $B_t^{\text{int}}$  et  $B_t^{\text{ext}}$  les matrices dont les entrées valent respectivement

$$\int_{\Gamma} \vec{\varphi}_{i,\alpha}^\lambda(x) \cdot (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) \vec{\varphi}_{j,\beta}^u(x)$$

et

$$\int_{\Gamma} \vec{\varphi}_{i,\alpha}^\lambda(x) \cdot (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) \vec{\varphi}_{j,\beta}^u(\pi(x))$$

pour  $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ . Il s'agit en quelque sorte de matrices par blocs, dont l'entrée  $(i, j)$  est une matrice de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Nous utiliserons par la suite  $B_t = B_t^{\text{int}} - B_t^{\text{ext}}$ .

Puisque cela servira plusieurs fois, nous définissons la matrice  $I_t$  de projection sur le plan tangent à la surface en chaque sommet. Il s'agit d'une matrice diagonale par bloc, dont la  $i^e$  entrée est une matrice  $3 \times 3$  formée de l'opérateur  $(\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i)$ . Ceci nous permet d'écrire  $B_t^{\text{int}} = I_t B^{\text{int}}$  et  $B_t^{\text{ext}} = I_t B^{\text{ext}}$  où nous avons noté  $B^{\text{int}}$  et  $B^{\text{ext}}$  les matrices dont les entrées sont également des matrices  $3 \times 3$  valant respectivement :

$$\left( \int_{\Gamma} \vec{\varphi}_{i,\alpha}^\lambda(x) \vec{\varphi}_{j,\beta}^u(x) \right)_{\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}}$$

et

$$\left( \int_{\Gamma} \vec{\varphi}_{i,\alpha}^{\lambda}(x) \vec{\varphi}_{j,\beta}^u(\pi(x)) \right)_{\alpha,\beta \in \{1,2,3\}}$$

et encore  $B = B^{\text{int}} - B^{\text{ext}}$ .

Remarquons que notre choix de ne pas utiliser une normale différente en chaque point d'intégration, mais plutôt une normale fixe qui ne dépend que du degré de liberté en  $\vec{\lambda}$ , nous permet de vérifier que chacune des composantes  $\widehat{g}_{t_i}$  est perpendiculaire à la normale  $\vec{n}_i$  correspondante.

### 1.9.9 Lagrangien discret du frottement

Afin de discrétiser le problème 1.29, nous évaluons ponctuellement le seuil de Tresca en posant  $\underline{s} = (s_i)$  et nous échantillonnons le glissement tangentiel selon la formule de la section précédente. Le seuil de Tresca  $\underline{s}$  est ainsi fixé et ne dépendra pas du multiplicateur. Nous faisons de même pour la normale utilisée pour décomposer le multiplicateur en partie normale et tangentielle et pour extraire la composante tangentielle du glissement, nous fixons cette normale pour le calcul des conditions d'optimalité. Le problème discret que nous avons choisi de résoudre est alors :

$$\min_{\widehat{g}_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) + \sum_i s_i |\widehat{g}_{t_i}| \right) . \quad (1.36)$$

Nous désirons transformer notre problème discret en lagrangien, au moyen d'un multiplicateur tridimensionnel  $\vec{\eta}$  que nous prenons dans l'espace  $(\mathcal{M}_{\lambda_n})^3$ . Pour chaque sommet indicé par  $i$ , nous avons un vecteur de trois degrés de liberté  $\vec{\eta}_i \in \mathbb{R}^3$  de sorte que  $\vec{\eta} = \sum_i \vec{\eta}_i \varphi_i^{\lambda}$  avec  $\vec{\eta} = (\vec{\eta}_i)$ .

Nous aurons plus tard besoin de séparer ce multiplicateur en une partie tangentielle (vectorielle) et une partie normale (scalaire). Nous avons déjà défini l'opérateur matriciel  $I_t$ , que nous utilisons pour définir  $\vec{\eta}_t = I_t \vec{\eta}$ , c'est-à-dire  $\vec{\eta}_{t_i} = (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) \vec{\eta}_i$ . Nous définissons maintenant son complémentaire, l'opérateur  $I_n$  tel que la  $i^e$  composante du vecteur  $\underline{\eta}_n = I_n \vec{\eta}$  soit le scalaire  $\eta_{n_i} = \vec{\eta}_i \cdot \vec{n}_i$ . L'opérateur  $I_n$  a donc trois fois plus de colonnes que de lignes et sa  $i^e$  ligne est constituée de la normale  $\vec{n}_i$  placée à l'horizontale. Nous avons l'égalité  $\vec{\eta} = I_n^{\top} \underline{\eta}_n + \vec{\eta}_t$ .

Notre lagrangien se réécrit maintenant ainsi :

$$\begin{aligned} & \min_{\widehat{g}_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) + \sum_i s_i |\widehat{g}_{t_i}| \right) \\ & \min_{\widehat{g}_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) + \sum_i \max_{|\vec{\eta}_{t_i}| \leq s_i} \left( -\vec{\eta}_i \cdot \widehat{g}_{t_i} \right) \right) \\ & \min_{\widehat{g}_n \geq 0} \left( J(\vec{v}) + \max_{|\underline{\eta}_t| \leq \underline{s}} \left( -\underline{\eta}_t \cdot \widehat{g}_t \right) \right) \end{aligned}$$

où  $|\vec{\eta}_t| \leq \underline{s}$  dénote l'inégalité composante par composante.

Nous pouvons maintenant ajouter la composante normale du problème. Comme le *gap* intégré  $\widehat{g}_n$  introduit au chapitre précédent était un scalaire, nous commençons par le rendre vectoriel en le multipliant par la normale  $\vec{n}_i$  au nœud. En notant  $\widehat{g}_n \vec{n}$  le vecteur dont les composantes, tridimensionnelles, valent  $\widehat{g}_{n_i} \vec{n}_i$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \min_{\vec{v}} \left( J(\vec{v}) + \max_{\underline{\eta}_n \geq 0} \left( -\underline{\eta} \cdot \widehat{g}_n \vec{n} \right) + \max_{\underline{\eta}_t \leq \underline{s}} \left( -\underline{\eta} \cdot \widehat{g}_t \right) \right) \\
& \min_{\vec{v}} \max_{\substack{\eta_n \geq 0 \\ |\vec{\eta}_t| \leq \underline{s}}} \underbrace{\left( J(\vec{v}) - \underline{\eta} \cdot \widehat{g}_n \vec{n} - \underline{\eta} \cdot \widehat{g}_t \right)}_{L(\vec{v}, \underline{\eta})} \\
& \min_{\vec{v}} \max_{\substack{\eta_n \geq 0 \\ |\vec{\eta}_t| \leq \underline{s}}} \underbrace{\left( J(\vec{v}) - \underline{\eta} \cdot \left( \widehat{g}_n \vec{n} + \widehat{g}_t \right) \right)}_{L(\vec{v}, \underline{\eta})} . \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Nous avons finalement introduit le lagrangien  $L$  dont nous calculons les conditions d'optimalité à l'instant.

### 1.9.10 Conditions d'optimalité

Afin de calculer les conditions d'optimalité souhaitées, nous devons dériver chacun des termes composant le lagrangien précédent. Nous avons déjà calculé la dérivée du *gap* intégré  $\widehat{g}_n$  à la section 1.9.5, nous avons maintenant besoin de la dérivée du glissement tangentiel.

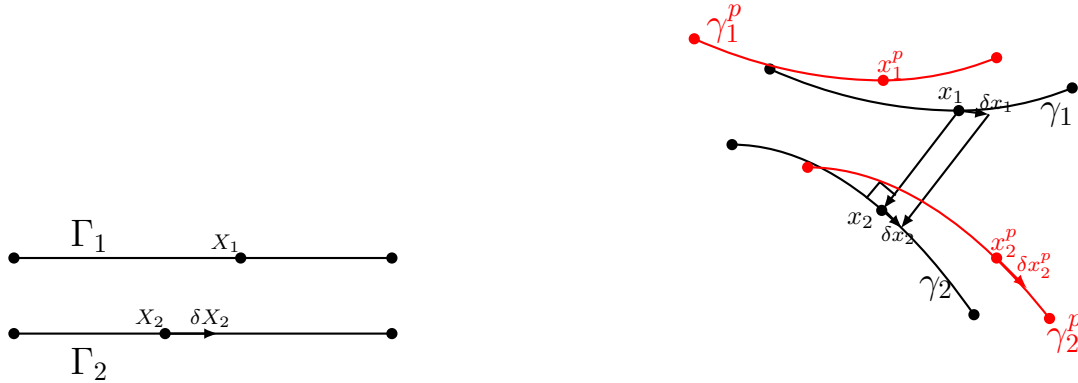


FIGURE 1.7: Dérivée du glissement tangentiel

Nous avons défini en (1.26) le glissement ponctuel  $\Delta \vec{v}(x_1) \in \mathbb{R}^3$  par :

$$\Delta \vec{v}(x_1) = \left( (x_1 - x_1^p) - (x_2 - x_2^p) \right)$$

où  $x_2 = \pi(x_1)$  est la projection du point  $x_1$  sur la surface voisine. Nous devons dériver cette expression par rapport aux degrés de liberté du déplacement  $\vec{v}_j$ .



Commençons par supposer que le point  $X_1$  se trouve sur le support de la fonction de base  $\vec{\varphi}_j^u$  (et que le point  $X_2$  ne s'y trouve pas). Sur la figure 1.7, nous avons représenté le déplacement  $\vec{v}$  sur chacune des faces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  du domaine non déformé. Le point  $x_1 = X_1 + \vec{v}(X_1)$  est projeté sur le point  $x_2 = \pi(x_1) = X_2 + \vec{v}(X_2)$ . Au pas de temps précédent, ces points se trouvaient respectivement en  $x_1^p = X_1 + \vec{v}_p(X_1)$  et  $x_2^p = X_2 + \vec{v}_p(X_2)$ . Une variation  $\delta v_{j,\alpha}$  du déplacement d'un nœud  $j$  résulte en une variation  $\delta x_1 = \delta v_{j,\alpha} \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1)$  du déplacement de  $X_1$ . Elle n'a cependant aucun effet sur le déplacement de  $X_1$  au pas de temps précédent,  $\delta x_1^p = 0$ . La variation de la projection  $x_2$  est la partie tangente au plan à la surface  $\delta x_2 = (\mathbf{I} - \vec{n}(x_2) \otimes \vec{n}(x_2)) \delta x_1$ . Cette variation correspond à une variation  $\delta X_2 = \mathbf{F}^{-1}(X_2) \cdot \delta x_2$  sur le domaine non déformé. Au pas de temps précédent, cela correspond à  $\delta x_2^p = \mathbf{F}_p(X_2) \cdot \delta X_2$ , c'est-à-dire  $\delta x_2^p = \mathbf{F}_p(X_2) \cdot \mathbf{F}^{-1}(X_2) \cdot (\mathbf{I} - \vec{n}(x_2) \otimes \vec{n}(x_2)) \delta x_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_{v_{j,\alpha}} \Delta \vec{v}(x_1) &= \left( (\partial_{v_{j,\alpha}} x_1 - \partial_{v_{j,\alpha}} x_1^p) - (\partial_{v_{j,\alpha}} x_2 - \partial_{v_{j,\alpha}} x_2^p) \right) \\ &= \left( (\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1) - 0) \right. \\ &\quad \left. - \left( (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1) - \mathbf{F}_p(X_2) \mathbf{F}^{-1}(X_2) (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1) \right) \right) \end{aligned}$$

et en négligeant la différence entre  $\mathbf{F}_p$  et  $\mathbf{F}$ ,

$$\approx \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1)$$

Lorsque le degré de liberté affecte un voisinage de  $x_2$  plutôt que de  $x_1$ , il faut faire attention dans nos calculs. Si par exemple le voisinage de  $x_2$  se déplace perpendiculairement à la normale  $\vec{n}$ , alors le point  $x_2 = \pi(x_1)$  ne change pas, mais sa préimage  $X_2$  se déplace dans le sens inverse et par conséquent  $x_2^p$  aussi. Par contre, si le voisinage de  $x_2$  se déplace dans la direction de la normale, alors le point  $x_2$  suivra ce déplacement, mais sa préimage restera la même, et par conséquent  $x_2^p$  aussi. Finalement, si le voisinage de  $x_2$  subit une rotation, le point  $x_2$  se déplace de façon à ce que sa normale continue de pointer vers  $x_1$  et le point  $x_2^p$  se déplace aussi.

Cela donne

$$\begin{aligned} \partial_{v_{j,\alpha}} \Delta \vec{v}(x_1) &= \left( (0 - 0) - (\partial_{v_{j,\alpha}} x_2 - \partial_{v_{j,\alpha}} x_2^p) \right) \\ &\approx - \left( (\vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_2) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{F}_p(X_2) (-\mathbf{F}^{-1}(X_2) (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_2)) \right. \\ &\quad \left. - (\partial_{\vec{n}_2} x_2 \partial_{v_{j,\alpha}} \vec{n}_2 - \mathbf{F}_2^p \mathbf{F}_2^{-1} \partial_{\vec{n}_2} x_2 \partial_{v_{j,\alpha}} \vec{n}_2) \right) \end{aligned}$$

et en négligeant la différence entre  $\mathbf{F}_p$  et  $\mathbf{F}$ ,

$$\approx -\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_2) .$$

Au total, en supposant que la fonction de base  $\vec{\varphi}_{j,\alpha}^u$  s'annule soit en  $X_1$  soit en  $X_2$ ,

$$\partial_{v_{j,\alpha}} \Delta \vec{v}(x_1) \approx \left( \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1) - \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_2) \right) .$$

En (1.27), nous avons défini le glissement tangentiel ponctuel comme étant la projection du glissement ponctuel sur le plan tangent, mais nous avons fixé cette normale. Nous obtenons alors :

$$\partial_{v_{j,\alpha}} \vec{g}_t(x_1) \approx (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \left( \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1) - \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_2) \right) .$$

Nous pouvons maintenant calculer la variation du glissement tangentiel intégré que nous avons défini en (1.9.8) pour notre discrétisation :

$$\begin{aligned} \partial_{v_{j,\alpha}} \widehat{g}_{ti} &= \partial_{v_{j,\alpha}} \int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda \vec{g}_t \\ &\approx (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) \int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda(X_1) \left( \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_1) - \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u(X_2) \right) dX_1 . \end{aligned}$$

En plus de négliger la dérivée de la normale, nous avons supposé que le support de l'intégrale ne dépend pas du déplacement, ce qui n'est le cas notamment lorsqu'il y a des porte-à-faux. Nous obtenons maintenant :

$$\nabla_{\vec{v}} \widehat{g}_t \approx I_t B .$$

Pour que le couple  $(\vec{u}, \vec{\lambda})$  soit solution du problème, il est nécessaire que la dérivée du lagrangien  $L$  (1.37), par rapport à chacun des degrés de liberté du déplacement, soit nulle :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}} \left( J(\vec{v}) - \vec{\lambda} \cdot (\widehat{g}_n \vec{n} + \widehat{g}_t) \right) &= 0 \\ A - B_n^\top (I_n \vec{\lambda}) - I_t B^\top \vec{\lambda} &= F \\ A - B^\top \vec{\lambda} &= F \end{aligned} \tag{1.38}$$

Nous savons déjà que les conditions que nous obtenons ici ne sont pas tout à fait exactes, car nous avons négligé des termes en dérivant. D'autre part, l'addition des matrices  $B_n I_n$  et  $B_t$  ne donne pas exactement  $B$  puisque des normales aux points d'intégration apparaissent dans la matrice  $B_n$  de la section 1.9.5.

Nous dérivons ensuite (1.37) par rapport au multiplicateur, en traitant séparément les parties normale et tangentielle selon la décomposition  $\underline{\lambda}_n = I_n \vec{\lambda}$  et  $\underline{\lambda}_t = I_t \vec{\lambda}$ . Pour la partie normale, il faut distinguer deux cas. Pour les indices  $i$  où la composante  $\lambda_{ni} = \vec{\lambda}_i \cdot \vec{n}_i$  est strictement positive, il faut que la dérivée dans la direction de la normale s'annule :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{n}_i} L \cdot \vec{n}_i &= 0 \\ (-\widehat{g}_{ni} \vec{n}_i - \widehat{g}_{ti}) \cdot \vec{n}_i &= 0 \\ \widehat{g}_{ni} &= 0 . \end{aligned}$$

Il s'agit des nœuds en contact. Pour les autres indices, ceux où le multiplicateur normal s'annule, il faut que la dérivée dans la direction de la normale soit négative :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{n}_i} L \cdot \vec{n}_i &\leq 0 \\ (-\widehat{g}_{n_i} \vec{n}_i - \widehat{g}_{t_i}) \cdot \vec{n}_i &\leq 0 \\ \widehat{g}_{n_i} &\geq 0 \end{aligned}$$

Il s'agit des nœuds sans contact.

Finalement dérivons (1.37) par rapport au multiplicateur tangentiel  $\vec{\lambda}_{ti} = \vec{\lambda}_i - (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{n}_i) \vec{n}_i$ . Il faut encore distinguer deux cas. Pour les indices  $i$  où le multiplicateur tangent est en module strictement plus petit que le seuil,  $|\vec{\lambda}_{ti}| < s_i$ , la dérivée dans les directions tangentes doit simplement s'annuler :

$$\begin{aligned} I_t \partial_{\vec{n}_i} L &= 0 \\ (\mathbf{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) (-\widehat{g}_{n_i} \vec{n}_i - \widehat{g}_{t_i}) &= 0 \\ \widehat{g}_{t_i} &= 0 . \end{aligned} \tag{1.39}$$

Il s'agit des nœuds en contact adhérent. Pour les autres indices, ceux où le multiplicateur tangentiel est en module égal à  $s_i$ , il faut que le Lagrangien diminue dans toutes les directions tangentes pour lesquelles le module de  $\vec{\lambda}_{ti}$  diminue :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{\lambda}_i} L \cdot \delta \vec{\lambda}_{ti} &\leq 0 \quad \forall \delta \vec{\lambda}_{ti} \cdot \vec{\lambda}_{ti} \leq 0 \\ \widehat{g}_{t_i} \cdot \delta \vec{\lambda}_{ti} &\geq 0 \quad \forall \delta \vec{\lambda}_{ti} \cdot \vec{\lambda}_{ti} \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que le *gap* tangentiel doit s'aligner sur la partie tangentielle du multiplicateur :

$$\widehat{g}_{t_i} \parallel \vec{\lambda}_{ti} . \tag{1.40}$$

En effet, supposons par l'absurde que  $\widehat{g}_{t_i}$  ne soit pas aligné sur  $\vec{\lambda}_{ti}$ , alors il existerait (voir figure 1.8 page 38) un vecteur  $\delta \vec{\lambda}_{ti}$  tel que  $\widehat{g}_{t_i} \cdot \delta \vec{\lambda}_{ti} < 0$  et  $\vec{\lambda}_{ti} \cdot \delta \vec{\lambda}_{ti} < 0$ , ce qui contredit les conditions d'optimalité.

Il s'agit des nœuds en contact glissant. Sur ces nœuds, il est possible d'écrire explicitement  $\vec{\lambda}_{ti}$  en fonction des autres variables :

$$\vec{\lambda}_{ti} = -s_i \frac{\widehat{g}_{t_i}}{|\widehat{g}_{t_i}|} .$$

Il manque maintenant une seule condition d'optimalité à ajouter, celle de la boucle de point-fixe sur le seuil de Tresca. Pour chaque nœud en contact glissant, il faut que  $s_i = \mu \lambda_{n_i}$ .

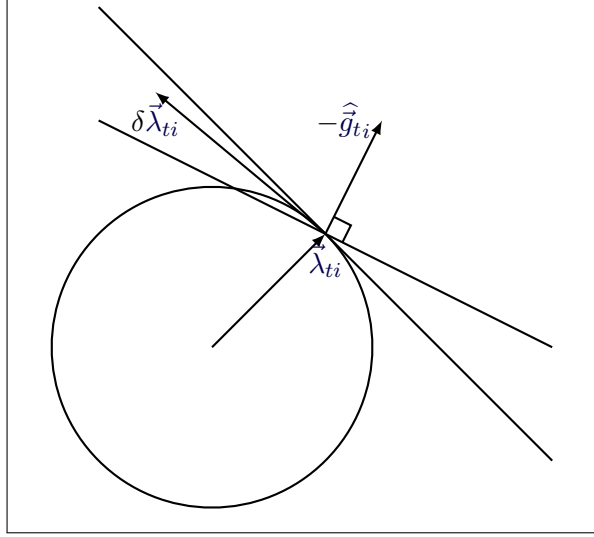


FIGURE 1.8: À cause du manque d'alignement, il existe un  $\delta\vec{\lambda}_{ti}$  tel que  $\delta\vec{\lambda}_{ti} \cdot \vec{\lambda}_{ti} < 0$  et  $\widehat{g}_{ti} \cdot \delta\vec{\lambda}_{ti} < 0$  aussi.

Afin de synthétiser les conditions d'optimalité que nous avons obtenues, nous définissons les opérateurs  $R_A$  et  $R_G$  de restrictions sur les zones de contact adhérent et glissant de la même façon que nous avons défini les opérateurs  $R_C$  et  $R_{SC}$  à la section 2.1. Ceci nous permet d'écrire finalement le système d'équations non linéaires des conditions d'optimalité qui définit le problème discret que nous souhaitons résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B^\top \vec{\lambda} = F \\ R_C \widehat{g}_n = 0 \\ R_{SC} \lambda_n = 0 \\ R_A \widehat{g}_t = 0 \\ R_G \vec{\lambda}_t = R_G \underline{s} \frac{-\widehat{g}_t}{|\widehat{g}_t|} \\ \underline{s} = \mu \lambda_n \end{array} \right. \quad (1.41)$$

## Chapitre 2

# Problème glissant sans frottement

Dans ce chapitre, nous traitons le problème énoncé au chapitre précédent, mais en omettant le frottement. On peut le voir comme le cas particulier où le coefficient de frottement  $\mu$  est nul. Il s'agit en fait de poser comme condition aux limites sur la zone en contact que les forces tangentielles s'annulent :

$$\vec{\sigma}_t = 0 \text{ sur } \gamma_C .$$

Nous souhaitons donc résoudre le problème d'optimisation 1.19. Nous présentons dans ce chapitre différentes méthodes pour résoudre ce problème discret ainsi que des résultats numériques que nous avons obtenus avec celles-ci.

La première de ces méthodes, la pénalisation, n'impose pas strictement la contrainte. Ainsi, une certaine erreur d'interpénétration est commise. Un autre inconvénient de la pénalisation est la difficulté de déterminer l'état de contact. En effet, lorsqu'un nœud est considéré comme étant en contact, la méthode de pénalisation applique une force localisée autour de ce nœud et proportionnelle à l'interpénétration. Par la nature non linéaire du problème qui nous intéresse, cette poussée peut s'avérer trop forte et décoller le nœud de la surface. À l'itération suivante, la force cesse d'être appliquée sur ce nœud puisque celui-ci n'est plus en contact, ceci pouvant causer une oscillation de l'état de contact qui empêche la méthode de Newton de converger.

Une façon de remédier à l'erreur d'interpénétration, et en même temps de stabiliser l'état de contact, est d'utiliser un lagrangien augmenté. Nous présentons différentes variantes de lagrangiens augmentés ainsi que de l'algorithme d'Uzawa appliqué à sa résolution. Cependant, nous verrons que cette méthode, tout comme la pénalisation pure, altère la matrice qui définit le système linéaire d'équations qu'il faut résoudre, détériorant son conditionnement. Conséquemment, le système obtenu est typiquement résolu à l'aide d'une méthode directe, une factorisation  $LU$ . De plus, l'ajout du terme de pénalisation à la matrice ajoute des non-zéros à celle-ci et, en terme imagé, augmente sa largeur de bande, rendant cette factorisation  $LU$  plus dispendieuse. Lorsque le système devient très grand, soit parce que le maillage se raffine ou parce qu'on s'intéresse à une géométrie plus compliquée, le coût de cette factorisation

devient prohibitif.

Pour éviter cette factorisation  $LU$ , on utilise une méthode itérative pour laquelle il est nécessaire de bien préconditionner à la fois le système primal et le système dual. Premièrement, pour le système primal, ayant discrétisé l'inconnue en déplacement à l'aide de polynômes de degré deux, nous pourrions employer un préconditionneur hiérarchique. Pour que celui-ci soit efficace, nous utilisons un lagrangien non augmenté, et linéarisons les contraintes actives afin d'obtenir, à chaque itération de Newton, un système linéaire avec contrainte de type égalité. Deuxièmement, nous construisons un préconditionneur pour le système dual défini par le complément de Schur. Les résultats numériques présentés à la fin du chapitre montre de façon éloquente la pertinence de ces méthodes itératives autant pour des maillages grossiers que pour des maillages très fins où la factorisation  $LU$  n'est simplement plus possible.

## 2.1 Pénalisation

La pénalisation est une façon simple, mais peu robuste, de traiter les problèmes avec contrainte. Plutôt que d'imposer strictement la contrainte telle que discrétisée, on tolère un certain manquement mais au prix d'une pénalité. Cette pénalité se reflète par un terme supplémentaire ajouté à la fonctionnelle d'énergie. Parfois considéré dans un cadre fonctionnel abstrait (Loridan (1971), Bensoussan et Kenneth (1968)), mais plus souvent pour une application concrète (Lions (1969)), elle a continué d'être décortiquée pour elle-même (Kikuchi (1982), Kikuchi et Oden (1988)) ou comme préliminaire aux méthodes de lagrangien augmenté (Simo et Laursen (1992)).

Dans la section 1.9.4, nous avons montré que notre choix de discrétisation de la condition de non-pénétration équivaut à

$$\int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda g_n \geq 0 \quad \forall i \quad ,$$

c'est-à-dire que le vecteur des distances intégrées  $\widehat{g}_n$  doit avoir chacune de ses composantes positives.

La condition  $\widehat{g}_{ni} \leq 0$  sert de définition de l'état de contact. Un nœud  $i$  tel que  $\widehat{g}_{ni} \leq 0$  est dit en contact, alors qu'il n'est pas en contact lorsque  $\widehat{g}_{ni} > 0$ . C'est cette définition du contact que nous utilisons pour définir les matrices de restriction  $R_C$  et  $R_{SC}$ .

La contrainte de non-pénétration est équivalente à imposer  $R_C \widehat{g}_n = 0$ . Afin de libérer notre problème de sa contrainte, nous pénalisons les composantes négatives de ce vecteur en ajoutant

à la fonctionnelle d'énergie le terme  $P_n$  défini par

$$\begin{aligned} P_n(\vec{v}) &= \frac{r_n}{2} \|R_C \widehat{g}_n\|^2 \\ &= \sum_i \frac{r_n}{2} \left( (\widehat{g}_{ni})^- \right)^2 \\ &= \sum_i \frac{r_n}{2} \left( \left( \int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda g_n \right)^- \right)^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

qui dépend du coefficient positif  $r_n$ , qu'on appelle coefficient de pénalisation. Il est important ici de noter que la partie négative  $(\cdot)^-$  est prise autour de l'intégrale et non pas à l'intérieur comme il est courant de le voir, notamment dans l'article récent de [Chouly et Hild \(2013\)](#). En effet, prendre la partie négative à l'intérieur de l'intégrale ne nous permettrait pas de converger, lorsque le coefficient de pénalisation  $r_n$  tend vers l'infinie, vers la même solution discrète que notre lagrangien. De plus, dans une section subséquente, nous utiliserons ce terme de pénalisation pour construire un lagrangien augmenté. Or, prendre la partie négative à l'intérieur de l'intégrale ne nous permettrait pas non plus, pour ce lagrangien augmenté, d'obtenir les même conditions d'optimalité que pour le lagrangien non augmenté.

Nous nous intéressons maintenant au problème pénalisé du contact glissant qui est de trouver  $\vec{u} \in V_h$  tel que

$$J(\vec{u}) + P_n(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in V_h} J(\vec{v}) + P_n(\vec{v}) .$$

Ce problème étant non contraint, nous aurons comme condition nécessaire à l'obtention d'une solution  $\vec{u}$  que la dérivée de la fonctionnelle s'y annule. Nous avons donc besoin de dériver le terme de pénalisation :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}} P_n(\vec{u}) &= \nabla_{\vec{u}} \frac{r_n}{2} (R_C \widehat{g}_n)^2 \\ &= \nabla_{\vec{u}} \sum_i \frac{r_n}{2} \left\| (\widehat{g}_{ni})^- \right\|^2 \end{aligned}$$

Regardons cette dérivée un terme à la fois :

$$\partial_{\vec{u}_j} \left\| (\widehat{g}_{ni})^- \right\|^2 .$$

Nous avons déjà dérivé  $\widehat{g}_n$  à la section 1.9.5, pour ce qui est de l'opérateur  $R_C$  de restriction à la zone en contact, il y a trois cas à considérer. Sur les lignes  $i$  où  $\widehat{g}_{ni} > 0$  ou  $\widehat{g}_{ni} < 0$ , le nœud est décollé (sans contact) ou interpénétré (en contact). Dans ces deux cas, une variation infinitésimale ne change rien à l'état de contact, on obtient donc simplement  $2\widehat{g}_{ni} \partial_{\vec{u}_j} \widehat{g}_{ni}$ . Lorsque  $\widehat{g}_{ni} = 0$ , une variation de  $\vec{u}$  peut causer un changement d'état de contact. Le terme  $(\widehat{g}_{ni})^-$  n'est donc pas dérivable, mais il le devient en l'élevant au carré. En rappelant la définition de la matrice  $B_n$  à la section 1.9.5, on obtient :

$$\nabla_{\vec{u}} P_n(\vec{u}) = r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n \tag{2.2}$$

Nous sommes ramenés à résoudre l'égalité

$$J'(\underline{\vec{u}}) + P_n'(\underline{\vec{u}}) = 0 .$$

Comme cette égalité n'est pas linéaire en  $\underline{\vec{u}}$ , nous appliquons une méthode de Newton pour laquelle nous linéarisons de nouveau. Partant d'une approximation  $\underline{\vec{u}}$  du problème discrétisé, notre algorithme de Newton consiste à chercher une correction  $\underline{\delta\vec{u}} = (\delta\vec{u}_k)$  avec  $\delta\vec{u} = \sum_k \delta\vec{u}_k \varphi_k^u$  telle que

$$J'(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}) + P_n'(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}) = 0$$

Malheureusement, à cause de la nature discontinue de l'état de contact, le terme de pénalisation n'est pas deux fois différentiable. Tout de même, allons-y gaiement :

$$\begin{aligned} P_n'(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}) &= r_n (B_n(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}))^\top \cdot R_C \widehat{g}_n(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}) \\ &\approx P_n'(\underline{\vec{u}}) + r_n (B_n(\underline{\vec{u}}))^\top \delta\vec{u} \cdot R_C \widehat{g}_n(\underline{\vec{u}}) + r_n (B_n(\underline{\vec{u}}))^\top \cdot (R_C \widehat{g}_n(\underline{\vec{u}}))' \delta\vec{u} \\ &\approx P_n'(\underline{\vec{u}}) + \underbrace{r_n B_n^\top R_C B_n}_{P_n''(\underline{\vec{u}})} \cdot \delta\vec{u} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nous conserverons ce résultat et garderons en mémoire qu'il s'agit d'une approximation de la dérivée seconde du terme de pénalisation, celui-ci n'étant pas deux fois dérivable. De plus, la normale  $\vec{n}_2$  présente dans la matrice  $B_n$  dépend de  $\underline{\vec{u}}$ , mais nous avons négligé sa dérivée. Le calcul de la dérivée de la normale est accompli notamment dans la thèse de Laursen (1992), puis repris dans son livre plus souvent cité (Laursen (2002)). On en trouve une autre présentation dans la thèse de Pietrzak (1997), se reprenant dans l'article de Pietrzak et Curnier (1999). Dans les articles de Konyukhov et Schweizerhof (2004a) et Konyukhov et Schweizerhof (2004b), il est illustré que l'ajout de certains de ces termes accélère grandement la convergence. Il serait donc intéressant de les intégrer à nos calculs dans des travaux futurs.

Notre méthode de Newton devient maintenant :

$$\begin{aligned} J'(\underline{\vec{u}}) + J''(\underline{\vec{u}}) \cdot \underline{\delta\vec{u}} + P_n'(\underline{\vec{u}}) + P_n''(\underline{\vec{u}}) \cdot \underline{\delta\vec{u}} &= 0 \\ (J''(\underline{\vec{u}}) + P_n''(\underline{\vec{u}})) \cdot \underline{\delta\vec{u}} &= -J'(\underline{\vec{u}}) - P_n'(\underline{\vec{u}}) \end{aligned}$$

Utilisant maintenant les résultats (1.16), (1.17), (2.2) et (2.3) on obtient

$$(A' + r_n B_n^\top R_C B_n) \cdot \underline{\delta\vec{u}} = F - A - r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n . \quad (2.4)$$

L'algorithme 1 consiste finalement à résoudre cette équation itérativement. Une fois l'algorithme convergé, on peut approximer la pression de contact simplement en évaluant  $r_n \widehat{g}_n$ . Pour le voir, supposant qu'on soit si bien convergé que  $\underline{\delta\vec{u}} \approx 0$ . Alors,

$$\begin{aligned} (A' + r_n B_n^\top R_C B_n) \cdot \underline{\delta\vec{u}} &= F - A - r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n \\ 0 &\approx F - A - r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n \\ F - A &= B_n^\top r_n R_C \widehat{g}_n . \end{aligned}$$



Supposons maintenant qu'on connaisse la valeur du multiplicateur  $\lambda_n$  solution du point-selle 1.19. Sur la zone de contact, on a alors l'équation :

$$F - A = B_n^\top \lambda_n .$$

On en conclut que  $\lambda_n \approx r_n R_C \widehat{g}_n$ . Pour des discrétisations différentes, on retrouve des résultats de cette nature par exemple dans Kikuchi et Song (1981) à la section 4 ainsi que dans Kikuchi et Oden (1988) au théorème 6.6 ou dans l'article plus récent de Chouly et Hild (2013). Dans un sens, on peut utiliser cette approximation pour estimer la pression de contact. Dans l'autre sens, si on peut estimer autrement la pression de contact attendu, on peut estimer la valeur nécessaire du coefficient  $r_n$  pour obtenir une erreur d'interpénétration donnée.

---

**Algorithme 1** : Algorithme de pénalisation de la pénétration

---

**Entrée** :  $\underline{\vec{u}}$  le déplacement au pas de charge précédent.

**Sortie** :  $\underline{\vec{u}}$  solution du problème pénalisé.

1 **Exécuter**

2 | Assemblage des matrices  $A'$ ,  $B_n$  et résidus  $F - A$ ,  $\widehat{g}_n$ .

3 | Détermination de l'état de contact  $R_C$ .

4 |  $M = (A' + r_n B_n^\top R_C B_n)$

5 |  $R = F - A - r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n$

6 |  $\delta \underline{\vec{u}} = M^{-1} R$

7 |  $\underline{\vec{u}} \leftarrow \underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}$

8 **Répéter tant que critère en  $R$  et  $\delta \underline{\vec{u}}$  ;**

---

## 2.2 Lagrangien augmenté

Nous présentons maintenant différentes variantes de la méthode du lagrangien augmenté. La première que nous présentons consiste simplement à ajouter le terme de pénalisation au lagrangien de la section 1.9.5 tel que présenté au premier chapitre du livre de Fortin et Glowinski (1982). À la fin du troisième chapitre de ce livre, on montre une technique de lagrangien à trois champs qui a pour effet de régulariser le lagrangien augmenté. En isolant ce troisième champ, puis en le substituant, nous obtiendrons un nouveau lagrangien augmenté, « *prone to Newton-like solution method* » comme le titre l'article de Alart et Curnier (1991). Cette même technique sera de nouveau appliquée au chapitre suivant pour les équations du frottement.

Le lagrangien augmenté a l'avantage de fournir une solution plus précise que la pénalisation pure. Comme nous le constaterons par des simulations numériques, cette précision est gagnée au prix de plusieurs itérations de Newton supplémentaires. De plus, l'efficacité de cette méthode est très sensible au choix du coefficient  $r_n$ . En gardant le même lagrangien augmenté,

il est possible de réduire cette sensibilité en appliquant la stratégie des contraintes actives. Nous verrons que ce nouvel algorithme, toujours de type Uzawa, réduit aussi les temps de calcul.

### 2.2.1 Approche classique

Afin de résoudre le problème discrétisé de minimisation

$$J(\vec{u}) = \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) , \quad (2.5)$$

nous considérons une méthode de lagrangien augmenté classique, c'est-à-dire telle que présentée dans Fortin (1975) sur les traces de Hestenes (1969) et Powell (1972).

Nous réécrivons d'abord le problème sous la forme

$$\begin{aligned} J(\vec{u}) &= \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J \\ &= \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J + P_n \\ &= \min_{\vec{v} \in V_h} \max_{\underline{\eta}_m \leq 0} \left( J + P_n - \widehat{g}_n \cdot \underline{\eta}_m \right) \\ &= \max_{\underline{\eta}_m \leq 0} \min_{\vec{v} \in V_h} \underbrace{\left( J + P_n - \widehat{g}_n \cdot \underline{\eta}_m \right)}_{L_a^n(\vec{v}, \underline{\eta}_m)} \\ &= \max_{\underline{\eta}_m \leq 0} \min_{\vec{v} \in V_h} \underbrace{\left( J + \frac{1}{2} r_n (R_C \widehat{g}_n)^2 - \widehat{g}_n \cdot \underline{\eta}_m \right)}_{L_a^n(\vec{v}, \underline{\eta}_m)} \end{aligned}$$

Nous notons  $L_a^n(\vec{v}, \underline{\eta}_m)$  le lagrangien augmenté de ce problème de point-selle. Fortin (1975) discute de l'équivalence des problèmes de point-selle pour le lagrangien et le lagrangien augmenté, mais seulement dans le cas de contraintes linéaires. Malheureusement, la contrainte de non-pénétration n'est ni linéaire, ni même convexe.

Quelques remarques s'imposent suite à cette construction. D'une part, si on garde le multiplicateur nul on retrouve la méthode de pénalisation présentée à la section 2.1. D'autre part, nous avons choisi un terme de pénalisation cohérent avec notre lagrangien. En effet, nous verrons qu'une fois convergé le terme de pénalisation s'annule,  $R_C \widehat{g}_n = 0$ . Si nous avions pénalisé en ajoutant le terme  $\int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda (g_n)^-$  plutôt que  $(\int_{\Gamma} \varphi_i^\lambda g_n)^-$ , comme il est courant de faire, nous n'aurions pas cette propriété.

### 2.2.2 Méthode d'Uzawa

La méthode d'Uzawa est en fait une méthode de gradients projetés. On résout d'abord le problème primal, c'est-à-dire le problème vu comme fonction uniquement de la première variable ( $\vec{u}$ ). Pour que ce lagrangien augmenté atteigne un minimum, il faut nécessairement

que le gradient du problème primal s'annule. En référant aux résultats (1.21) et (2.2), on obtient

$$J'(\underline{\vec{u}}) + r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n(\underline{\vec{u}}) - B_n^\top \underline{\lambda}_n = 0 .$$

Encore une fois, cette équation n'est pas linéaire et une méthode de Newton est nécessaire pour obtenir une approximation de sa solution. Nous fermons une fois de plus les yeux sur la non-dérivabilité de la partie négative de la distance intégrée et nous omettons de dériver la normale extérieure. Partant d'une approximation  $\underline{\vec{u}}$  du problème discrétisé, on cherche une correction  $\delta \underline{\vec{u}}$  telle que  $\underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}$  annule notre somme de gradient. Seul un terme s'ajoute au résidu de l'équation (2.4) et nous obtenons

$$\left( J'' + r_n B_n^\top R_C B_n \right) \delta \underline{\vec{u}} = -r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n + B_n^\top \underline{\lambda}_n \quad (2.6)$$

et en utilisant cette fois (1.16) et (2.3),

$$\left( A' + r_n B_n^\top R_C B_n \right) \cdot \delta \underline{\vec{u}} = F - A - r_n B_n^\top R_C \widehat{g}_n + B_n^\top \underline{\lambda}_n . \quad (2.7)$$

Après avoir calculé  $\delta \underline{\vec{u}}$ , suivant la méthode d'Uzawa, on met à jour  $\underline{\lambda}_n$  par la formule

$$\underline{\lambda}_n \leftarrow R_C \left( \underline{\lambda}_n - \rho_n \widehat{g}_n \right) \quad (2.8)$$

où  $\rho_n > 0$  est bien choisi. Ceci conduit à l'algorithme 2. On retrouve celui-ci notamment dans Wriggers et Zavarise (1993). Dans cet article, la difficulté de choisir  $r_n$  est soulevée et on propose de l'augmenter graduellement de façon à accélérer la convergence. Plus tard dans Zavarise et Wriggers (1999), les mêmes auteurs présentent encore cet algorithme comme étant un algorithme « usuel ».

Dans nos essais numériques, nous avons rapidement constaté qu'il n'est pas toujours possible de fixer une valeur du paramètre  $r_n$ . Prenons l'exemple de la section 2.6.1, où une sphère rigide indente un cube déformable. Si le coefficient  $r_n$  est trop fort, la résolution du système primal n'arrive pas à converger. Si le coefficient  $r_n$  est trop faible, il faut un nombre déraisonnable de correction pour atteindre une bonne précision. Nous avons donc implémenté une méthode semblable à celle proposée dans Wriggers et Zavarise (1993) pour augmenter  $r_n$  à mesure que la méthode converge.

Dans cet article, il est proposé d'augmenter le coefficient dès que le résidu est assez petit. Il nous a paru difficile de définir un tel critère, nous proposons donc une variante basée sur l'observation suivante : si le coefficient  $r_n$  est trop faible, le multiplicateur  $\underline{\lambda}_n$  se fera corriger plusieurs fois de suite dans la même direction. Notre critère portera donc sur l'alignement entre deux corrections successives du multiplicateur. En notant  $\delta \underline{\lambda}_n^p$  la correction précédente,

nous calculons le produit scalaire :

$$\frac{\delta \lambda_n^p}{\|\delta \lambda_n^p\|} \cdot \frac{\delta \lambda_n}{\|\delta \lambda_n\|} .$$

Si cette quantité est près de 1 (disons  $> 0.7$ ), nous augmentons  $r_n$  par un facteur (disons 5). Si au contraire cette quantité est trop petite (disons  $< 0.3$ ), nous diminuons  $r_n$  par le même facteur. Nous ajoutons à cela des bornes minimale et maximale, par exemple  $1 \leq r_n \leq 10^6$ .

Finalement, notons que Fortin et Glowinski (1982) étudie le choix du paramètre  $\rho_n > 0$ . Essentiellement, si  $r_n$  est grand, un bon choix est de prendre  $\rho_n = r_n$ . Lorsque  $r_n$  diminue, le meilleur choix se complique et dépend d'un calcul de valeurs propres. Pour nos calculs, nous avons toujours gardé  $\rho_n = r_n$ .

---

**Algorithme 2** : Algorithme d'Uzawa pour le lagrangien classique du contact sans frottement

---

**Entrée** :  $\vec{u}$  le déplacement au pas de charge précédent.

$\lambda_n$  la pression de contact normal au pas de charge précédent.

**Sortie** :  $(\vec{u}, \lambda_n)$  solution du point-selle.

1 **Exécuter**

2 **Exécuter**

3 | Assemblage des matrices  $A'$ ,  $B_n$  et des résidus  $F - A$ ,  $\widehat{g}_n$ .

4 | Détermination de l'état de contact  $R_C$ .

5 |  $\delta \vec{u} = (A' + r_n B_n^\top R_C B_n)^{-1} (F - A - r_n B_n^\top \cdot R_C \widehat{g}_n + B_n^\top \cdot \lambda_n)$

6 |  $\vec{u} \leftarrow \vec{u} + \delta \vec{u}$

7 | **Répéter tant que** critère en  $\delta \vec{u}$  ;

8 |  $\lambda_n \leftarrow R_C(\lambda_n - \rho_n \widehat{g}_n)$

9 **Répéter tant que** critère en  $\delta \lambda_n$  ;

---

### 2.2.3 Lagrangien mieux incliné aux méthodes de Newton

Dans cette section nous reprenons le travail pour construire le lagrangien augmenté présenté dans Alart et Curnier (1987) puis élaboré dans Pietrzak et Curnier (1999) et Pietrzak (1997). Ce lagrangien est aussi présenté dans Laursen (2002).

Il s'agit à l'origine d'un lagrangien à trois champs (déplacement, multiplicateur, perturbation), mais dans lequel on isole puis élimine le troisième champ. Le lagrangien augmenté ainsi obtenu diffère de celui de la section précédente. Il est notamment mieux dérivable et devrait par conséquent converger plus souvent. Il s'agit en quelque sorte d'un lagrangien augmenté régularisé.

#### Lagrangien à trois champs pour la non-pénétration

Nous suivons les traces de Fortin et Glowinski (1982) chapitre 3 en invoquant la nouvelle inconnue  $q_n \in \mathcal{M}_{\lambda_n}$  représentant une perturbation de la distance  $g_n$ . Nous imposons cette

contrainte faiblement, c'est-à-dire que  $\int_{\Gamma} \eta_n g_n = \int_{\Gamma} \eta_n q_n$  pour tout  $\eta_n \in \mathcal{M}_{\lambda_n}$ . Ceci revient à imposer que la différence entre  $q_n$  et  $g_n$  soit orthogonale à l'espace des multiplicateurs  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$ , ce que nous notons  $q_n - g_n \perp \mathcal{M}_{\lambda_n}$ . Ceci équivaut encore à dire que  $q_n$  est la projection de  $g_n$  sur cet espace discret.

Nous étant préalablement dotés d'une base sur  $\mathcal{M}_{\lambda_n}$ , nous décomposons nos deux inconnues dans cette base, ainsi  $q_n = \sum_j q_{nj} \varphi_j^\lambda$  et  $\eta_n = \sum_j \eta_{nj} \varphi_j^\lambda$ . Nous distinguons les fonctions (continues) de leur vecteur de coordonnées simplement par l'application d'un soulignement,  $\underline{q}_n = (q_{nj})$  et  $\underline{\eta}_n = (\eta_{nj})$ . Nous notons aussi les vecteurs de perturbations ou de multiplicateurs intégrés  $\widehat{q}_n = (\widehat{q}_{ni}) = (\int_{\gamma} q_n \varphi_j^\lambda)$  et  $\widehat{\eta}_n = (\widehat{\eta}_{ni}) = (\int_{\gamma} \eta_n \varphi_j^\lambda)$ . La matrice  $M_{\lambda_n}$ , présentée dans la section 1.9.4, permet facilement le passage d'un vecteur à l'autre par les deux formules  $\widehat{q}_n = M_{\lambda_n} \underline{q}_n$  et  $\widehat{\eta}_n = M_{\lambda_n} \underline{\eta}_n$ .

L'égalité faible imposée entre  $q_n$  et  $g_n$  se réécrit selon nos nouveaux vecteurs en  $\underline{q}_n = \underline{g}_n$  et encore  $\widehat{q}_n = \widehat{g}_n$ . Nous pouvons alors remplacer la contrainte de non-pénétration par une contrainte équivalente sur  $q_n$  :

$$J(\vec{u}) = \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J = \min_{\substack{\widehat{q}_n = \widehat{g}_n \\ \widehat{g}_n \geq 0}} J = \min_{\substack{\widehat{q}_n = \widehat{g}_n \\ \widehat{q}_n \geq 0}} J .$$

C'est sur la contrainte liant  $q_n$  et  $g_n$  que nous appliquons la méthode du lagrangien.

$$J(\vec{u}) = \min_{\substack{\widehat{q}_n = \widehat{g}_n \\ \widehat{q}_n \geq 0}} J = \min_{\substack{\vec{v} \\ \widehat{q}_n \geq 0}} \max_{\eta_n \in \mathcal{M}_{\lambda_n}} \left( J - \int_{\Gamma} \eta_n (g_n - q_n) \right) \quad (2.9)$$

et en substituant les inconnues par leur développement

$$= \min_{\substack{\vec{v} \\ \widehat{q}_n \geq 0}} \max_{\underline{\eta}_n} \underbrace{\left( J(\vec{v}) - \underline{\eta}_n \cdot (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n) \right)}_{L^n(\vec{v}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n)} .$$

Nous sommes ainsi passés d'un problème de minimisation avec une contrainte non convexe, à un problème de point-selle avec une contrainte d'inégalité linéaire. Ce faisant, nous avons accru le nombre d'inconnues et avons alourdi la forme à optimiser. La version discrétisée de notre problème comporte maintenant les trois inconnues,  $\vec{v}$ ,  $\widehat{q}_n$  et  $\underline{\eta}_n$ . Nous appellerons par la suite  $L^n(\vec{v}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n)$  le lagrangien à trois champs pour la non-pénétration.

### Augmentation

Afin d'accroître la vitesse de convergence de l'algorithme d'Uzawa que nous prévoyons appliquer, nous désirons augmenter le lagrangien  $L^n(\vec{v}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n)$ . Nous choisissons pour cela un nombre réel  $r_n > 0$ . Ce coefficient n'a pas besoin d'être choisi très grand comme en pénalisation. En effet, à convergence nous obtiendrons une solution non pénalisée. Il faut tout de même le choisir précautionneusement. Une trop grande valeur dégradera le conditionnement

du système primal. Une trop petite valeur dégradera le conditionnement du système dual. À titre indicatif, on peut choisir  $r_n = 10$ .

Nous nommons  $L_a^n(\underline{\vec{v}}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n)$  le lagrangien augmenté pour la non-pénétration que nous définissons ainsi :

$$L_a^n(\underline{\vec{v}}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n) = J(\underline{\vec{v}}) - \underline{\eta}_n \cdot (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n) + \frac{r_n}{2} (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n)^2 .$$

Nous obtenons le problème de point-selle équivalent :

$$\begin{aligned} J(u_h) &= \min_{\substack{\underline{\vec{v}} \\ \widehat{q}_n \geq 0}} \max_{\underline{\eta}_n} \left( J(\underline{\vec{v}}) - \underline{\eta}_n \cdot (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n) + r_n \frac{1}{2} (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n)^2 \right) \\ &= \min_{\substack{\underline{\vec{v}} \\ \widehat{q}_n \geq 0}} \max_{\underline{\eta}_n} L_a^n(\underline{\vec{v}}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

### Élimination du troisième champ

Considérons les conditions d'optimalité nécessaires à l'obtention d'un point-selle de notre lagrangien augmenté à trois champs, particulièrement son gradient par rapport à  $q_n$ . Si  $\widehat{q}_{ni} > 0$ , étant à l'intérieur de son domaine, il faut que  $\partial_{\widehat{q}_{ni}} L_a^n = 0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \eta_{ni} - r_n (\widehat{g}_{ni} - \widehat{q}_{ni}) &= 0 \\ \widehat{q}_{ni} &= -\frac{1}{r_n} \eta_{ni} + \widehat{g}_{ni} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si nous ne sommes pas à l'intérieur du domaine, nous sommes sur le bord et dans ce cas  $\widehat{q}_{ni} = 0$ . Ceci nous conduit à définir autrement l'état de contact. Plutôt que de se fier uniquement au *gap*, nous considérons un nœud  $i$  en contact lorsque  $-\frac{1}{r_n} \eta_{ni} + \widehat{g}_{ni} \leq 0$  et nous redéfinissons en conséquence les matrices de restriction au contact  $R_C$  et son complément  $R_{SC} = \mathbf{I} - R_C$ . Nous pouvons maintenant écrire sous forme vectorielle :

$$\widehat{q}_n = R_{SC} \left( -\frac{1}{r_n} \underline{\eta}_n + \widehat{g}_n \right)$$

La notation matricielle que nous utilisons pour l'opérateur de restriction est très pratique pour la mise en œuvre des algorithmes. Dans la littérature, plusieurs autres notations sont employées au lieu de notre  $R_C$ . On peut ainsi l'écrire sous forme d'une projection  $L^2$ , d'un crochet de Macauley  $\langle \cdot \rangle$  comme dans Simo et Laursen (1992), d'un minimum  $\min(0, \cdot)$  ou d'une partie négative de vecteur  $(\cdot)^-$ .

En substituant<sup>1</sup> cette valeur de  $\widehat{q}_n$  dans le lagrangien, nous obtenons un lagrangien à deux

---

1. Il s'agit ici de notre première application du principe de Courant et Hilbert (1953) pour la transformation des problèmes variationnels. Celui-ci stipule (mais en anglais dans la traduction de 1953) que : Si une fonction  $F(x)$ , sujette à certaines conditions auxiliaires, admet un point stationnaire au point  $\xi$  et si la valeur  $\xi$  satisfait la relation  $r(\xi) = 0$ , alors  $F(\xi) = 0$  est ajoutée aux conditions auxiliaires.

champs (déplacement et multiplicateur) :

$$\begin{aligned}
L_a^n(\underline{\vec{v}}, \widehat{q}_n, \underline{\eta}_n) &= J(\underline{\vec{v}}) - \underline{\eta}_n \cdot (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n) + r_n \frac{1}{2} (\widehat{g}_n - \widehat{q}_n)^2 \\
&= J(\underline{\vec{v}}) - \underline{\eta}_n \cdot \left( \widehat{g}_n - R_{SC} \left( -\frac{1}{r_n} \underline{\eta}_n + \widehat{g}_n \right) \right) \\
&\quad + r_n \frac{1}{2} \left( \widehat{g}_n - R_{SC} \left( -\frac{1}{r_n} \underline{\eta}_n + \widehat{g}_n \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

et après simplification,

$$= J(\underline{\vec{v}}) - \underbrace{\frac{1}{2r_n} \underline{\eta}_n^2 + \frac{1}{2r_n} \left( R_C(\underline{\eta}_n - r_n \widehat{g}_n) \right)^2}_{L_a^n(\underline{\vec{v}}, \underline{\eta}_n)} . \tag{2.13}$$

Ce lagrangien augmenté  $L_a^n$  correspond à la formule (28) de Alart et Curnier (1991) et c'est sur celui-ci que nous appliquons la méthode d'Uzawa. L'expression  $\underline{\eta}_n^a = \underline{\eta}_n - r_n \widehat{g}_n$  est parfois nommée le multiplicateur augmenté (Renard (2013)).

### Conditions d'optimalité

Afin d'appliquer nos méthodes itératives préférées sur le lagrangien augmenté (2.13), nous en explicitons les conditions d'optimalité. Pour que le couple  $(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n)$  soit point-selle du lagrangien (2.13), il faut d'abord que

$$J'(\underline{\vec{u}}) + \nabla_{\underline{\vec{v}}} L_a^n(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n) = 0 .$$

Or,

$$\nabla_{\underline{\vec{v}}} L_a^n(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n) = -B_n^\top \cdot R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) \tag{2.14}$$

d'où

$$J'(\underline{\vec{u}}) - B_n^\top \cdot R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) = 0 . \tag{2.15}$$

Il faut aussi que le gradient par rapport à la variable duale s'annule :

$$\nabla_{\underline{\eta}_n} L_a^n(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n) = 0$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{r_n} \underline{\lambda}_n + \frac{1}{r_n} R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) = 0 . \tag{2.16}$$

Cette dernière égalité correspond aux relations de Kuhn-Tucker. En effet, la condition

$$\underline{\lambda}_n = R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n)$$

implique les conditions

$$\forall i \begin{cases} \lambda_{ni} & \geq 0 \\ \lambda_{ni} \widehat{g}_{ni} & = 0 \\ \widehat{g}_{ni} & \geq 0 \end{cases}$$

En référant encore à (1.21) et (2.2), le système à résoudre est :

$$\begin{cases} A - B_n^\top \cdot R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) & = F \\ \underline{\lambda}_n & = R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) \end{cases}$$

### Méthode d'Uzawa

Afin d'appliquer une méthode de Newton qui annule le gradient (2.14), nous supposons que  $\underline{u}$  soit, pour  $\underline{\lambda}_n$  donné, une approximation de la solution et nous recherchons  $\underline{\delta u}$  la correction à apporter telle que

$$\begin{aligned} J'(\underline{u} + \underline{\delta u}) + \nabla_{\underline{v}} L_a^n(\underline{u} + \underline{\delta u}, \underline{\lambda}_n) &= 0 \\ J'(\underline{u}) + J'' \cdot \underline{\delta u} + \nabla_{\underline{v}} L_a^n(\underline{u}, \underline{\lambda}_n) + \nabla_{\underline{v}\underline{v}} L_a^n(\underline{u}, \underline{\lambda}_n) \cdot \underline{\delta u} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous calculons à partir de 2.14 :

$$\nabla_{\underline{v}\underline{v}} L_a^n(\underline{u}, \underline{\lambda}_n) = J''(\underline{\lambda}_n) + B_n^\top \cdot R_C r_n B_n \cdot \underline{\delta u} \quad (2.18)$$

On remplace maintenant (1.16), (1.17), (2.14) et (2.18) dans (2.17) :

$$A - F + J''(\underline{\lambda}_n) \cdot \underline{\delta u} - B_n^\top \cdot R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) + r_n B_n^\top \cdot R_C B_n \cdot \underline{\delta u} = 0$$

puis on isole

$$(A' + r_n B_n^\top R_C B_n) \cdot \underline{\delta u} = F - A + B_n^\top \cdot R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) \quad . \quad (2.19)$$

Comme pour le terme de pénalisation de la section 2.1, ce lagrangien est une fois dérivable mais pas partout deux fois. Nous appliquons encore une fois une méthode de Newton sur une fonctionnelle non différentiable et ceci va nuire à la convergence. Ce qu'il y a de différent cette fois, c'est que la variété sur laquelle la fonctionnelle n'est pas différentiable ne passe pas par notre solution. En effet, notre lagrangien augmenté régularisé est non deux fois différentiable lorsque  $\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n = 0$ , or ceci n'arrive pour aucun  $i$  dès qu'on est assez près de la solution. Après avoir calculé  $\underline{\delta u}$  pour  $\underline{\lambda}_n$  fixé, on met à jour ce multiplicateur selon la méthode usuelle :

$$\underline{\lambda}_n = R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) \quad .$$

On obtient finalement l'algorithme 3. La différence entre ce nouvel algorithme et l'algorithme 2 précédent est très subtile et ne semble pas justifier tant de travail. Cependant, les techniques présentées dans cette section serviront de nouveau dans le cas du problème frottant.



---

**Algorithme 3** : Algorithme d’Uzawa pour le lagrangien augmenté régularisé du contact sans frottement

---

**Entrée** :  $\underline{\vec{u}}$  le déplacement au pas précédent.  
 $\underline{\lambda}_n$  la pression de contact normal au pas précédent.

**Sortie** :  $(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n)$  solution du point-selle.

1 **Exécuter**

2     **Exécuter**

3         Assemblage des matrices  $A'$ ,  $B_n$  et des résidus  $F - A$ ,  $\widehat{g}_n$ .

4         Détermination de l’état de contact  $R_C$ .

5          $\underline{\delta\vec{u}} = (A' + r_n B_n^\top R_C B_n)^{-1} (F - A + B_n^\top \cdot R_C (\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n))$

6          $\underline{\vec{u}} \leftarrow \underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}$

7         **Répéter tant que** critère en  $\underline{\delta\vec{u}}$  ;

8          $\underline{\lambda}_n \leftarrow R_C \cdot (\underline{\lambda}_n - \rho_n \widehat{g}_n)$

9 **Répéter tant que** critère en  $(\underline{\delta\vec{u}}, \underline{\delta\lambda}_n)$  ;

---

## 2.2.4 Stratégie de contraintes actives

Cet algorithme consiste à résoudre itérativement le problème linéarisé à contraintes fixées. Il se situe dans la catégorie des méthodes avec contraintes actives (*active set strategy*). Nous référons à ce sujet Hintermüller *et al.* (2002), Luenberger et Ye (2008), Hübner *et al.* (2008) et Ito et Kunisch (2008). Il est aussi pertinent de se référer à la littérature portant sur la programmation quadratique séquentielle (*SQP sequential quadratic programming*) puisqu’il s’agit essentiellement d’une généralisation de celle-ci.

Nous partons d’une approximation de la solution  $(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n)$  pour laquelle nous déterminons un état de contact. On peut faire cela comme dans la section (2.2.3) ou choisir une autre méthode. Avec les essais, nous avons fini par retenir la méthode suivante :

- Un nœud est considéré comme inactif lorsqu’il n’est pas interpénétré,  $\widehat{g}_{ni} \geq 0$ , et qu’il n’y a pas de force de contact appliquée sur celui-ci,  $\lambda_{ni} \leq 0$ .
- Il est considéré comme actif dans les autres cas.

Il s’agit donc de tenir compte de la distance au bord, mais aussi des forces de contact. Le fait de considérer  $\lambda_{ni} > 0$  pour définir le contact a essentiellement pour effet d’arrêter les oscillations dues au changement d’état de contact. Peu importe la méthode choisie, nous définissons la matrice  $R_C$  en conséquence.

Nous cherchons à corriger notre approximation, autant en déplacement qu’en force de contact, en cherchant  $(\underline{\delta\vec{u}}, \underline{\delta\lambda}_n)$  tel que :

$$\begin{cases} A(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}) - B_n^\top (\underline{\lambda}_n + \underline{\delta\lambda}_n) & = F \\ R_C \widehat{g}_n(\underline{\vec{u}} + \underline{\delta\vec{u}}) & = 0 \\ R_{SC}(\underline{\lambda}_n + \underline{\delta\lambda}_n) & = 0 \end{cases} .$$

Cette approche est présentée notamment dans Zavarise et Wriggers (1999) qui l'attribuent eux-mêmes à Bertsekas (1988) et Luenberger (1984). Nous linéarisons ensuite ce système

$$\begin{cases} A'\delta\vec{u} - B_n^\top \delta\lambda_n = F - A(\vec{u}) + B_n^\top \lambda_n \\ R_C(\widehat{g}_n + B_n\delta\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

et nous le réécrivons sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} A' & -B_n^\top \\ R_C B_n & R_{SC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\vec{u} \\ \delta\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - A + B_n^\top \lambda_n \\ -R_C \widehat{g}_n \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Ce système linéaire est identique (à la notation et au signe de  $\lambda_n$  près) au système (20) de l'article Zavarise et Wriggers (1999). Toutes les méthodes de résolution de systèmes linéaires peuvent alors être lancées pour résoudre ce système, nous en comparerons quelques-unes.

### Uzawa avec correction de lambda dans la boucle centrale

Nous augmentons d'abord le système (2.20), en additionnant à la première équation  $r_n B_n^\top$  fois la seconde équation, pour obtenir le système équivalent :

$$\left( \begin{array}{c|c} A' - r_n B_n^\top R_C B_n & -B_n^\top \\ \hline R_C B_n & R_{SC} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta\vec{u} \\ \delta\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - A + B_n^\top (\lambda_n - r_n R_C \widehat{g}_n) \\ -R_C \widehat{g}_n \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Ensuite, dans une boucle de point fixe, nous résolvons ce problème linéarisé à l'aide d'une méthode de type Uzawa tel qu'explicité dans l'algorithme 4. Bien que présentant plusieurs différences dans le choix de la discrétisation et de la linéarisation, cet algorithme correspond à celui présenté dans Hüeber *et al.* (2008).

## 2.3 Résidu conjugué généralisé

Dans cette section nous développons des algorithmes itératifs basés sur la méthode du résidu conjugué généralisé (en anglais *generalized conjugate residual*, GCR), présentée par Eisenstat *et al.* (1983), afin de résoudre le problème non augmenté 2.20. Tel quel, cet algorithme ne converge pas très bien, même pour des problèmes de petite taille (100 nœuds). Il est nécessaire d'appliquer un préconditionneur approprié. Pour une présentation générale sur le préconditionnement et son application aux méthodes itératives qui nous intéressent, nous référons le lecteur à la thèse El maliki (2007), dont nous présentons ici l'algorithme 1.8 appliqué à notre problème.

Typiquement, on se donne une méthode de prédiction de la correction, que nous notons  $\mathcal{P}^{-1}$  et nommons le préconditionneur, qui sera accélérée par le GCR. Cette méthode peut se limiter à multiplier par l'inverse d'une matrice  $\mathcal{P}$  qui approxime le problème linéaire à résoudre. Il peut aussi s'agir d'une méthode itérative de résolution avec critère d'arrêt ou de

---

**Algorithme 4** : Algorithme d’Uzawa avec  $\underline{\lambda}_n$  au centre pour le problème sans frottement

---

**Entrée** :  $\underline{\vec{u}}$  le déplacement au pas de charge précédent.  
 $\underline{\lambda}_n$  la pression de contact normal au pas de charge précédent.  
**Sortie** :  $(\underline{\vec{u}}, \underline{\lambda}_n)$  solution du point-selle.

```

1 Exécuter
2    $\underline{\lambda}_n^{\text{prec}} \leftarrow \underline{\lambda}_n$ 
3   Assemblage des matrices  $A'$ ,  $B_n$  et des résidus  $F - A$ ,  $\widehat{g}_n$ .
4   Détermination de l'état de contact  $R_C$ .
5    $\underline{\lambda}_n = R_C \underline{\lambda}_n$ 
6    $M = A' + r_n B_n^\top R_C B_n$ 
7    $R = F - A + B_n^\top \cdot R_C (\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n)$ 
8   Exécuter
9      $\delta \underline{\vec{u}} = M^{-1} R$ 
10     $\delta \underline{\lambda}_n \leftarrow -\rho_n R_C (\widehat{g}_n + B_n \cdot \delta \underline{\vec{u}})$ 
11     $\underline{\lambda}_n \leftarrow \underline{\lambda}_n + \delta \underline{\lambda}_n$ 
12     $R \leftarrow R + B_n^\top \cdot \delta \underline{\lambda}_n$ 
13  Répéter tant que critère en  $\delta \underline{\lambda}_n$  ;
14   $\underline{\vec{u}} \leftarrow \underline{\vec{u}} + \delta \underline{\vec{u}}$ 
15 Répéter tant que critère en  $(\delta \underline{\vec{u}}, \|\underline{\lambda}_n^{\text{prec}} - \underline{\lambda}_n\|, \|R\|)$  ;
```

---

toute autre méthode non linéaire. À chaque itération, le GCR cherche à minimiser le résidu en cherchant la correction optimale parmi un sous-espace de Krylov. De façon générique, le GCR préconditionné prend la forme de l’algorithme 5.

Il existe d’autres méthodes itératives pouvant être employées à la place du GCR. Nous avons choisi celui-ci parce qu’il supporte la non-symétrie et différents types de préconditionneurs. Plusieurs auteurs préfèrent la méthode *generalized minimal residual method* (GMRES), développée par Saad et Schultz (1986). Cette dernière a l’avantage de nécessiter deux fois moins d’espace mémoire pour la construction de son espace de Krylov. Cependant, elle ne supporte pas les préconditionneurs variables, il faut pour cela employer la méthode *flexible generalized minimal residual method* FGMRES qui perd l’avantage d’économiser la mémoire.

En ce qui concerne le principal préconditionneur de ce chapitre (équation 2.37), on peut utiliser indifféremment un GMRES au lieu du GCR. Nous nous distinguons sur ce point de la méthode présentée dans l’article de El maliki *et al.* (2013). En effet, dans cet article, l’algorithme de GCR avait besoin d’être modifié, il était donc intéressant de choisir celui le plus simple possible.

### 2.3.1 Factorisation avec complément de Schur

Pour construire notre préconditionneur, nous commençons par factoriser l’inverse de la matrice du système (2.20) comme dans la section (4.5) de PETSc (Balay *et al.* (2011)). Détaillons

---

**Algorithme 5** : Algorithme de GCR préconditionné

---

**Entrée** :  $A$  un opérateur linéaire.  
 $r$  le résidu initial.  
 $\mathcal{P}^{-1}$  une méthode servant de préconditionneur

**Sortie** :  $x$  solution du système  $Ax = r_0$ .

1  $k = 0$  et  $x = 0$

2 **Exécuter**

3  $u = \mathcal{P}^{-1}r$

4  $d_k = u - \sum_{0 \leq j < k} \frac{(Au \cdot Ad_j)}{\|Ad_j\|_2^2} d_j$

5  $\alpha = \frac{r \cdot Ad_k}{\|Ad_k\|_2^2}$

6  $x \leftarrow x + \alpha d_k$

7  $r \leftarrow r - \alpha Ad_k$

8 incrémenter  $k$

9 **Répéter tant que** critère en  $r$  ;

---

d'abord comment obtenir cette factorisation, comme cela a été fait dans Zavarise et Wriggers (1999) à la page 8. Nous souhaitons résoudre le système (2.20) :

$$\begin{pmatrix} A' & -B_n^\top \\ R_C B_n & R_{SC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{u} \\ \delta \underline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\underline{u}} \\ r_{\underline{\lambda}_n} \end{pmatrix}.$$

Soustrayons  $R_C B_n A'^{-1}$  fois la première ligne à la deuxième :

$$\begin{pmatrix} A' & -B_n^\top \\ 0 & R_{SC} + R_C B_n A'^{-1} B_n^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{u} \\ \delta \underline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\underline{u}} \\ r_{\underline{\lambda}_n} \end{pmatrix}.$$

Notons  $\mathcal{S} = R_{SC} + R_C B_n A'^{-1} B_n^\top$ , le complément de Schur<sup>2</sup>, puis multiplions la deuxième ligne par  $\mathcal{S}^{-1}$  :

$$\begin{pmatrix} A' & -B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{u} \\ \delta \underline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\underline{u}} \\ r_{\underline{\lambda}_n} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Additionnons à la première ligne  $B_n^\top$  fois la seconde ligne :

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{u} \\ \delta \underline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\underline{u}} \\ r_{\underline{\lambda}_n} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Finalement multiplions la première ligne par  $A'^{-1}$  pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} \delta \underline{u} \\ \delta \underline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\underline{u}} \\ r_{\underline{\lambda}_n} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

---

2. Certains auteurs, tels que Elman *et al.* (2006) et El maliki *et al.* (2010), définissent le complément de Schur avec un signe de différence.

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}^{-1} = \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Nous obtenons un préconditionneur de  $\mathcal{F}$  en approximant différents morceaux de cette factorisation. Lors de nos essais numériques, nous avons d'abord approximé l'inverse de  $A'$  par le même solveur direct que celui utilisé pour la méthode d'Uzawa. Dans un second temps, nous avons employé une méthode itérative basée sur El maliki *et al.* (2010).

La matrice  $S$  apparaissant dans cette factorisation ne peut pas être calculée, à moins que la dimension de  $\lambda_n$  soit aussi petite que le nombre d'itérations qu'on souhaite accomplir. Il faut donc oublier d'en faire une factorisation  $LU$ . Dans Zavarise et Wriggers (1999), en parlant des égalités en  $\delta\vec{u}$  et  $\delta\lambda_n$  de (2.24), il est dit « *It is evident that both (23) and (24) require the computation of  $(\nabla^2 L)^{-1}$ , which is computationally expensive, [...]* », nous montrons ici que cela n'est pas nécessaire. En effet, sans calculer l'inverse de  $A'$ , nous pouvons calculer son action sur un vecteur, ou une approximation de cette action, et s'en servir dans une méthode itérative.

Pour inverser le complément de Schur à l'aide d'une méthode itérative (résoudre le système en fait), nous avons besoin encore une fois d'un préconditionneur. Nous adaptons pour ce faire  $M_{\lambda_n}$ , la matrice masse des multiplicateurs, et approximons le complément de Schur par  $\tilde{S} = R_{SC} + R_C M_{\lambda_n}$ . Potentiellement, afin d'éviter de construire explicitement la matrice  $\tilde{S}$ , nous l'inversons sous la forme :

$$\tilde{S}^{-1} \approx R_{SC} + R_C M_{\lambda_n}^{-1}. \quad (2.26)$$

Nous pouvons alors factoriser  $M_{\lambda_n}$  une fois pour toutes indépendamment des changements d'état de contact. Nous pouvons aussi choisir de calculer explicitement  $\tilde{S}$  et d'utiliser une autre méthode itérative pour appliquer son inverse, la matrice  $M_{\lambda_n}$  étant réputée bien conditionnée.

L'idée d'utiliser la matrice masse comme préconditionneur nous vient de la mécanique des fluides. Dans (Brezzi et Fortin (1991)), il est démontré que la matrice masse est spectralement équivalente (D'yakonov (1966)) au complément de Schur dans le cas des équations de Stokes. Ce préconditionneur  $\tilde{S}$  du complément de Schur  $S$  n'est pas le seul possible. Notons entre autres le préconditionneur par commutateur aux moindres carrés (*Least Squares Commutator, LSC*) de Elman *et al.* (2006).

Nous obtenons l'algorithme suivant :

$$\begin{pmatrix} \delta\vec{u} \\ \delta\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & GCR(S, \tilde{S}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\vec{u}} \\ r_{\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Dans cette formule, nous avons repris une notation très pratique employée dans la documentation de PETSc (Balay *et al.* (2011)). L'expression  $GCR(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}})$ , signifie que nous appliquons la méthode du GCR pour résoudre le système défini par  $\mathcal{S}^{-1}$  en employant  $\tilde{\mathcal{S}}^{-1}$  comme préconditionneur. Notre espace de Krylov est donc défini sur l'espace dual des multiplicateurs, qui est de dimension beaucoup moins élevée que l'espace primal.

## 2.4 Méthodes itératives pour le problème mixte sans frottement

### 2.4.1 Préconditionneur hiérarchique

Nous présentons ici brièvement un préconditionneur hiérarchique basé sur celui de El maliki *et al.* (2010). Pour construire ce préconditionneur, il faut d'abord remplacer la base usuelle de l'espace des fonctions  $P_2$  par une base hiérarchique telle que présentée dans l'article de Yserentant (1986). Celle-ci nous permet de séparer l'inconnue  $\underline{u} = \underline{u}_l + \underline{u}_q$  en une somme d'une partie linéaire et d'une correction quadratique. La partie linéaire  $\underline{u}_l$  est maintenant de type  $P_1$  et elle sera résolue isolément. Il est ainsi possible de séparer la matrice  $A'$  :

$$\begin{pmatrix} A'_{ll} & A'_{lq} \\ A'_{ql} & A'_{qq} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Comme dans l'équation 2.25, nous commençons par factoriser l'inverse de  $A'$  :

$$A'^{-1} = \begin{pmatrix} A'_{ll}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -A'_{lq} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -A'_{ql}A'_{ll}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

où nous avons noté  $\mathcal{S}_q^{-1} = A'_{qq} - A'_{ql}A'_{ll}^{-1}A'_{lq}$ . Nous obtenons un préconditionneur en approximant les différents facteurs de cette expression. Pour ce faire, nous avons testé beaucoup de variantes, mais nous ne présenterons que celle qui nous a parue la plus efficace.

Nous nous permettons d'abord d'appliquer une factorisation  $LU$  sur la partie linéaire. Pour pousser plus loin la taille de nos maillages, il faudra bien sûr appliquer une méthode itérative sur cette partie aussi. Nous verrons cependant que nous pouvons déjà aller beaucoup plus loin que si nous appliquions la factorisation  $LU$  au système complet. L'inverse du complément de Schur est approximé en remplaçant le complément de Schur par la matrice  $A'_{qq}$  et en appliquant seulement une itération de  $SSOR$  (*symmetric successive over-relaxation*). Puisque nous avons simplement laissé tombé le terme  $A'_{ql}A'_{ll}^{-1}A'_{lq}$ , ceci équivaut essentiellement à négliger les interactions entre les parties linéaire et quadratique. Nous omettons finalement les deux termes de gauche pour obtenir le préconditionneur hiérarchique  $\mathcal{HP}(A')$  défini par :

$$\mathcal{HP}(A') = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & SSOR(A'_{qq}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -A'_{ql}A'_{ll}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

En comparaison, le préconditionneur présenté dans El maliki *et al.* (2010) applique plutôt le *SSOR* sur la matrice  $A'$  entière plutôt que seulement sur la partie en correction quadratique et il en fait plusieurs itérations.

## 2.4.2 Préconditionneur mixte déplacement-pression

Nous nous intéressons dans cette section aux matériaux quasi incompressibles et en particulier au modèle Mooney-Rivlin présenté à la section 1.1.9. Nous définissons l'espace discret  $\mathcal{M}^p$  contenant des fonctions de type  $P_1$  définies sur le volume ayant pour fonctions de base les  $(\varphi_i^p)$ . Cette discrétisation, effectuée notamment dans El maliki *et al.* (2010), fait intervenir les matrices  $B_p$  et  $M_p$  définies par

$$B_p = \left( \int_{\Omega} -\varphi_i^p J \mathbf{F}^{-\top} : \vec{\varphi}_{j,\alpha}^u \right) \quad (2.31)$$

et

$$M_p = \left( \int_{\Omega} \varphi_i^p \varphi_j^p \right) \quad (2.32)$$

et mène à la résolution d'un système de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A' & B_p^\top \\ B_p & -\frac{1}{\kappa} M_p \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Bien entendu, il est possible de résoudre ce système à l'aide d'une factorisation  $LU$  et bien qu'il ne soit pas défini positif, nous appliquons tout de même une factorisation de Cholesky (1910), ce qui est rendu possible grâce aux travaux de Duff et S. (2005). Comme nous cherchons à accélérer la résolution par des méthodes itératives, nous préférons à la place de la factorisation  $LU$  une factorisation par complément de Schur :

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -B_p^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_p^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -B_p A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

avec  $\mathcal{S}_p = -\frac{1}{\kappa} M_p - B_p A'^{-1} B_p^\top$  le complément de Schur. Pour préconditionner ce système, nous omettons d'abord le dernier terme de droite. Nous approximons ensuite l'inverse du complément de Schur en appliquant une seule itération de *SSOR* à la matrice masse en pression  $M_p$ . Nous remplaçons ensuite dans le terme de gauche l'inverse de la matrice  $A'$  par une application du préconditionneur hiérarchique présenté à la section précédente (2.4.1). On résume ce préconditionneur noté  $\mathcal{MHP}(\mathcal{A})$  par :

$$\mathcal{MHP}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{HP}(A') & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -B_p^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{SSOR}(M_p) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Cette méthode se compare à celle employé dans le livre de Elman *et al.* (2005) pour les problèmes d'écoulements fluides incompressibles modélisés par les équations de Navier-Stokes.

### 2.4.3 Solveur itératif du contact sans frottement

Nous reprenons maintenant le système (2.22) en partant de sa factorisation (2.25) :

$$\mathcal{F}^{-1} = \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Pour construire un préconditionneur à partir de cette factorisation, nous utilisons le préconditionneur hiérarchique ( $\mathcal{HP}(A')$ ) ou le préconditionneur mixte hiérarchique ( $\mathcal{MHP}(\mathcal{A})$ ) de la section précédente dans le cas d'une formulation mixte. Pour ce qui est du système dual défini par  $\mathcal{S}^{-1}$ , nous le préconditionnons à l'aide de la matrice  $\tilde{\mathcal{S}}$  définie en (2.26) qui est une adaptation de la matrice masse. Comme nous l'avons fait pour la pression, nous nous contentons d'appliquer une seule itération de  $SSOR$  pour approximer la solution du système défini par la matrice masse  $M_{\lambda_n}$ .

Nous gardons cette fois la factorisation complète pour obtenir le préconditionneur  $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{HP}(A') & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & R_{SC} - R_C SSOR(M_{\lambda_n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n \mathcal{HP}(A') & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

et dans le cas d'une formulation mixte :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{MHP}(\mathcal{A}) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B_n^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & (R_{SC} - R_C SSOR(M_{\lambda_n})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -R_C B_n \mathcal{MHP}(\mathcal{A}) & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Notre algorithme final consiste à utiliser une méthode de Krylov (le GCR ou le GMRES par exemple) pour résoudre le système défini en (2.20), en appliquant l'opérateur linéaire (2.36) ou (2.37) comme préconditionneur. Dans ce cas-ci, l'espace de Krylov est dimensionné comme le système global  $(\vec{u}, \lambda_n)$ .

## 2.5 Résultats numériques en élasticité linéaire

Les résultats numériques que nous présentons ici ne sont certes pas exhaustifs. Ils visent à estimer de façon empirique la pertinence des méthodes itératives développées dans cette thèse en les plaçant en compétition face à des méthodes plus simples. Nous mesurons ici des temps de calcul observés. Bien qu'une meilleure implémentation de l'une ou l'autre de ces méthodes soit toujours possible, nos conclusions porteront essentiellement sur leur comportement lorsque la taille du système augmente.

Les méthodes que nous mesurons sont les suivantes :

1. (PénalLU) Le système pénalisé 2.4 est résolu par l'algorithme 1 à l'aide d'une méthode directe.



2. (Uzawa) Le lagrangien augmenté de la section 2.2.1 est résolu par une méthode d’Uzawa. L’équation primale 2.7 est résolue par une méthode directe.
3. (UzawaReg) Le lagrangien augmenté (régularisé à la Alart-Curnier) de la section 2.2.3 est résolu par la méthode d’Uzawa de l’algorithme 3. L’équation primale 2.19 est résolue par une méthode directe.
4. (UzawaVar) La même méthode d’Uzawa que (UzawaReg), mais en utilisant le coefficient de pénalisation variable, qui augmente en cours de résolution comme expliquer à la section 2.2.2.
5. (UzawaSCA) Le lagrangien augmenté (régularisé à la Alart-Curnier) est résolu par la stratégie de contraintes actives de l’algorithme 4. L’équation primale du système 2.21 est résolue par une méthode directe. Un coefficient de pénalisation  $r_n = 10^6$  est utilisé.
6. (SchurLU) Un lagrangien non augmenté. Le système 2.20 est résolu en appliquant la factorisation par complément de Schur (algorithme 2.27). Le système primal, constitué seulement de la matrice de rigidité, est résolu par une méthode directe. Le système dual, défini par le complément de Schur, est résolu en appliquant un GCR préconditionné par la formule 2.26.
7. (SchurHP) Le même lagrangien non augmenté. Cette fois le GCR est appliqué sur le système couplé  $(\vec{u}, \vec{\lambda})$  et préconditionné par la factorisation (2.36) utilisant le préconditionneur hiérarchique.
8. (LagLU) Toujours un lagrangien (système 2.20), mais cette fois on résout le système global 2.20 en appliquant une factorisation  $LU$  au système global en  $(\vec{u}, \vec{\lambda})$ .

Le logiciel employé pour ces calculs est celui du GIREF, étant lui-même fortement basé sur la librairie PETSc (Balay *et al.* (2011)). Les factorisations LU sont effectuées par la librairie MUMPS en version 4.10, qui utilise elle-même la librairie METIS 5.0.2 pour réordonner les lignes de la matrice. Lorsque c’est possible, les factorisations LU sont accomplies par la méthode de Cholesky (1910). Notez qu’il aurait été facile de transformer le système 2.20 pour qu’il devienne symétrique, ce qui aurait permis d’accélérer significativement la méthode (LagLU). Ceci n’aurait par contre pas changé son comportement lorsque la taille du maillage augmente. Les solveurs itératifs sont eux configurés pour réduire la norme du résidu par un facteur  $10^2$ , ce qui est une résolution assez grossière.

Nous comparons deux temps de calcul différents : le temps total et le temps de résolution du système linéaire. Le premier, titré « temps total » dans les tableaux, est simplement le temps écoulé du début à la fin du calcul. Cela comprend donc la partie du calcul préalable à la résolution : lecture et écriture des fichiers, assemblage, détermination du contact. Cette partie est considérée comme relativement indépendante de la méthode, mais augmentera proportionnellement au nombre d’itérations de Newton. Le second temps calculé, titré « temps de résolution » dans les tableaux, ne comprend que le temps passé dans le solveur pour la résolution du système linéaire et il s’agit d’une moyenne par itération.

Nous utilisons un champ de déplacement  $\vec{u}$  continu de degré 2 par éléments ( $P_2$ ). Pour ce qui est du multiplicateur, nous avons choisi une interpolation linéaire par morceaux ayant autant de degrés de liberté que le déplacement sur le bord ( $P_1$ iso $P_2$ ). Nous présentons d’abord les résultats obtenus pour un matériau d’élasticité linéaire (voir section 1.1.7) ayant comme coefficient de Poisson 0,3 et comme module d’Young 1,0. Nous avons utilisé plusieurs critères de convergence en conjonction :

- les normes  $l^2$  et infinie du résidu en déplacement (et de la pression en mixte) ;
- la norme infinie de la correction en déplacement (et de la pression en mixte) ;
- la norme  $l^2$  de l’interpénétration sur la zone sans contact ;
- la norme  $l^2$  du *gap* intégré (autant positif que négatif) sur la zone en contact ;
- la norme  $l^2$  du multiplicateur sur la zone sans contact ;
- la norme  $l^2$  de la partie négative du multiplicateur sur la zone en contact ;
- la norme  $l^2$  de la correction du multiplicateur ;
- le nombre de changements d’état de contact.

Il s’agit donc d’imposer que le résidu du système linéaire global soit assez petit en plus d’imposer la petitesse des corrections. Nous exigeons  $10^{-3}$  ou moins comme valeur pour chacun des critères portant sur les résidus, et  $10^{-2}$  pour les corrections. De plus, nous exigeons que l’état de contact reste inchangé. Pour le cas particulier de la pénalisation sans multiplicateur, les critères portant sur l’interpénétration et le multiplicateur sont inopérants.

Les valeurs choisies pour les critères de convergence peuvent paraître assez grande. Elles ont été choisies ainsi pour ne pas allonger inutilement les temps de calculs et correspondent environ à ce que l’oeil perçoit. Nous tenons à dire que les méthodes itératives présentés dans cette thèse peuvent sans problème converger beaucoup plus précisément. Par contre, certaines méthodes auxquelles nous nous comparons, notamment les méthodes d’Uzawa lorsque le coefficient est fixé à une valeur trop petite, converge très lentement et prendrait un nombre exagéré d’itération pour atteindre des précisions de l’ordre de  $10^{-5}$ .

### 2.5.1 Un cube déformable indenté par une sphère rigide

Notre cube de largeur 10 est situé dans le premier octant avec un coin à l’origine. Il est fixé sur toute sa face supérieure par une condition de Dirichlet homogène. La sphère rigide est de rayon 10 et son centre se trouve aux coordonnées  $(4, 4, -9)$ , de sorte que le cube doive se déformer pour ne pas occuper le même espace. La sphère n’est pas maillée, il s’agit d’un objet analytique. Pour le cube, nous testons trois maillages réguliers constitués de tétraèdres. Le problème est résolu en un seul pas de chargement. Le résultat obtenu est illustré à la figure 2.1.

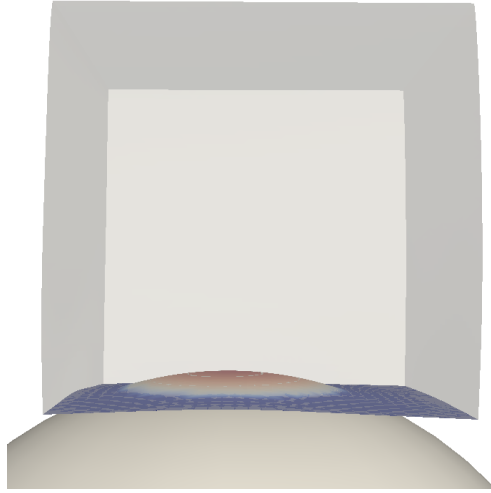


FIGURE 2.1: Un cube déformable de loi Mooney-Rivlin indenté par une sphère rigide

Regardons d’abord les résultats obtenus dans le tableau 2.1 pour un petit maillage de 3072 tétraèdres, soit 14 739 degrés de liberté (DDLs) en déplacement et 289 en  $\lambda_n$ . La convergence des trois premières méthodes dépend du choix de  $r_n$ . On prendra de préférence de grandes valeurs pour ce coefficient. Dans le cas de la méthode par pénalisation pure (PenalLU), l’interpénétration que nous obtenons est inversement proportionnelle à ce coefficient (voir l’article de Renard (2013)). Malheureusement, sans employer de recherche linéaire ou d’autres méthodes pour stabiliser l’état de contact, la boucle de Newton de chacune de ces trois méthodes (PenalLU, Uzawa et UzawaReg) n’a pas voulu converger pour des valeurs de  $r_n \geq 10\,000$ . Parmi ces trois méthodes, la méthode UzawaReg (de lagrangien augmenté « à la Alart-Curnier ») a un léger avantage du fait que son état de contact se stabilise plus rapidement.

En restant dans le cadre de la méthode d’Uzawa, on peut s’affranchir de la difficulté de choisir le coefficient  $r_n$  en adoptant l’idée décrite à la section 2.2.2 pour augmenter graduellement le coefficient en cours de résolution. Cette astuce, très simple, permet non seulement d’éviter de ne pas converger, elle permet aussi de s’assurer de converger rapidement. La méthode UzawaSCA par contraintes actives avec lagrangien augmenté a aussi l’avantage d’être moins sensible au choix du coefficient de pénalisation. À chaque itération de Newton, la solution du système linéaire ne dépend pas de ce coefficient (*modulo* ses critères de convergence). Les trois méthodes suivantes, SchurLU, LagLU et SchurHP, semblent plus rapides mais on ne saurait affirmer à ce stade que c’est significatif.

Le tableau (2.2) montre les résultats pour un maillage intermédiaire de 24 576 tétraèdres, soit 112 724 degrés de liberté (DDLs) en déplacement et 1 089 en  $\lambda_n$ . On voit se démarquer davantage le préconditionneur hiérarchique. On remarque aussi l’absence du Uzawa non régularisé.

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
PenalLU $r_n = 10^1$	7,2s	0,6s	189,2Mo	7
$r_n = 10^2$	7,1s	0,6s	189,0Mo	7
$r_n = 10^3$	10,8s	0,6s	192,6Mo	11
Uzawa $r_n = 10^1$	11,8s	0,6s	189,9Mo	12
$r_n = 10^2$	10,9s	0,6s	195,4Mo	11
$r_n = 10^3$	21,2s	0,6s	198,1Mo	22
UzawaReg $r_n = 10^1$	10,0s	0,6s	190,8Mo	10
$r_n = 10^2$	10,0s	0,6s	189,0Mo	10
$r_n = 10^3$	12,8s	0,6s	192,7Mo	13
UzawaVar	9,2s	0,6s	190,8Mo	10
UzawaSCA $r_n = 10^6$	11,1s	1,0s	194,8Mo	6
SchurLU	8,4s	0,5s	176,5Mo	9
LagLU	7,0s	0,4s	231,3Mo	8
SchurHP	4,2s	0,1s	108,8Mo	8

TABLE 2.1: Temps de calcul, cube glissant en élasticité linéaire à 3072 tétraèdres

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
PenalLU $r_n = 10^1$	90,7s	14,9s	1 632,5Mo	5
PenalLU $r_n = 10^2$	91,9s	15,1s	1 640,7Mo	5
PenalLU $r_n = 10^3$	142,3s	14,8s	1 643,4Mo	8
PenalLU $r_n = 10^4$	194,7s	14,8s	1 643,8Mo	11
UzawaReg $r_n = 10^1$	307,6s	15,1s	1 652,0Mo	17
UzawaReg $r_n = 10^2$	146,6s	15,2s	1 662,2Mo	8
UzawaReg $r_n = 10^3$	180,1s	14,9s	1 648,8Mo	10
UzawaVar	164,2s	15,1s	1 649,7Mo	9
UzawaSCA $r_n = 10^6$	205,5s	15,5s	1 656,6Mo	11
SchurLU	191,7s	14,5s	1 577,0Mo	11
LagLU	234,8s	18,5s	2 164,7Mo	11
SchurHP	44,2s	1,2s	602,4Mo	11

TABLE 2.2: Temps de calcul, cube glissant en élasticité linéaire à 24 576 tétraèdres

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
UzawaSCA $r_n = 1\,000\,000$	9 789,7s	351,7s	23 676,3Mo	27
PenalLU $r_n = 10$	3 844,4s	743,2s	23 725,9Mo	5
$r_n = 100$	5 090,0s	704,2s	23 913,7Mo	7
$r_n = 1\,000$	6 080,6s	654,6s	23 653,8Mo	9
$r_n = 10\,000$	10 230,7s	662,5s	23 939,1Mo	15
$r_n = 1\,000\,000$	14 804,2s	654,0s	23 667,0Mo	22
Uzawa $r_n = 10$	6 838,5s	663,0s	23 766,9Mo	10
$r_n = 100$	8 225,7s	664,7s	23 908,4Mo	12
$r_n = 1\,000$	10 140,1s	656,0s	23 687,6Mo	15
$r_n = 10\,000$	22 413,2s	660s	23 683,3Mo	33
UzawaReg $r_n = 10$	6 878,5s	666,9s	23 754,6Mo	10
$r_n = 100$	7 573,1s	667,8s	23 906,6Mo	11
$r_n = 1\,000$	8 075,1s	652,5s	23 685,9Mo	12
$r_n = 10\,000$	11 532,6s	658,5s	23 654,6Mo	17
UzawaVar	8 164,1s	661,1s	22 711,4Mo	12
SchurLU	8 871,3s	663,5s	22 650,3Mo	13
SchurHP	578,7s	21,3s	3 876,3Mo	14

TABLE 2.3: Temps de calcul, cube glissant en élasticité linéaire à 196 608 tétraèdres

En effet, cet algorithme n'a jamais atteint la stabilité de son état de contact.

Maintenant pour un gros maillage de 196 608 tétraèdres, le tableau 2.3 nous montre des résultats bien plus intéressants. La différence de mémoire utilisée par le préconditionneur hiérarchique est marquante. Pour le temps de calcul, il complète (assemblage et calcul géométrique inclus) dans le temps d'une seule factorisation  $LU$  d'une des autres méthodes. Il n'y a plus de compétition.

On remarque dans ce tableau que le nombre d'itérations requises par les méthodes avec coefficient  $r_n$  fixe semble augmenter avec la valeur de ce coefficient, ce qui paraît contre-intuitif. Il s'agit en fait d'un artéfact causé par notre choix de critères de convergence. Pour un très grand coefficient  $r_n$ , une petite interpénétration causera une correction plus grande que pour un plus petite valeur de  $r_n$ . On remarque aussi que la méthode (UzawaSCA) prend beaucoup plus d'itération que les autres. Nous n'avons pas cherché à régler ce problème particulier, mais nous émettons l'hypothèse qu'en augmentant le coefficient  $r_n$ , on se rapprocherait du comportement des méthodes avec lagrangien non-augmenté (SchurLU, LagLU et SchurHP).

## 2.6 Résultats numériques en élasticité non linéaire

Voici maintenant les résultats obtenus en prenant comme matériau du Mooney-Rivlin ayant comme coefficients  $C_{10} = 0,682$ ,  $C_{01} = 0,497$  et un indice d'incompressibilité (*bulk modulus*)

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
PenalLU $r_n = 10^1$	67,3s	17,8s	1 963,6Mo	3
PenalLU $r_n = 10^2$	126,8s	17,1s	1 963,6Mo	6
PenalLU $r_n = 10^3$	126,9s	17,1s	1 963,6Mo	6
PenalLU $r_n = 10^4$	164,5s	16,7s	1 963,6Mo	8
UzawaReg $r_n = 10^2$	509,0s	17,3s	1 963,8Mo	24
UzawaReg $r_n = 10^3$	431,0s	17,6s	1 963,8Mo	20
UzawaVar	356,7s	17,2s	1 963,8Mo	17
UzawaSCA $r_n = 10^6$	233,1s	17,3s	1 968,7Mo	11
SchurLU	241,0s	18,2s	1 800,7Mo	11
LagLU	316,8s	24,8s	2 575,0Mo	11
SchurMHP	60,3s	1,5s	511,4Mo	11

TABLE 2.4: Temps de calcul, cube glissant en Mooney-Rivlin à 24 576 tétraèdres

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
SchurMHP	625,6s	30,1s	4 099,5Mo	11

TABLE 2.5: Temps de calcul, cube glissant en Mooney-Rivlin à 196 608 tétraèdres

de 100. Les algorithmes que nous comparons sont les mêmes, à l'exception du (SchurHP) que nous remplaçons par (SchurMHP). Il s'agit donc d'un algorithme de GCR appliqué au système couplé en  $\vec{u}, \vec{\lambda}$  et préconditionné par la formule (2.37). Nous utilisons des déplacements de type  $P_2$  et des pressions de type  $P_1$  (donc des éléments de type Taylor-Hood).

### 2.6.1 Un cube déformable indenté par une sphère rigide

Nous présentons directement dans le tableau 2.4 les résultats obtenus avec le maillage à 24 576 tétraèdres (107 811 DDLs en  $\vec{u}$ , 4 913 DDLs en  $p$  et 1 089 DDLs en  $\lambda_n$ ). La présence de l'inconnue supplémentaire en pression a certainement un coût qui se fait sentir dans chacune des méthodes, mais ne semble pas poser de difficulté supplémentaire pour cette mise en donnée simple. Pour cette taille de maillage on voit clairement l'efficacité de la méthode itérative, tant en rapidité qu'en espace mémoire nécessaire.

Le tableau 2.5 est obtenu avec le maillage à 196 608 tétraèdres (823 875 DDLs en  $\vec{u}$ , 35 937 DDLs en  $p$  et 4 225 DDLs en  $\lambda_n$ ). Cette fois-ci, seule la méthode SchurMHP a pu loger dans 28 gigaoctets de mémoire vive.

Bien que l'utilisation d'un *bulk modulus* de 100 pour notre matériau nous paraît raisonnable, nous avons souhaiter vérifier comment se comporte notre méthode itérative SchurMHP si on augmentait ce paramètre à 10 000. Pour faire ce test, nous n'avons ajusté aucun paramètre

Nombre de tétraèdres	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
24 576	70,1s	1,7s	511,3Mo	12
196 608	812,7s	27,1s	4 070,8Mo	14

TABLE 2.6: Temps de calcul, cube glissant en Mooney-Rivlin avec  $\kappa = 10\,000$

de notre solveur. Les résultats obtenus sont inscrits au tableau 2.6. Nous constatons que les résultats obtenus sont très similaires, le nombre d'itérations ayant légèrement augmenté.

### 2.6.2 Bloc de caoutchouc lamellé

Nous présentons ici un cas test de nature plus industrielle. Une semelle de pneu déformable, composé de plusieurs lamelles, entre en contact avec un sol plan rigide ainsi qu'avec elle-même. Le fait d'avoir du contact déformable-déformable est une difficulté supplémentaire que nous n'avons pas encore tout à fait résolue. En particulier, le fait d'approximer les intégrales à l'aide de schémas numériques pose problème. Comme les points d'intégration d'un même élément sont projetés sur les différents éléments leur faisant face, la fonction d'écart  $g_n$  que nous intégrons n'est pas dérivable. Cela nous oblige à utiliser un schéma plus riche. Idéalement, il faudrait implémenter les méthodes mortiers d'intégration « exacte ». Celles-ci consistent essentiellement à projeter le maillage maître sur le maillage esclave afin de pouvoir construire l'intersection des maillages. On définit ensuite nos schémas d'intégration sur ce nouveau maillage plus fin. Cette technique est bien illustrée notamment à la figure 3.11 de Wohlmuth (2011).

Une autre difficulté de ce maillage provient des angles de la géométrie, les coins. Aux coins des lamelles, les sommets sont partagés entre deux contacts différents : l'un face au sol et l'autre face à la lamelle adjacente. Combiner ces deux contraintes en un seul *gap* intégré ne donnerait pas un bon résultat. L'écart entre les lamelles serait compensé par une interpénétration au sol. Nous préférons alors dédoubler le multiplicateur à ce sommet pour imposer deux contraintes distinctes (voir figure 2.2). De ce fait, nous travaillons maintenant avec des multiplicateurs discontinus aux coins. En théorie des mortiers, il est courant d'utiliser des bases de multiplicateurs modifiés au bord. Il serait intéressant de tester des constructions telles que celles des articles de Bernardi *et al.* (1994), Ben Belgacem (1999) ou Wohlmuth (2000).

Nous utilisons la même loi de matériau de type Mooney-Rivlin ayant comme coefficients  $C_{10} = 0,682$ ,  $C_{01} = 0,497$  et un indice d'incompressibilité (*bulk modulus*) de 100. Le bloc est posé sur un sol plan horizontal qui monte lentement. Ce sol monte d'une hauteur un peu inférieure à la moitié de l'épaisseur d'une lamelle à chaque itération. Le haut du bloc est maintenu fixe par une condition de Dirichlet homogène. Quatre pas de chargement sont appliqués successivement

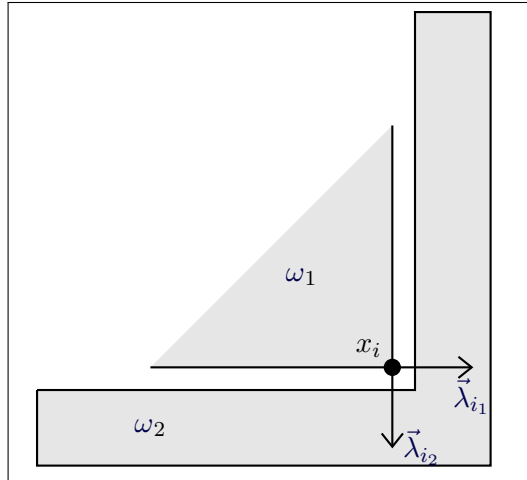


FIGURE 2.2: Multiplicateurs aux coins

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
PenalLU $r_n = 10^2$	79,8s	1,9s	670,6Mo	15
UzawaReg $r_n = 10^1$	754,1s	1,9s	743,5Mo	142
UzawaReg $r_n = 10^2$	302,9s	1,9s	693,9Mo	57
UzawaReg $r_n = 10^3$	477,0s	1,9s	706,5Mo	90
UzawaVar	401,4s	1,9s	701,1Mo	76
UzawaSCA $r_n = 10^6$	148,7s	2,2s	682,2Mo	26
SchurLU	162,1s	2,9s	578,7Mo	26
LagLU	123,6s	2,8s	774,8Mo	20
SchurMHP	129,7s	0,9s	319,2Mo	30

TABLE 2.7: Temps de calcul, lamelles glissantes en Mooney-Rivlin à 9 714 tétraèdres

ce qui est juste assez pour permettre au contact déformable-déformable entre les lamelles d'entrer en jeu.

Le premier maillage que nous considérons est formé de 9 714 tétraèdres se partageant 2 654 sommets pour un total de 50 748 ddls en déplacement, 2 654 ddls en pression et 837 ddls en  $\vec{\lambda}$  sur la surface esclave. Ces résultats sont présentés dans le tableau 2.7. On remarque ici la plus forte influence des calculs géométriques sur les temps de calcul. Même pour la factorisation  $LU$  du système couplé, la résolution des systèmes linéarisés ne compte même pas pour la moitié du temps. On remarque aussi qu'une seule valeur du coefficient  $r_n$  a permis à la méthode PenalLU de converger dans un nombre d'itérations de Newton raisonnable. Dans certains cas, c'est l'état de contact qui ne se stabilise pas, dans d'autres cas c'est simplement que le taux de convergence linéaire est trop lent. Cette valeur de  $r_n$  semble d'ailleurs être celle qui minimise



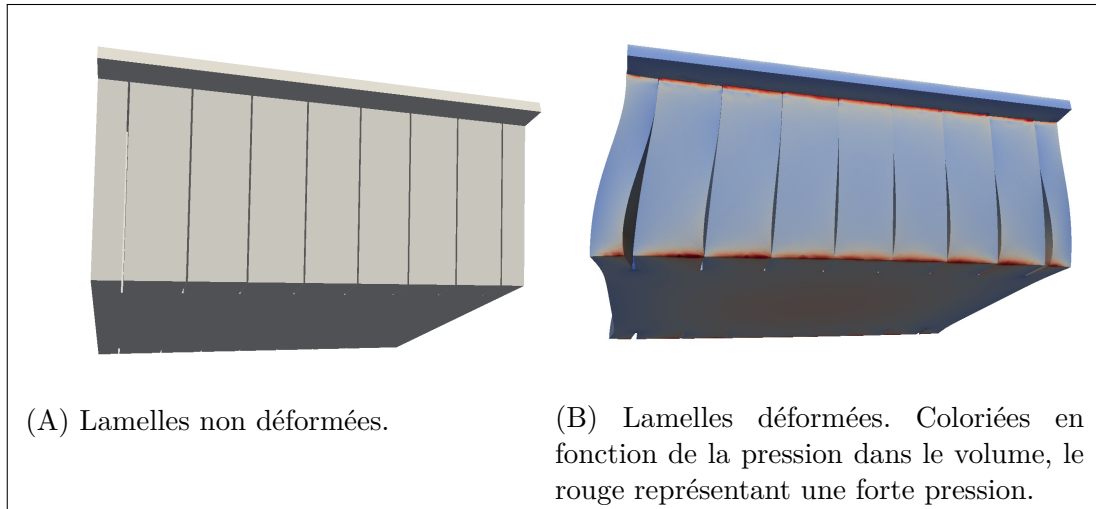


FIGURE 2.3: La pression de contact est concentrée au bord des lamelles. Face au sol, cette forte pression est concentrée dans une bande d'un élément de largeur, il s'agit en quelque sorte d'une couche limite.

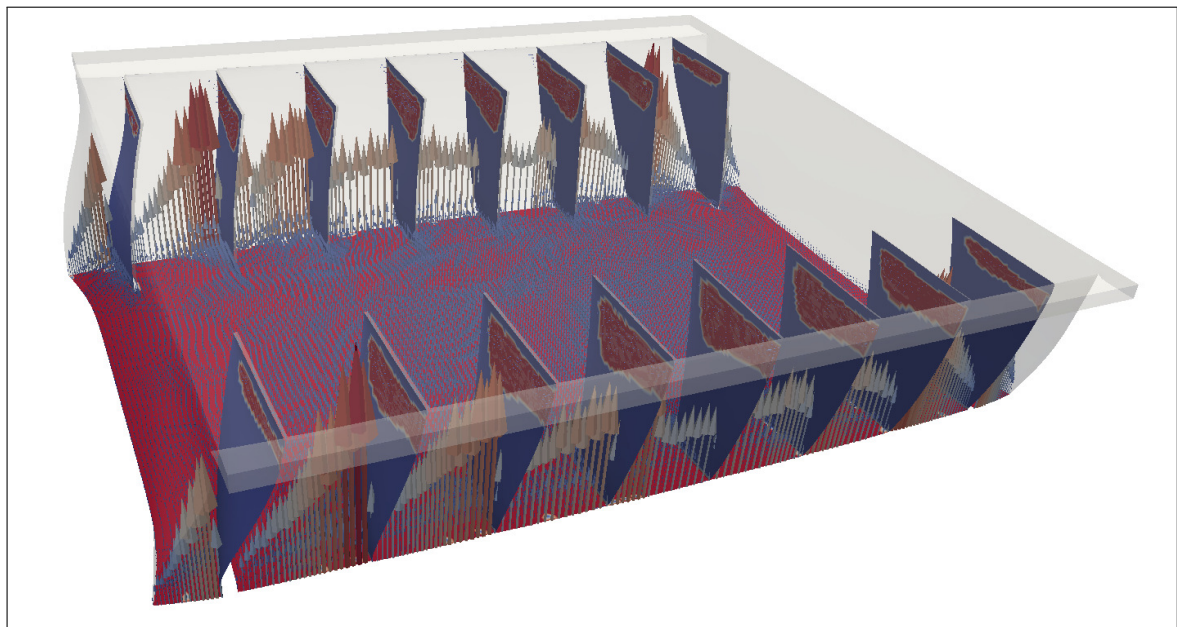


FIGURE 2.4: La surface en rouge est en contact. Les flèches représentent la pression de contact.

le nombre d'itérations de la méthode UzawaReg.

Le deuxième maillage que nous présentons, au tableau 2.8, est composé de 77 712 tétraèdres se partageant 16 916 sommets pour un total de 357 369 ddls en déplacement, 16 916 en pression et 2 733 ddls en lambda sur la surface esclave. La première méthode, la pénalisation simple, n'a pas réussi à converger pour des coefficients  $r_n \geq 100$ . Les méthodes d'Uzawa, quant à elles, n'ont tout simplement pas convergé. Pour les lagrangiens non augmentés, on voit

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
PenalLU $r_n = 10^2$	1 197,5s	49,8s	5 944,7Mo	17
PenalLU $r_n = 10^3$	1 411,8s	50,4s	5 949,3Mo	20
UzawaReg $r_n = 10^2$	13 699,0s	53,0s	6 097,2Mo	179
UzawaReg $r_n = 10^4$	5 613,5s	52,4s	6 079,7Mo	75
UzawaVar	5 787,5s	48,3s	6 062,6Mo	83
UzawaSCA $r_n = 10^6$	2 538,5s	53,1s	6 094,8Mo	34
SchurLU	3 029,5s	71,7s	5 076,9Mo	33
LagLU	3 088,9s	90,0s	8 704,9Mo	28
SchurMHP	1 465,2s	10,3s	1 800,8Mo	47

TABLE 2.8: Temps de calcul, lamelles glissantes en Mooney-Rivlin à 77 712 tétraèdres

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
SchurMHP	19 380,5s	148,8s	13 337,8Mo	60

TABLE 2.9: Temps de calcul, lamelles glissantes en Mooney-Rivlin à 621 696 tétraèdres

maintenant que la factorisation  $LU$  prend environ les deux tiers du temps de calcul. Avec le préconditionneur hiérarchique, la résolution des systèmes linéarisés ne prend plus que le tiers du temps de calcul. On voit cependant augmenter le nombre d'itérations de Newton nécessaire. En effet, en utilisant une tolérance relative de  $10^{-2}$  pour le GCR on se trouve à appliquer une méthode de quasi-Newton et on se limite à une convergence linéaire. Cette limitation se fera sentir davantage si on cherche à obtenir une solution très précise.

Finalement nous montrons un maillage très raffiné. Évidemment, si l'objectif était vraiment d'aller chercher de la précision, il aurait fallu passer par les méthodes d'adaptation plutôt que de simplement raffiner régulièrement. Nous avons fait le calcul seulement pour la méthode la plus itérative, car c'est la seule qui pouvait entrer en mémoire sur l'ordinateur utilisé pour ces calculs. Le résultat est présenté au tableau 2.9. Idéalement, ce calcul aurait dû être parallélisé, nous n'avons pas voulu aborder ce sujet. Cette mise en données contient 2 670 783 ddls en déplacement, 119 123 en pression et 9801 en multiplicateur. Ici encore, la résolution des systèmes linéaires occupe environ le tiers du temps de calcul total. Cette constatation doit nous servir à guider de futurs travaux. Réduire le nombre d'itérations de Newton nécessaire serait certes avantageux, mais un travail devra aussi être consacré à accélérer tout le reste du calcul (géométrie et assemblage des matrices). D'autre part, lorsque la correction en déplacement est très petite, on pourrait tenter de reprendre la résolution linéaire en mettant à jour l'état de contact et certaines quantités sans refaire les projections géométriques ou réassembler les matrices.

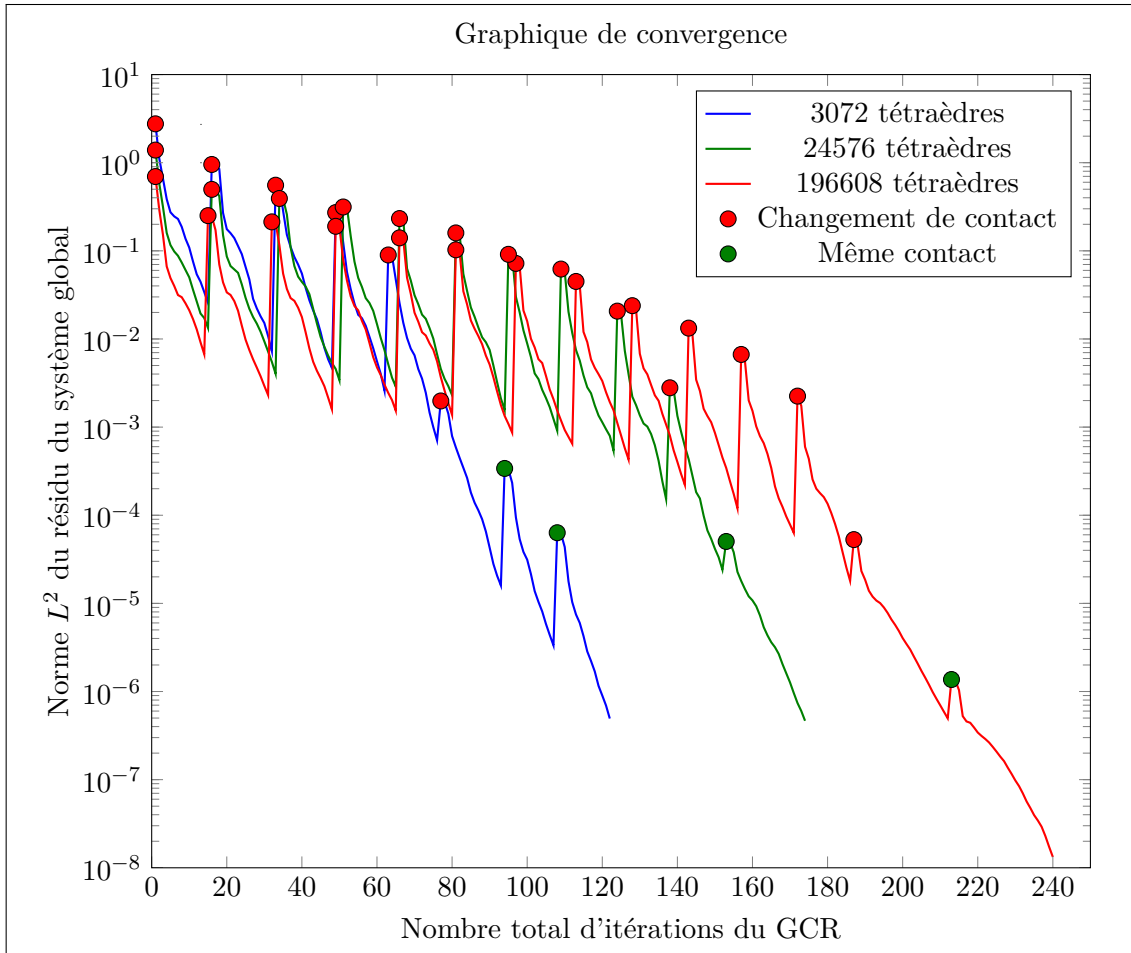


FIGURE 2.5: Graphique de résidu du GCR

### 2.6.3 Efficacité de la méthode itérative lorsque le maillage se raffine

Afin de prévoir comment pourrait se comporter notre solveur itératif pour des maillages encore plus fins, on peut s'intéresser au graphique de convergence de son GCR (figure 2.5). Dans ce graphique, on trouve en ordonnée, sur une échelle logarithmique, le résidu du système global à chaque itération du GCR et en abscisse le nombre total d'itérations de GCR. Notre boucle de GCR est configurée pour arrêter après avoir amélioré le résidu par un facteur  $10^{-2}$ . Après cela, une nouvelle itération de Newton commence et le vecteur de résidu est réassemblé. S'il y a eu un changement d'état de contact (ce qui est indiqué par un cercle rouge), le résidu du système augmente nécessairement. S'il n'y a pas eu de changement d'état de contact, le résidu risque tout de même d'augmenter si le matériau est non linéaire (Mooney-Rivlin dans ce cas). On constate une forte accélération de la convergence dès que l'état de contact est stabilisé. Il semble que la méthode de complément de Schur avec préconditionneur hiérarchique reste tout aussi efficace lorsque le maillage se raffine. On voit cependant qu'elle commence à ralentir lorsque le résidu diminue trop.



## Chapitre 3

# Problème de contact frottant

Dans ce chapitre, nous reprenons la construction des algorithmes d'Uzawa pour le lagrangien augmenté et de GCR préconditionnés pour le lagrangien non augmenté, mais cette fois en ajoutant les termes provenant de la loi de Coulomb pour le contact frottant. Rappelons qu'au premier chapitre (page 38) nous avons obtenu le système d'équations non linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B^\top \vec{\lambda} = F \\ R_C \widehat{g}_n = 0 \\ R_{SC} \lambda_n = 0 \\ R_A \widehat{g}_t = 0 \\ R_G \vec{\lambda}_t = R_G \underline{s} \frac{-\widehat{g}_t}{|\widehat{g}_t|} \\ \underline{s} = \mu \lambda_n \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Autant en lagrangien augmenté que non augmenté, nous résolvons ce système dans le cadre de la stratégie des contraintes actives. À chaque itération de la boucle de Newton, nous fixons l'état de contact et linéarisons chacune des équations. Même si la détermination de l'état de contact en chaque nœud semble bien prescrite par la loi de Coulomb, nous verrons que pour des approximations de la solution, pas nécessairement admissibles, cette étape est très délicate. Ainsi, nous commençons par décrire en détail comment nous procédons de façon à réduire les risques que certains nœuds alternent entre l'état adhérent et l'état glissant. Après avoir explicité la linéarisation de nos équations, nous construisons en premier lieu notre méthode itérative, semblable à celle du chapitre précédent. Comme la loi de Coulomb impose des conditions de nature différente sur les différentes zones de contact, la construction du préconditionneur pour le complément de Schur est accomplie de façon à en tenir compte.

L'existence juxtaposée de ces deux types d'état de contact rend d'ailleurs la résolution du système non linéaire très difficile. La linéarisation que nous effectuons de la loi de Coulomb pour les nœuds glissants donne des termes très grands lorsqu'on s'approche de la zone adhérente. Encore une fois, le lagrangien augmenté est employé pour régulariser. Cependant, en

utilisant la formulation augmentée uniquement sur la partie glissante, nous arrivons à ne pas altérer le système primal, permettant à nos préconditionneurs de conserver leur efficacité.

### 3.1 Stratégie de contraintes actives

Nous reprenons le paradigme explicité à la section (2.2.4). Pour des valeurs initiales de nos inconnues  $(\vec{u}, \vec{\lambda})$ , nous déterminons un état de contact, puis nous linéarisons les conditions d'optimalité (1.41) en fixant cet état de contact et nous résolvons. La recette la meilleure pour déterminer cet état de contact n'est pas évidente. Bien sûr, une fois convergé, notre définition doit correspondre à la loi de Coulomb discrétisée qu'on s'est choisie. Cependant, pour les étapes intermédiaires avec des valeurs de  $\vec{\lambda}$  et  $\vec{u}$  qui ne sont pas nécessairement admissibles, il faut faire attention. Imposer un nœud adhérent qui n'aurait pas dû l'être peut causer une forte variation du multiplicateur et déstabiliser toute une région. Il est aussi facile de causer des oscillations de l'état de contact. Pour nos calculs, nous avons utilisé les critères suivants :

- Un nœud  $i$  est inactif lorsqu'il n'est pas interpénétré et qu'aucune force de contact n'est appliquée dessus, soit lorsque  $\widehat{g}_{ni} \geq 0$  et  $\lambda_{ni} \leq 0$ .
- Les autres nœuds sont actifs (en contact). Alors :
  - Si le nœud vient d'entrer en contact, on le pose glissant. On ne veut pas le mettre adhérent, car cela pourrait être trop violent. Dans le cas où le glissement tangentiel est nul, on n'a aucune direction pour aligner le multiplicateur, on le laisse glisser sans frottement pour une itération.
  - Les autres nœuds étaient auparavant (à l'itération de Newton précédente) considérés soit adhérents soit glissants.
    - Si un nœud  $i$  était adhérent à l'itération précédente et qu'il est à l'intérieur du cylindre de Tresca  $|\vec{\lambda}_{ti}| < s_i$  il reste adhérent.
    - Si ce nœud  $i$  était glissant et qu'au contraire il est à l'extérieur du cylindre de Tresca  $|\vec{\lambda}_{ti}| > s_i$ , alors il reste glissant. À l'itération suivante, il devrait être retourné sur la surface du cône de Coulomb (à epsilon près).

Pour les autres cas :

- Si le glissement tangentiel est nul, nous posons le nœud glissant. En attendant que le glissement tangentiel permette de déterminer une orientation pour le multiplicateur tangentiel, celui-ci conservera son orientation actuelle.
- Dans les autres cas, nous aurons besoin de mesurer l'alignement du glissement sur le multiplicateur  $\widehat{g}_{ti} \cdot \vec{\lambda}_{ti}$  :
  - Si l'alignement est négatif, on considère le nœud glissant ;
  - sinon, le nœud est adhérent.

## 3.2 Linéarisation

Nous résolvons le système d'équations 1.41. Ceci peut s'accomplir de différentes façons. Nous aurons bien sûr une boucle de Newton, nous pourrions aussi avoir une boucle de point-fixe sur le seuil de Tresca et une autre boucle de point-fixe sur l'état de contact. Comme c'est souvent le cas pour les algorithmes avec boucles imbriquées, nous ne calculerons qu'une seule itération de la méthode de Newton avant de mettre l'état de contact à jour. Nous allons aussi substituer le seuil de Tresca dans la condition sur le multiplicateur tangent, et ce avant même de linéariser. Par conséquent, nous n'aurons pas non plus de boucle de point-fixe sur le seuil de Tresca.

Toutes les matrices et les *gaps* intégrés étant assemblés et fixés pour nos valeurs initiales des inconnues  $(\vec{u}, \vec{\lambda})$ , nous résolvons le système linéarisé obtenu en négligeant les termes de degré élevé (et quelques autres) du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\vec{u} + \delta\vec{u}) - B^\top(\vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda}) = F \\ R_C \widehat{g}_n(\vec{u} + \delta\vec{u}) = 0 \\ R_{SC}(\vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda}) = 0 \\ R_A \widehat{g}_t(\vec{u} + \delta\vec{u}) = 0 \\ R_G I_t(\vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda}) = R_G \mu I_n(\vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda}) \frac{-\widehat{g}_t(\vec{u} + \delta\vec{u})}{|\widehat{g}_t(\vec{u} + \delta\vec{u})|} . \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Nous avons déjà fait presque tous les calculs nécessaires, il reste à linéariser la dernière équation. Pour chaque degré de liberté  $j$  du déplacement et  $i$  du multiplicateur, l'ajout de la correction  $(\delta\vec{u}_j, \delta\vec{\lambda}_i)$  a l'effet suivant :

$$I_t(\vec{\lambda}_i + \delta\vec{\lambda}_i) = \mu I_n(\vec{\lambda}_i + \delta\vec{\lambda}_i) \frac{-\widehat{g}_{ti}(\vec{u} + \delta\vec{u}_j)}{\widehat{g}_{ti}(\vec{u} + \delta\vec{u}_j)}$$

$$I_t \vec{\lambda}_i + I_t \delta\vec{\lambda}_i \approx \mu I_n \vec{\lambda}_i \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} + \mu \left( \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \otimes \vec{n}_j \right) \delta\vec{\lambda}_i + \mu I_n \vec{\lambda}_i \frac{-\left( \mathbf{I} - \frac{\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \otimes \frac{\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \right) \delta\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|}$$

ou encore

$$\delta\vec{\lambda}_{ti} = \underbrace{\mu \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \delta\lambda_{ni}}_{(1)} - \underbrace{\frac{\mu\lambda_{ni}}{|\widehat{g}_{ti}|} \left( \mathbf{I} - \frac{\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \otimes \frac{\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \right) B_t \delta\vec{u}_j}_{(2)} + \underbrace{\mu\lambda_{ni} \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} - \vec{\lambda}_t}_{(3)} . \quad (3.3)$$

Ces différents termes correspondent respectivement à :

- (1) : L'élongation de  $\vec{\lambda}_{ti}$  causée par l'augmentation de  $\lambda_{ni}$ . Ce terme provient de la linéarisation du seuil de Tresca.
- (2) : La correction angulaire de  $\vec{\lambda}_{ti}$  sur le plan tangent au cylindre de Tresca causée par la correction angulaire de  $\widehat{g}_{ti}$ .

- (3) : Le manque d'alignement initial. La norme de ce terme est utilisée comme critère de convergence.

Afin d'écrire cette expression sous forme matricielle, nous notons  $I^{\perp\tau}$  la matrice diagonale par blocs dont l'entrée  $i$  contient l'opérateur de projection  $\frac{\mu\lambda_{ni}}{|\widehat{g}_{ti}|} \left( \mathbf{I} - \frac{\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \otimes \frac{\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \right)$ . Ce terme représente une projection sur le plan tangent au cylindre de Tresca, tel qu'illustré à la figure 3.1, d'où la notation  $\perp\tau$ . Nous notons aussi  $E^C$  la matrice diagonale dont l'entrée  $i$  contient le produit tensoriel  $\mu \left( \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \otimes \vec{n}_i \right)$ . Il s'agit de l'élongation, le long du cône de Coulomb, de la partie tangente du multiplicateur causée par l'élongation de sa partie normale. Nous pouvons réécrire notre approximation sous la forme :

$$(I_t - E^C) \delta \vec{\lambda} + I^{\perp\tau} I_t B \delta \vec{u} = \left( \mu \lambda_{ni} \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \right) - \vec{\lambda}_t. \quad (3.4)$$

Le système linéaire que nous résolvons peut maintenant s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A' \delta \vec{u} - B^T \delta \vec{\lambda} = F - A + B^T \vec{\lambda} \\ R_C I_n B \delta \vec{u} = -R_C \widehat{g}_n \\ R_{SC} \delta \vec{\lambda} = -R_{SC} \vec{\lambda} \\ R_A I_t B \delta \vec{u} = -R_A \widehat{g}_t \\ R_G (I_t - E^C) \delta \vec{\lambda} + R_G I_t I^{\perp\tau} B \delta \vec{u} = R_G \left( \mu \lambda_{ni} \frac{-\widehat{g}_{ti}}{|\widehat{g}_{ti}|} \right) - R_G \vec{\lambda}_t \end{array} \right. \quad (3.5)$$

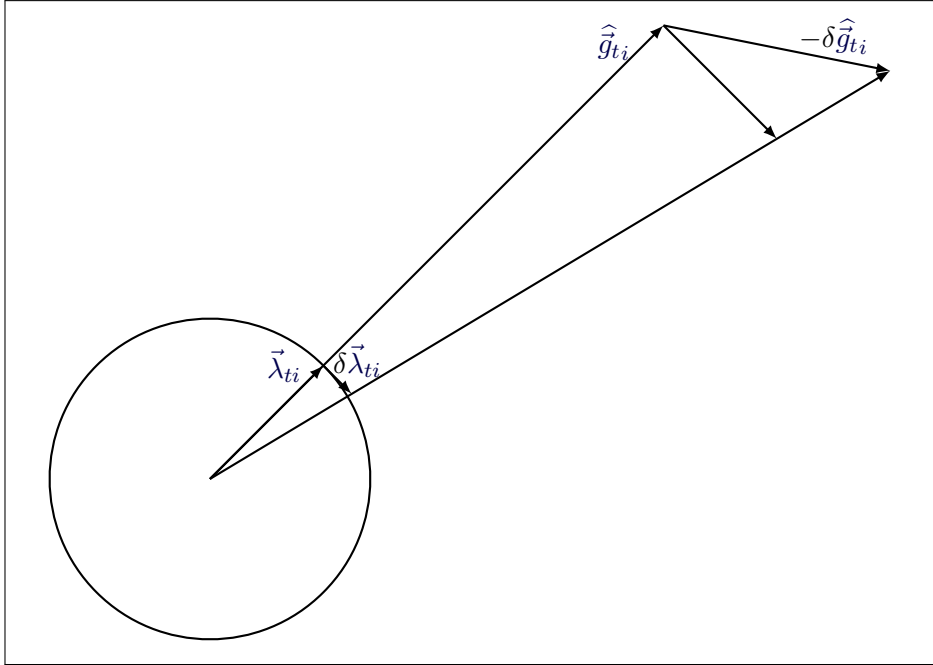


FIGURE 3.1: Comme  $\vec{\lambda}_{ti}$  doit s'aligner sur  $-\widehat{g}_{ti}$ , la correction  $\delta \vec{\lambda}_{ti}$  est calculée selon celle  $\delta \widehat{g}_{ti}$ .



Pour la prochaine étape, nous profitons de l'orthogonalité des parties normale et tangente pour combiner les lignes en lambda. On retrouve ce procédé notamment dans de Saxcé et Feng (1991) équation (79). Nous avons maintenant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A' \delta \vec{u} - B^\top \delta \vec{\lambda} = F - A + B^\top \vec{\lambda} \\ (R_C I_n + R_A I_t + R_G I_t I^{\perp \tau}) B \delta \vec{u} \\ + (R_{SC} + R_G (I_t - E^C)) \delta \vec{\lambda} = R_C \widehat{g}_n - R_{SC} \vec{\lambda} - R_A \widehat{g}_t \\ + R_G \left( -\vec{\lambda}_t - \mu \lambda_n \vec{n} \frac{\widehat{g}_t}{|\widehat{g}_t|} \right) \end{array} \right. , \quad (3.6)$$

que nous réécrivons sous forme matricielle :

$$\left( \begin{array}{c|c} A' & -B^\top \\ \hline (R_C I_n + R_A I_t + R_G I_t I^{\perp \tau}) B & R_{SC} + R_G (I_t + E^C) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta \vec{u} \\ \delta \vec{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - A + B^\top \vec{\lambda} \\ -R_C \widehat{g}_n \vec{n} - R_{SC} \vec{\lambda} - R_A \widehat{g}_t + R_G \left( \mu \lambda_n \frac{-\widehat{g}_t}{|\widehat{g}_t|} - \vec{\lambda}_t \right) \end{pmatrix} . \quad (3.7)$$

Nous résolvons ce système par blocs en appliquant la décomposition

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{u} \\ \delta \vec{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ - (R_C I_n + R_A I_t + R_G I_t I^{\perp \tau}) B A'^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\vec{u}} \\ r_{\vec{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

où le complément de Schur est défini par

$$S = R_{SC} + R_G (I_t + E^C) + (R_C I_n + R_A I_t + R_G I_t I^{\perp \tau}) B A'^{-1} B^\top R_C . \quad (3.9)$$

Comme dans le chapitre glissant, ce complément de Schur a besoin d'un préconditionneur. Pour le construire, nous distinguons les nœuds adhérents des nœuds glissants. Sur les nœuds adhérents, le résidu dual représente une condition de Dirichlet tridimensionnelle (en déformable-déformable, il s'agit plutôt d'une condition de continuité identique à celle de la décomposition de domaine). Pour ces nœuds, nous préconditionnons simplement par une matrice masse  $M_{\vec{\lambda}}$ . Sur les nœuds glissants par contre la situation est plus délicate. La composante normale est toujours une condition de Dirichlet et nous la préconditionnons par une matrice masse en  $\lambda_n$ . Pour la composante tangentielle glissante, il s'agit d'une relation linéaire entre  $\lambda_n$  et  $\vec{\lambda}_t$  dont nous tenons compte, dans l'équation 3.9, à l'aide d'une multiplication matricielle appropriée.

Pour exprimer cela, nous aurons besoin des matrices suivantes : la première,  $\mathcal{P}_{\vec{n}}$ , multiplie scalairement les valeurs tridimensionnelles avec la normale. Ainsi  $\lambda_n = \mathcal{P}_{\vec{n}} \vec{\lambda}$ . La seconde,  $E_{1 \rightarrow 3}^T$ ,

multiplie les valeurs scalaires de  $\lambda_n$  par  $\mu \frac{-\hat{q}_t}{|\hat{g}_t|}$  pour satisfaire au cône de Coulomb linéarisé. Ainsi,  $R_G \vec{\lambda}_t = R_G E_{1 \rightarrow 3}^T \mathcal{P}_{\bar{n}} \lambda_n$ . Cela donne :

$$\tilde{S}^{-1} = R_{SC} - \left( I_t + (I_n + E_{1 \rightarrow 3}^T) R_G M_{\lambda_n}^{-1} \mathcal{P}_{\bar{n}} \right) R_G - R_A M_{\bar{\lambda}}^{-1} R_A \quad (3.10)$$

### 3.3 Solveur itératif

Nous désirons maintenant construire un algorithme qui évitera de factoriser la matrice  $A'$ . Tout ayant déjà été présenté dans le chapitre glissant (sections 2.4.1 à 2.4.3), nous pouvons directement énoncer cet algorithme sous la forme d'un préconditionneur du système global (3.7) :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{MH}\mathcal{P}(\mathcal{A}) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B^\top \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \tilde{S}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\left( R_C I_n + R_A I_t + R_G I_t I^{\perp \tau} \right) \cdot B \cdot \mathcal{MH}\mathcal{P}(\mathcal{A}) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

On applique finalement ce préconditionneur à l'intérieur d'une boucle de GCR.

### 3.4 Lagrangien à trois champs pour le frottement

Dans presque toute la littérature, le système non linéaire (1.41) n'est pas résolu sous cette forme, mais plutôt en passant par un lagrangien augmenté. En effet, la résolution du système d'équations non linéaires (1.41) ne se passe pas toujours très bien. La principale difficulté se situe à la frontière entre les zones glissantes et adhérentes. En linéarisant l'alignement du multiplicateur avec le glissement, nous avons introduit une division par le module du glissement. Plus on s'approche de la zone adhérente, plus le glissement est faible, ainsi ce terme peut devenir arbitrairement grand et ruiner le conditionnement du système linéaire.

Une approche possible consiste à régulariser la loi de Coulomb ou à stabiliser le multiplicateur. Nous avons vu à la section 2.2.3 du chapitre sans frottement une façon de régulariser la méthode de Newton sans changer les conditions d'optimalité. Nous reprenons ce procédé en l'appliquant à la fonctionnelle (1.36). Nous invoquons la perturbation  $q_t$  du glissement tangentiel, que nous prenons dans le même espace de discrétisation que  $\vec{\lambda}$  et que nous écrivons sous forme vectorielle  $\underline{q}_t = (q_{t_j})$ . Comme à l'habitude, nous notons  $M_{\bar{\lambda}} \underline{q}_t = \hat{q}_t = (\hat{q}_{t_i})$  sa version moyennée. Nous imposons à cette perturbation de valoir en moyenne le glissement tangentiel,

et nous usons du coefficient réel  $r_t > 0$  pour pénaliser ceci.

$$\begin{aligned}
& \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) + \sum_j s_j |\widehat{g}_{tj}| \\
& \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) + \min_{\widehat{q}_t = \widehat{g}_t} \sum_j s_j |\widehat{q}_{tj}| \\
& \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) + \min_{q_t} \max_{\vec{\eta}_t} \sum_j s_j |\widehat{q}_{tj}| - (\widehat{g}_t - \widehat{q}_t) \cdot \vec{\eta}_t \\
& \min_{\widehat{g}_n \geq 0} J(\vec{v}) + \min_{q_t} \max_{\vec{\eta}_t} \underbrace{\sum_j s_j |\widehat{q}_{tj}| - (\widehat{g}_t - \widehat{q}_t) \cdot \vec{\eta}_t + \frac{r_t}{2} \|\widehat{g}_t - \widehat{q}_t\|^2}_{L_a^t(\vec{v}, \widehat{q}_t, \vec{\eta}_t)} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Nous nommons par la suite  $L_a^t$  le lagrangien augmenté tangentiel à trois champs.

### 3.4.1 Élimination de la perturbation

Nous considérons la condition d'optimalité portant sur  $\widehat{p}_t$  nécessaire pour que  $(\vec{v}, \widehat{p}_t, \vec{\lambda}_t)$  soit solution du problème de point-selle de notre lagrangien :

$$\nabla_{\widehat{p}_t} L_a^t = 0$$

c'est-à-dire

$$s_i \frac{\widehat{p}_{ti}}{|\widehat{p}_{ti}|} + \vec{\lambda}_{ti} + r_t (\widehat{p}_{ti} - \widehat{g}_{ti}) = 0 \tag{3.13}$$

Dans le cas où une composante  $\widehat{p}_{ti}$  du vecteur  $\widehat{p}_t$  s'annule, le gradient du lagrangien n'existe pas. Lorsque  $\widehat{p}_{ti}$  ne s'annule pas, on peut l'isoler dans l'équation (3.13). Pour ce faire, on sépare sa composante angulaire et son module,  $\widehat{p}_{ti} = \frac{\widehat{p}_{ti}}{|\widehat{p}_{ti}|} |\widehat{p}_{ti}|$  :

$$(s_i + r_t |\widehat{p}_{ti}|) \frac{\widehat{p}_{ti}}{|\widehat{p}_{ti}|} = r_t \widehat{g}_{ti} - \vec{\lambda}_{ti} .$$

La partie entre parenthèses étant un réel positif, on obtient, par l'égalité des arguments de gauche et de droite,

$$\frac{\widehat{p}_{ti}}{|\widehat{p}_{ti}|} = \frac{r_t \widehat{g}_{ti} - \vec{\lambda}_{ti}}{|r_t \widehat{g}_{ti} - \vec{\lambda}_{ti}|}$$

et par l'égalité des modules

$$\begin{aligned}
s_i + r_t |\widehat{p}_{ti}| &= |r_t \widehat{g}_{ti} - \vec{\lambda}_{ti}| \\
|\widehat{p}_{ti}| &= \frac{|r_t \widehat{g}_{ti} - \vec{\lambda}_{ti}| - s_i}{r_t}
\end{aligned}$$

ce qui implique en particulier la positivité de la partie de droite, à moins que  $\widehat{p}_{ti}$  ne s'annule. Finalement, en notant  $\vec{\lambda}_{ti}^a = \vec{\lambda}_{ti} - r_t \widehat{g}_{ti}$  le multiplicateur augmenté tangentiel,

$$\widehat{p}_{ti} = \frac{-\vec{\lambda}_{ti}^a (|\vec{\lambda}_{ti}^a| - s_i)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a| r_t}$$

Dans le cas où  $\widehat{p}_{ti} = 0$ , le lagrangien doit atteindre un minimum en  $(\vec{u}, \widehat{p}_t, \vec{\lambda}_t)$ . Nous savons déjà par construction de notre lagrangien, que  $\widehat{g}_{ti}$  est nul aussi. La perturbation n'étant pas contrainte, sa condition d'optimalité s'exprime alors, pour tout  $\delta \widehat{p}_t$  nul sauf en  $i$ ,

$$L_a^t(\vec{u}, \widehat{p}_t + \delta \widehat{p}_t, \vec{\lambda}_t) \geq L_a^t(\vec{u}, \widehat{p}_t, \vec{\lambda}_t)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_j s_j |\widehat{p}_{tj} + \delta \widehat{p}_{tj}| - (\widehat{g}_t - (\widehat{p}_t + \delta \widehat{p}_t)) \cdot \vec{\lambda}_t + \frac{r_t}{2} \|\widehat{g}_t - \widehat{p}_t - \delta \widehat{p}_t\|^2 \\ \geq \sum_j s_j |\widehat{p}_{tj}| - (\widehat{g}_t - \widehat{p}_t) \cdot \vec{\lambda}_t + \frac{r_t}{2} \|\widehat{g}_t - \widehat{p}_t\|^2 . \end{aligned}$$

En simplifiant de chaque côté (sans oublier que  $\widehat{p}_{ti} = 0$  et  $\delta \widehat{p}_{tj} = 0$  si  $i \neq j$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} s_i |\delta \widehat{p}_{ti}| + \delta \widehat{p}_{ti} \cdot \vec{\lambda}_{ti} + \frac{r_t}{2} |\delta \widehat{p}_{ti}|^2 \geq 0 \\ s_i |\delta \widehat{p}_{ti}| + \frac{r_t}{2} |\delta \widehat{p}_{ti}|^2 \geq -\delta \widehat{p}_{ti} \cdot \vec{\lambda}_{ti} . \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de prendre  $\delta \widehat{p}_{ti} = -\varepsilon \vec{\lambda}_{ti}$  et de laisser tendre  $\varepsilon$  vers zéro pour constater que

$$s_i \geq |\vec{\lambda}_{ti}| .$$

Ces résultats se synthétisent en

$$\widehat{p}_{ti} = \begin{cases} \frac{-\vec{\lambda}_{ti}^a (|\vec{\lambda}_{ti}^a| - s_i)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a| r_t} & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces deux branches caractérisent les deux états de contacts possibles, soit le contact adhérent lorsque  $|\vec{\lambda}_{ti}^a| < s_i$  et le contact glissant sinon. L'égalité obtenue est vraie pour la solution, nous l'ajoutons alors comme contrainte supplémentaire sur  $\widehat{p}_{ti}$ , que nous substituons par sa valeur. Il s'agit donc d'une nouvelle application du principe de Courant-Hilbert. Notre lagrangien discret est formé d'une somme de valeurs nodales que nous traitons une par une :

$$\begin{aligned} L_a^t(\vec{v}, \widehat{p}_t, \vec{\lambda}_t) &= s \cdot |\widehat{p}_t| - (\widehat{g}_t - \widehat{p}_t) \cdot \vec{\lambda}_t + \frac{r_t}{2} (\widehat{g}_t - \widehat{p}_t)^2 \\ &= \sum_i \left( s_i |\widehat{p}_{ti}| - (\widehat{g}_{ti} - \widehat{p}_{ti}) \cdot \vec{\lambda}_{ti} + \frac{r_t}{2} (\widehat{g}_{ti} - \widehat{p}_{ti})^2 \right) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\widehat{p}_{ti} = 0$ , nous obtenons le terme

$$-\widehat{g}_{ti}\vec{\lambda}_{ti} + \frac{r_t}{2}|\widehat{g}_{ti}|^2 ,$$

tandis que si  $\widehat{p}_{ti} \neq 0$  nous obtenons le terme

$$-\frac{1}{2r_t}|\vec{\lambda}_{ti}|^2 - \frac{s_i^2}{2r_t} + \frac{s_i}{r_t} \cdot |\vec{\lambda}_{ti}^a| .$$

Notre lagrangien augmenté tangentiel s'écrit donc sous la forme :

$$L_a^t(\vec{v}, \vec{\lambda}_t) = \sum_i \left( \begin{cases} -\frac{1}{2r_t}|\vec{\lambda}_{ti}|^2 - \frac{s_i^2}{2r_t} + \frac{s_i}{r_t} \cdot |\vec{\lambda}_{ti}^a| & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ -\widehat{g}_{ti}\vec{\lambda}_{ti} + \frac{r_t}{2}|\widehat{g}_{ti}|^2 & \text{sinon} \end{cases} \right) \quad (3.14)$$

À ce lagrangien augmenté, il faudra ajouter les termes provenant de la contrainte de non-pénétration.

### 3.4.2 Condition d'optimalité

Pour que le couple  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_t)$  soit un point-selle de ce lagrangien, il faut nécessairement que les gradients par rapport à  $\vec{u}$  et à  $\vec{\lambda}_t$  s'annulent. Considérons d'abord la dérivée du lagrangien augmenté par rapport au multiplicateur tangentiel :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{\lambda}_t} L_a^t &= \left( \frac{\partial L_a^t}{\partial \vec{\eta}_{ti}} \right) \\ &= -\frac{1}{r_t} \vec{\lambda}_t + \left( \begin{cases} \frac{s_i}{r_t} \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ \frac{1}{r_t} (\vec{\lambda}_{ti}^a) & \text{sinon} \end{cases} \right) \\ &= \frac{1}{r_t} (-\vec{\lambda}_t + \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t + r_t \widehat{g}_t)) \\ &= \frac{1}{r_t} (-\vec{\lambda}_t + \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a)) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi défini  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ , la projection du multiplicateur tangentiel augmenté  $\vec{\lambda}_t^a$  sur le cylindre de Tresca. L'expression projection horizontale sur le cône de Coulomb est aussi parfois utilisée. Lorsque ce gradient s'annule, on obtient la formule simple  $\vec{\lambda}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a)$ . Cela implique en particulier que  $|\vec{\lambda}_t| \leq \underline{s}$  et que  $\vec{\lambda}_{ti}$  est aligné sur  $-\widehat{g}_{ti}$  lorsque celui-ci ne s'annule pas. Par comparaison, Baillet et Sassi (2003) exigent plutôt que leurs multiplicateurs satisfassent cette condition en moyenne, c'est-à-dire que  $|\widehat{\lambda}_t| \leq \widehat{s}$ . Un autre choix qui nous paraît prometteur serait d'aligner le multiplicateur sur la projection du glissement tangentiel  $M_{\vec{\lambda}}^{-1} \widehat{g}_t$  plutôt que sur le glissement tangentiel intégré lui-même.

Considérons maintenant le gradient du lagrangien (3.14) par rapport au déplacement :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\underline{u}} L_a^t &= \left( \frac{\partial L_a^t}{\partial \vec{v}_j} \right) \\
&= \left( \sum_i \frac{-\partial \hat{g}_{ti}}{\partial \vec{v}_j} \left( \begin{cases} s_i \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ \vec{\lambda}_{ti}^a & \text{sinon} \end{cases} \right) \right) \\
&\approx -B_t^\top \left( \begin{cases} s_i \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ \vec{\lambda}_{ti}^a & \text{sinon} \end{cases} \right) \\
&= -B_t^\top \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a)
\end{aligned}$$

La projection  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  apparait une fois de plus. Ici encore, certains termes de dérivations ont été négligés.

Ces gradients n'étant de toute évidence pas linéaires, nous linéarisons afin d'appliquer notre méthode de Newton favorite. Calculons la dérivée seconde du lagrangien augmenté par rapport à  $\underline{u}$ . Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} \begin{cases} s_i \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ \vec{\lambda}_{ti}^a - r_t \hat{g}_{ti} & \text{sinon} \end{cases} \right) \\
&= \left( \begin{cases} s_i \left( \frac{r_t \frac{-\partial \hat{g}_{ti}}{\partial \vec{v}_j} |\vec{\lambda}_{ti}^a| - (\vec{\lambda}_{ti}^a) \left( \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \cdot r_t \frac{-\partial \hat{g}_{ti}}{\partial \vec{v}_j} \right)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|^2} \right) & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ r_t \frac{-\partial \hat{g}_{ti}}{\partial \vec{v}_j} & \text{sinon} \end{cases} \right) \\
&= \left( \begin{cases} \frac{-s_i r_t}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \left( \mathbf{I} - \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \otimes \frac{(\vec{\lambda}_{ti}^a)}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \right) \frac{\partial \hat{g}_{ti}}{\partial \vec{v}_j} & \text{si } |\vec{\lambda}_{ti}^a| \geq s_i \\ -r_t \frac{\partial \hat{g}_{ti}}{\partial \vec{v}_j} & \text{sinon} \end{cases} \right) \\
&= -r_t (B_{t\times} - B_{t\times}^{\text{ext}})
\end{aligned}$$

On voit que cette matrice  $(B_{t\times} - B_{t\times}^{\text{ext}})$  est obtenue en modifiant la matrice  $B_t$ .

- Pour les nœuds adhérents, là où le multiplicateur tangentiel augmenté est strictement inférieur au seuil de Tresca, les lignes de  $B_t$  sont conservées intactes.
- Pour les nœuds sans contact préalable, là où  $\underline{s}$  s'annule, les lignes de  $B_t$  sont annulées.

- Pour les nœuds glissants, là où le multiplicateur tangentiel augmenté est plus grand ou égal au seuil de Tresca, les éléments des lignes de  $B_t$  sont amputés de leur composante parallèle au multiplicateur tangentiel augmenté puis divisés par le module de ce dernier.

Quelques remarques récurrentes s'imposent.  $\vec{\lambda}_{ti}$  et  $\widehat{g}_{ti}$  sont tous deux des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  perpendiculaires à  $\vec{n}_i$ . L'expression  $|\vec{\lambda}_{ti}^a|$  désigne le module de ce vecteur. Dans le cas du glissement, un produit scalaire est appliqué entre la direction du multiplicateur augmenté tangentiel et la dérivée du glissement tangentiel  $\widehat{g}_{ti}$ , ce qui permet d'en extraire la partie perpendiculaire au cylindre de Tresca.

Il est intéressant d'étudier le comportement de cette dérivée lorsque  $r_t$  tend vers 0 ou  $+\infty$ . Malgré que le coefficient de pénalisation  $r_t$  semble se mettre en évidence, la matrice  $r_t B_{t \times}$  n'augmente pas avec  $r_t$ , du moins pas sur ses lignes glissantes. Lorsque  $r_t \rightarrow +\infty$ , elle converge plutôt vers la matrice  $I^{\perp \tau} B_t$  de la section 3.2. D'autre part, lorsque  $r_t \rightarrow 0$ , le multiplicateur augmenté ne dépend plus du glissement tangentiel et sa dérivée par rapport à  $\vec{v}$  s'annule. On ne met alors plus à jour la partie angulaire du multiplicateur.

Trouver la valeur appropriée de ce coefficient est délicat, particulièrement lorsque  $|\widehat{g}_{ti}|$  est beaucoup plus petit que  $|\vec{\lambda}_{ti}^a|$ . Si le coefficient  $r_t$  est trop faible, il faudra beaucoup (trop) d'itérations pour que le multiplicateur s'aligne. Si plutôt le coefficient  $r_t$  est trop fort, on pourrait obtenir une correction trop forte du multiplicateur. De plus, la matrice du système global deviendrait alors très mal conditionnée. Cette situation survient partout à la frontière entre l'adhérence et le glissement, elle ne peut donc pas toujours être ignorée.

Finalement,

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{u}} L_a^t &= \nabla_{\vec{u}} \left( -r_t B_t^\top \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) \right) \\ &= -r_t \left( \nabla_{\vec{u}} B_t^\top \right) \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) - r_t B_t^\top \left( \nabla_{\vec{u}} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) \right) \end{aligned}$$

et si on néglige la dérivée de nos matrices  $B_t$  et  $B_t^{\text{ext}}$

$$\begin{aligned} &= -r_t B_t^\top \left( \nabla_{\vec{u}} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) \right) \\ &= r_t B_t^\top (B_{t \times} - B_{t \times}^{\text{ext}}) . \end{aligned}$$

### 3.4.3 Incorporation de la composante normale

En additionnant la partie normale du lagrangien avec sa partie tangentielle, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\vec{v}} \max_{(\underline{\eta}_n, \widehat{\eta}_t)} J(\vec{v}) - \frac{1}{r_n} \frac{1}{2} \underline{\eta}_n^2 + \frac{1}{r_n} \frac{1}{2} \left( R_C (\underline{\eta}_n - r_n \widehat{g}_n) \right)^2 + \\ \sum_i \left( \begin{cases} -\frac{1}{2r_t} |\vec{\eta}_{ti}|^2 - \frac{s_i^2}{2r_t} + \frac{s_i}{r_t} \cdot |\vec{\eta}_{ti} - r_t \widehat{g}_{ti}| & \text{si } |\vec{\eta}_{ti} - r_t \widehat{g}_{ti}| \geq s_i \\ -\widehat{g}_{ti} \vec{\eta}_{ti} + \frac{r_t}{2} |\widehat{g}_{ti}|^2 & \text{sinon} \end{cases} \right) \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$= \min_{\vec{v}} \max_{\vec{\eta}} L(\vec{v}, \vec{\eta})$$

dont les conditions d'optimalité sont :

$$\begin{aligned} J' - B_n^\top R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) - B_t^\top \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) &= 0 \\ \underline{\lambda}_n &= R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) \\ \vec{\lambda}_t &= \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t^a) \end{aligned}$$

Ayant déjà fait tous les calculs nécessaires, nous pouvons directement expliciter l'algorithme d'Uzawa 6.

---

**Algorithme 6** : Algorithme d'Uzawa pour le problème avec frottement

---

**Entrée** :  $u_0$  le déplacement au pas de charge précédent.

$\lambda$  la pression de contact (normal et tangentiel combiné) au pas de charge précédent.

**Sortie** :  $(\vec{u}, \lambda)$  solution du point-selle.

```

1  $\vec{u} = u_0$ 
2 Exécuter
3   Mise à jour du seuil de Tresca :  $\underline{s} = \mu \lambda_n$ 
4   Exécuter
5     Calculs géométriques et assemblages.
6     Détermination de l'état de contact.
7      $M \leftarrow A' + B^\top (r_n I_n B + r_t B_{t \times})$ 
8      $R \leftarrow F + B^\top (R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n) \vec{n} + \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t - r_t \widehat{g}_t))$ 
9      $\delta \vec{u} \leftarrow M^{-1} R$ 
10     $\vec{u} \leftarrow \vec{u} + \delta \vec{u}$ 
11    Répéter tant que critère en  $\delta \vec{u}$  ;
12    Correction de  $\vec{\lambda}$  :
13     $\underline{\lambda}_n \leftarrow R_C(\underline{\lambda}_n - r_n \widehat{g}_n)$ 
14     $\vec{\lambda}_t \leftarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\vec{\lambda}_t - r_t \widehat{g}_t)$ 
15     $\vec{\lambda} \leftarrow \underline{\lambda}_n \vec{n} + \vec{\lambda}_t$ 
16 Répéter tant que critère en  $(\delta \vec{\lambda})$  ;
```

---

### 3.5 Lagrangien non augmenté avec glissement régularisé

La régularisation de la loi de Coulomb obtenue à la section 3.4 permet d'éviter les oscillations de l'algorithme de Newton sur la zone séparant l'adhérence du glissement, mais la résolution d'un système augmenté de la forme  $A' + rB^\top B$  est difficile pour nos méthodes itératives. Nous combinons donc cette régularisation au système non augmenté (3.7) afin de profiter des deux



avantages :

$$\left( \begin{array}{c|c} A' & -B^\top \\ \hline (R_C I_n + R_A I_t + R_G I_t I^{\perp\tau}) (I_n B + B_{t\times}) & R_{SC} + R_G (I_t + E^C) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \delta \vec{u} \\ \delta \vec{\lambda} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} F - A + B^\top \vec{\lambda} \\ -R_C \widehat{g}_n - R_{SC} \vec{\lambda} - R_A \widehat{g}_t - R_G \left( \frac{\vec{\lambda}_t - \mu \lambda_n \vec{n}}{|\vec{\lambda}_t^a|} \right) \end{array} \right). \quad (3.16)$$

En réécrivant la dernière égalité composante par composante, il devient plus facile de la comparer avec sa version non régularisée (3.3) :

$$\delta \vec{\lambda}_{ti} = \underbrace{\mu \frac{\vec{\lambda}_{ti}^a}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \delta \lambda_{ni}}_{(1)} - \underbrace{\frac{\mu r_t \lambda_{ni}}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \left( \mathbf{I} - \frac{\vec{\lambda}_{ti}^a}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \otimes \frac{\vec{\lambda}_{ti}^a}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} \right) B_t \delta \vec{u}}_{(2)} + \underbrace{\mu \lambda_{ni} \frac{\vec{\lambda}_{ti}^a}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|} - \vec{\lambda}_t}_{(3)}. \quad (3.17)$$

Ces différents termes correspondent respectivement à :

- (1) : L'élongation de  $\vec{\lambda}_{ti}$  causée par l'augmentation de  $\lambda_{ni}$ . Ce terme provient de la linéarisation du seuil de Tresca.
- (2) : La correction angulaire de  $\vec{\lambda}_{ti}$  sur le plan tangent au cylindre de Tresca causée par la correction angulaire de  $\widehat{g}_t$ .
- (3) : Le manque d'alignement initial. Il faut faire attention cette fois à ne pas utiliser la norme de ce terme comme critère de convergence. En effet, il serait facile de prendre le coefficient  $r_t$  trop petit et de croire le problème résolu. Il faut plutôt mesurer le véritable manque d'alignement à l'aide du glissement tangentiel non régularisé.

C'est ce système que nous conserverons pour nos tests numériques. Il reste à régler le problème du choix du coefficient de régularisation  $r_t$ . Pour cela, nous reprenons la méthode d'adaptation du coefficient de pénalisation expliquée à la section 2.2.2. Encore une fois, plutôt que de nous fier à la vitesse de la convergence nous tenterons d'en évaluer la qualité. Un coefficient trop grand peut entraîner des difficultés de convergence. Dans certains cas, on observe une oscillation entre deux états, par exemple un nœud alterne entre adhérer et glisser. Dans d'autres cas, la situation peut même sembler chaotiques. Si au contraire le coefficient est trop petit la correction se produira lentement dans la même direction. Pour mesurer cela, nous calculons le produit scalaire entre la correction du multiplicateur et la correction précédente. Si le résultat est près de 1 (disons supérieur à 0,7), le coefficient n'est pas assez fort et on le multiplie par un facteur (par exemple 20). Si au contraire le résultat est loin de 1 (inférieur à 0,3 par exemple), le coefficient est trop fort et on le diminue par le même facteur (ou un autre).

### 3.6 Mise à l'échelle de la correction angulaire

Par l'expérimentation numérique, nous constatons rapidement que la principale difficulté se situe à la frontière entre les nœuds adhérents et ceux glissants. Dans le terme (2) de l'équation 3.3, nous avons mis en évidence le diviseur  $|\widehat{g}_{t_i}|$ . Lorsque le glissement diminue, ce terme devient prépondérant dans le système linéaire. Nous observons alors une forme de verrouillage, le solveur itératif GCR convergeant de plus en plus lentement. Pour y remédier, il convient de mettre à l'échelle cette composante de l'équation.

En chaque nœud glissant, notons  $\vec{a}_i$  la direction de la correction angulaire. Ce vecteur, normalisé, est perpendiculaire à la fois à la normale  $\vec{n}_i$  et au glissement  $\widehat{g}_{t_i}$ . On peut le calculer par le produit vectoriel suivant :

$$\vec{a}_i = \vec{n}_i \times \frac{\widehat{g}_{t_i}}{|\widehat{g}_{t_i}|} .$$

Nous utilisons ensuite ce vecteur pour définir un opérateur  $\mathcal{E}_i^A$  de mise à l'échelle de la correction angulaire :

$$\mathcal{E}_i^A = |\widehat{g}_{t_i}| \vec{a}_i \otimes \vec{a}_i + (\mathbf{I} - \vec{a}_i \otimes \vec{a}_i) .$$

Avant de résoudre, nous multiplions chaque ligne glissante du système linéaire dual par cet opérateur. Il ne faut pas oublier de modifier le préconditionneur en conséquence. Celui-ci doit être multiplié de la même façon, mais par le facteur inverse, c'est-à-dire qu'on multiplie chaque ligne glissante de la formule 3.10 par l'opérateur

$$\mathcal{E}_i^{A^{-1}} = \frac{1}{|\widehat{g}_{t_i}|} \vec{a}_i \otimes \vec{a}_i + (\mathbf{I} - \vec{a}_i \otimes \vec{a}_i) .$$

En effet, considérons un cas général où  $\tilde{A}$  préconditionne  $A$ . Si le système  $Ax = b$  est multiplié par  $\alpha$ , alors  $\alpha Ax = \alpha b$  et on obtient une approximation de la solution en posant  $x \approx \frac{\tilde{A}^{-1}}{\alpha} \alpha b$ .

Remarquons finalement que si nous choisissons plutôt d'appliquer la régularisation de la section 3.5, le facteur  $|\widehat{g}_{t_i}|$  peut simplement être remplacé par  $\frac{|\bar{\lambda}_{t_i}^a|}{r_t} = \frac{|\bar{\lambda}_{t_i} - r_t \widehat{g}_{t_i}|}{r_t}$ . Lorsque le paramètre  $r_t$  tend vers l'infini, ce facteur tend simplement vers  $|\widehat{g}_{t_i}|$  comme dans le cas non régularisé.

### 3.7 Réécriture de la principale méthode

Dans cette section, nous prenons le temps de réécrire l'algorithme développé précédemment en incluant le lagrangien régularisé sur la partie glissante ainsi que la mise à l'échelle de la correction angulaire. Nous adoptons ici une notation plus algorithmique en décortiquant l'effet des matrices appliquées. Cette notation matricielle avait l'avantage de permettre une concision tout en correspondant à l'implémentation de nos algorithmes. Cependant, elle ne correspond pas nécessairement à l'intuition, c'est pourquoi nous désirons offrir une autre présentation.

Boucle de Newton :

1. Mise à jour géométrique : détection du contact (calcul des vis-à-vis de la section 1.3), calcul des normales,  $gap$  et déplacements relatifs aux points d'intégration.
2. Lissage de la normale et évaluation aux degrés de libertés  $\vec{n}_i$ .
3. Assemblage éléments finis des matrices  $A'$ ,  $B$  et des résidus  $F - A$ ,  $\widehat{g}_n$ ,  $\widehat{g}_t$ .
4. Séparation des composantes normales et tangentielles des multiplicateurs :

$$\lambda_{ni} = \vec{n}_i \cdot \vec{\lambda}_i \text{ et } \vec{\lambda}_{ti} = \vec{\lambda}_i - \lambda_{ni} \vec{n}_i .$$

5. Détermination de l'état de contact et construction des matrices de restriction : sans contact  $R_{SC} = I - R_C$ , adhérent  $R_A$  ou glissant  $R_G$ .
6. Projections des multiplicateurs inactifs :  $\vec{\lambda}_i \leftarrow 0$ .
7. Résidu du système primal  $\underline{r}^{\vec{u}} = F - A + B^T \vec{\lambda}$ .
8. Partie normale du résidu dual :  $\underline{r}^{\lambda_n} = -R_C \widehat{g}_n$ .
9. Multiplicateur augmenté tangent :  $\underline{\vec{\lambda}}_t^a = \vec{\lambda}_{ti} - r_t \widehat{g}_{ti}$ .
10. Partie tangente du résidu dual :

$$r_i^{\vec{\lambda}_t} = \begin{cases} 0 & \text{si le nœud } i \text{ n'est pas en contact,} \\ -\widehat{g}_{ti} & \text{si le nœud } i \text{ est adhérent,} \\ \mu \lambda_{ni} \frac{\vec{\lambda}_t^a}{|\vec{\lambda}_t^a|} - \vec{\lambda}_{ti} & \text{si le nœud } i \text{ est glissant.} \end{cases}$$

11. Mise à l'échelle du résidu angulaire (nœud  $i$  glissant) :  $\vec{a}_i = \vec{n}_i \times \frac{\vec{\lambda}_{ti}^a}{|\vec{\lambda}_{ti}^a|}$  et

$$r_i^{\vec{\lambda}_t} \leftarrow (\mathbf{I} - \vec{a}_i \otimes \vec{a}_i) r_i^{\vec{\lambda}_t} + \frac{|\vec{\lambda}_{ti}^a|}{r_t} (\vec{a}_i \otimes \vec{a}_i) r_i^{\vec{\lambda}_t} .$$

12. Rassemblement des parties normale et tangentielle du résidu dual :

$$r_i^{\vec{\lambda}} = \vec{n}_i r_i^{\lambda_n} + r_i^{\vec{\lambda}_t} .$$

13. Rassemblement des parties primale et duale du résidu :

$$r = (\underline{r}^{\vec{u}}, \underline{r}^{\vec{\lambda}}) = (\underline{r}^{\vec{u}}) .$$

14.  $k = 0$  et  $(\delta \vec{u}, \delta \vec{\lambda}) = \underline{0}$

15. Boucle de GCR :

- a) Une itération du préconditionneur primal :  $\delta \delta \vec{u} = \mathcal{MHP}(\mathcal{A}) \underline{r}^{\vec{u}}$ .
- b) Calcul de l'incrément de déplacement intégré :  $\widehat{\delta \delta \vec{u}} = B \delta \delta \vec{u}$ .
- c) Mise à jour de la partie normale du résidu dual :  $r_i^{\lambda_n} \leftarrow r_i^{\lambda_n} - \vec{n}_i \cdot \widehat{\delta \delta \vec{u}}_i$ .

d) Mise à jour de la partie tangente du résidu dual :

$$r_i^{\vec{\lambda}_t} \leftarrow r_i^{\vec{\lambda}_t} + \begin{cases} \widehat{\delta\delta\vec{u}_i} & \text{si le nœud } i \text{ est adhérent,} \\ \mu\lambda_{ni} (\vec{a}_i \otimes \vec{a}_i) \widehat{\delta\delta\vec{u}_i} & \text{si le nœud } i \text{ est glissant.} \end{cases}$$

e) Construction du résidu dual normal plus tangentiel :  $r_i^{\vec{\lambda}} = \vec{n}_i \vec{r}_i^{\lambda_n} + r_i^{\vec{\lambda}_t}$  .

f) Une itération du préconditionneur dual sur la zone adhérente :  $\delta\delta\vec{\lambda}_i = R_A M_{\vec{\lambda}}^{-1} R_A \vec{r}^{\lambda}$  .

g) Une itération du préconditionneur dual sur la zone glissante dans la direction normale :  $\delta\delta\lambda_{ni} = R_G M_{\lambda_n}^{-1} R_G \vec{r}^{\lambda_n}$  .

h) Multiplicateur tangent sur la zone glissante :

$$\frac{r_t}{|\vec{\lambda}_t^a|} \delta\delta\vec{\lambda}_{ti} = \underbrace{\mu\delta\delta\lambda_{ni}}_{\text{Élongation}} + \underbrace{\mu\lambda_{ni} (\vec{a}_i \otimes \vec{a}_i) \widehat{\delta\delta\vec{u}_i}}_{\text{Angulaire}} + \underbrace{r_i^{\vec{\lambda}_t}}_{\text{Résidu}}$$

i) Rassemblement des corrections normale et tangentielle sur la zone glissante :

$$\delta\delta\vec{\lambda}_i = \vec{n}_i \delta\delta\lambda_{ni} + \delta\delta\vec{\lambda}_{ti} .$$

j) Rassemblement des corrections primale et duale :  $u = (\delta\delta\vec{\lambda}, \delta\delta\vec{u})$

k) Orthogonalisation selon la méthode du GCR (algorithme 5 à la page 54), en notant  $\mathcal{A}$  la matrice globale du système 3.16 :

$$d_k = u - \sum_{0 \leq j < k} \frac{(\mathcal{A}u \cdot \mathcal{A}d_j)}{\|\mathcal{A}d_j\|_2^2} d_j$$

l) Minimisation du résidu dans la direction  $d_k$  :

$$\alpha = \frac{\mathcal{A}d_k \cdot r}{|\mathcal{A}d_k|^2}$$

m) Mise à jour des corrections :

$$(\delta\vec{u}, \delta\vec{\lambda}) \leftarrow (\delta\vec{u}, \delta\vec{\lambda}) + \alpha d_k .$$

n) Mise à jour du résidu global :

$$r \leftarrow r - \alpha \mathcal{A}d_k$$

16. Correction du coefficient de régularisation de la loi de Coulomb (voir section 3.5) :

$$r_t \leftarrow \begin{cases} \frac{r_t}{20} & \text{si } R_G \delta\vec{\lambda}_t \cdot R_G \delta\vec{\lambda}_t^{\text{prec}} < 0.3 \\ 20r_t & \text{si } R_G \delta\vec{\lambda}_t \cdot R_G \delta\vec{\lambda}_t^{\text{prec}} > 0.7 \\ r_t & \text{sinon} \end{cases}$$

## 3.8 Résultats numériques

Nous désirons valider numériquement l'efficacité de la méthode itérative développée dans ce chapitre. Nous reprenons pour cela les cas présentés dans le chapitre précédent aux sections 2.5 et 2.6, mais en ajoutant le frottement. Les temps de calcul obtenus ne seront pas comparés avec ceux d'une méthode d'Uzawa. En effet, ces méthodes sont très délicates et nous avons préféré axer nos efforts sur nos algorithmes itératifs. Il sera tout de même possible de comparer les résultats avec ceux obtenus dans le chapitre sans frottement.

Nous utilisons le même matériau quasi-incompressible qu'à la section 2.6. Il s'agit de Mooney-Rivlin ayant comme coefficients  $C_{10} = 0,682$ ,  $C_{01} = 0,497$  et un indice d'incompressibilité (*bulk modulus*) de 100. Encore une fois, nous résolvons en formulation mixte déplacement-pression avec un déplacement de type  $P_2$  et une pression de type  $P_1$ . Pour le multiplicateur, nous avons opté cette fois pour un champ de type  $P_1$ .

### 3.8.1 Un cube déformable indenté par une sphère rigide

Notre cube de largeur 10 est situé dans le premier octant avec un coin à l'origine. Il est fixé sur toute sa face supérieure par une condition de Dirichlet homogène. La sphère rigide est de rayon 10 et son centre se trouve aux coordonnées  $(6, 4, -10 + t)$ , où  $t$  représente le temps (ou plutôt le pas de chargement). Un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$  a été choisi pour la loi de Coulomb. Le problème est résolu en un seul pas de chargement  $\delta t = 1$ . Nous avons utilisé des déplacements quadratiques par éléments, une pression linéaire et un multiplicateur linéaire.

À la figure 3.2, nous pouvons observer, pour notre maillage le plus fin, les champs de multiplicateurs tangentiels et de déplacements le long de la sphère. En regardant, sur la figure de gauche, la zone de transition entre l'adhérence (multiplicateurs rouges) et le glissement (multiplicateurs gris), nous constatons que le passage se fait en douceur. N'eût été leur couleur, on ne distinguerait pas les nœuds glissants des autres. Pareillement pour le glissement tangentiel qui devient graduellement non nul en s'éloignant de la zone adhérente.

Nous utilisons la stratégie de contraintes actives avec le système linéarisé 3.16. Il s'agit donc d'un lagrangien non augmenté, sauf pour la partie tangentielle sur la zone glissante. Nous comparons trois variantes de résolution :

1. (SchurLU) On utilise la décomposition par complément de Schur (3.8). Le système primal, constitué seulement de la matrice de rigidité, est résolu par une méthode directe. Le système dual, défini par le complément de Schur, est résolu à l'aide d'un GCR préconditionné par la formule (3.10).
2. (SchurMHP) On applique cette fois le GCR sur le système global en  $(\underline{u}, \vec{\lambda})$  et en préconditionnant par la méthode (3.11).
3. (LagLU) On applique une factorisation  $LU$  sur le système global en  $(\underline{u}, \vec{\lambda})$ .

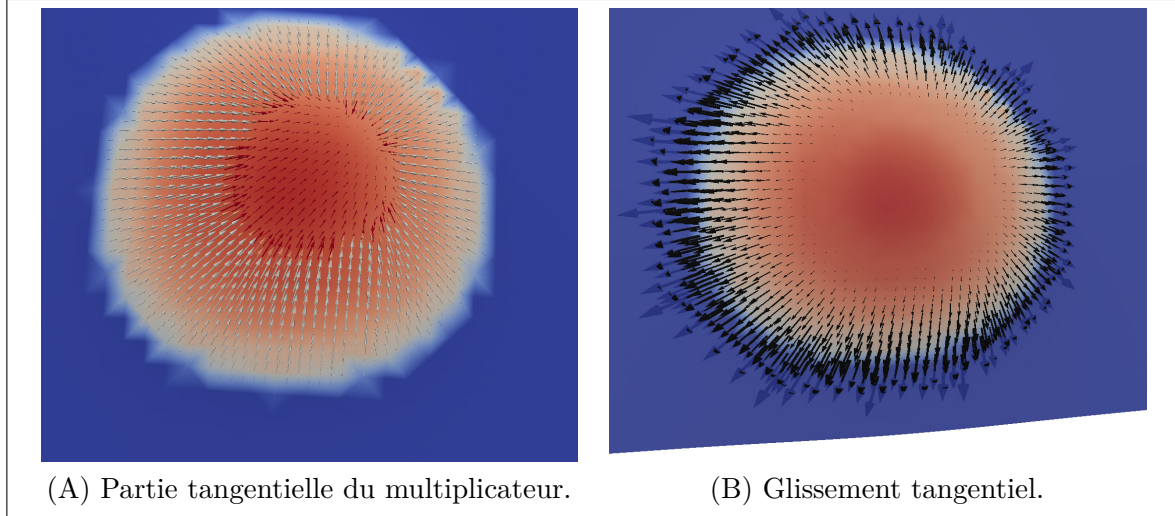


FIGURE 3.2: Face du cube en contact avec la sphère. La pression de contact est en rouge. La surface sans contact est en bleu.

À la section (2.5) nous avons défini les critères de convergence exigés pour nos essais numériques, nous ajoutons à cela certains critères spécifiques au frottement :

- la norme  $l^2$  du glissement tangential sur la zone adhérente ;
- la norme  $l^2$  sur la zone glissante de la différence entre  $R_G I_t \vec{\lambda}$  et  $R_G \mu I_n \vec{\lambda} \frac{-\hat{g}_t}{|\hat{g}_t|}$ .

Nous exigeons encore  $10^{-2}$  ou moins comme valeur pour chacune de ces normes. Nous insistons sur le fait que le critère de convergence sur la zone glissante ne compare pas le multiplicateur avec le multiplicateur augmenté, mais bien le véritable glissement tangential  $\hat{g}_t$ . Si le multiplicateur tangential est très grand par rapport à  $r_t \hat{g}_t$ , alors le multiplicateur aura tendance à rester aligné dans sa direction actuelle. Si le critère de convergence vérifie seulement l’alignement du multiplicateur sur le multiplicateur augmenté, celui-ci pourrait ne pas percevoir l’erreur. La différence obtenue sur le multiplicateur pourrait alors être importante.

Commençons par le tableau 3.1 pour notre maillage de 3072 tétraèdres, l’inconnue en déplacement  $\vec{u}$  ayant 14739 DDLs et le multiplicateur  $\vec{\lambda}$  en a 243, auquel s’ajoute 729 DDLs en pression. La grande difficulté de cette mise en donnée réside dans la zone de transition entre l’adhérence et le glissement. Sans régulariser la condition d’alignement du multiplicateur sur le glissement, il était presque impossible de faire converger la boucle non linéaire. De plus, figer une valeur constante pour le coefficient  $r_t$  ne semble pas possible. En effet, si elle est trop petite, le critère de convergence sur l’alignement n’est jamais atteint. Si en revanche elle est trop grande, la boucle non linéaire oscille comme si on n’avait pas régularisé.

Le tableau 3.2 est obtenu avec le maillage à 24 576 tétraèdres (107 811 DDLs en  $\vec{u}$ , 4 913 DDLs en  $p$  et 867 DDLs en  $\vec{\lambda}$ ). On constate dans ce tableau que le nombre d’itérations de Newton nécessaires pour obtenir la convergence désirée est essentiellement le même pour chacune

de ces trois méthodes. Ainsi, l'ajout du frottement n'a pas dégradé le comportement de la méthode itérative SchurMHP. Pour ce qui est de la méthode SchurLU, ses performances sont un peu décevantes tant pour le temps de calcul que la mémoire utilisée. Il semble que dès qu'on choisit de résoudre le système primal par une factorisation  $LU$ , il devient préférable d'appliquer la factorisation  $LU$  sur le système global.

Finalement, notre plus gros maillage est formé de 196 608 tétraèdres (823 875 DDLs en  $\vec{u}$ , 35 937 DDLs en  $p$  et 3 267 DDLs en  $\vec{\lambda}$ ). Pour ce maillage, seule la méthode itérative s'en est tirée avec la mémoire disponible (28 Go) et cela en un temps raisonnable inscrit au tableau 3.3.

Nous ne pouvons malheureusement pas comparer directement les performances de notre méthode avec la méthode d'Uzawa appliquée au lagrangien augmenté. Cependant, nous pouvons nous comparer avec les résultats du chapitre glissant à la section 2.5.1 et tenir pour acquis que résoudre le problème avec frottement ne pourrait pas être plus rapide. Comparons par exemple les résultats du tableau 3.3 avec ceux du tableau 2.3. Dans le chapitre précédent, sans frottement et pour un matériau d'élasticité linéaire, il avait été possible de résoudre par la méthode de pénalisation même pour le maillage le plus fin. Avec un coefficient  $r_n = 10$ , il avait fallu plus de soixante minutes pour calculer 5 itérations de Newton. En ajoutant le frottement, et pour un matériau incompressible en formulation mixte, notre méthode itérative a nécessité 18 itérations de Newton mais a tout de même complété en moins de 45 minutes.

### 3.8.2 Lamelles

Nous reprenons le cas présenté à la section 2.6.2. En ajoutant le frottement, ce maillage particulier a fait émerger une nouvelle difficulté au bas des lamelles. À la figure 2.2, nous avons illustré comment nos multiplicateurs sont dédoublés aux coins des lamelles. Pour les nœuds qui

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
SchurLU	27,8s	1,9s	254,7Mo	10
LagLU	23,6s	1,5s	255,8Mo	10
SchurMHP	13,2s	0,4s	121,2Mo	9

TABLE 3.1: Temps de calcul, cube frottant en Mooney-Rivlin à 3 072 tétraèdres

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
SchurLU	995,8s	64,7s	2 610,2Mo	14
LagLU	857,6s	54,8s	2 586,3Mo	14
SchurMHP	187,5s	5,5s	562,6Mo	15

TABLE 3.2: Temps de calcul, cube frottant en Mooney-Rivlin à 24 576 tétraèdres

	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
SchurMHP	2 242,2s	70,6s	4 013,4Mo	18

TABLE 3.3: Temps de calcul, cube frottant en Mooney-Rivlin à 196 608 tétraèdres

sont adhérents, le multiplicateur vectoriel représente trois contraintes en déplacement. Si on dédouble le multiplicateur, on se retrouve alors avec six contraintes en déplacement pour trois degrés de liberté, ceci étant surdéterminé. Afin d'éviter ce conflit, nous avons simplement forcé les nœuds aux coins des lamelles à se déclarer sans contact sur la face déformable-déformable. Malheureusement, ceci enlève artificiellement la force de contact à cet endroit. Un travail ultérieur devra être fait pour gérer cette situation convenablement.

Nous avons lancé cette simulation seulement avec notre solveur itératif SchurMHP. Le haut du maillage est fixé par une condition de Dirichlet homogène tandis que le sol se soulève en trois pas de temps. Les temps de calcul obtenus sont condensés au tableau 3.4. Le premier maillage que nous considérons est formé de 9 714 tétraèdres se partageant 2 654 sommets pour un total de 50 748 ddls en déplacement, 2 654 ddls en pression et 2 511 ddls en lambda sur la surface esclave. Le second maillage est formé de 77 712 tétraèdres se partageant 16 916 sommets pour un total de 357 369 ddls en déplacement, 16 916 en pression et 8 199 ddls en lambda. Comme nous l'avions déjà souligné dans le chapitre glissant, la majorité du temps de calcul est consacrée aux calculs géométriques. Finalement, le troisième maillage comporte 621 696 tétraèdres se partageant 119 123 sommets pour un total de 2 670 783 ddls en déplacement, 119 123 en pression et 29 403 ddls en lambda sur la surface esclave.

Sur la figure 3.3 (page 91), nous pouvons voir les lamelles déformées obtenues pour le maillage formé de 621 696 tétraèdres. La partie (A) de la figure illustre l'état de contact et le multiplicateur. La zone adhérente est en rouge, elle se situe au centre sous le bloc, mais aussi sur la face intérieure de certaines lamelles en contact déformable-déformable. La zone glissante est en gris, elle se situe sur presque tout le reste du sol, ainsi qu'à l'intérieur des lamelles. Finalement, la zone sans contact est en bleu et compose la majeure partie des faces intérieures des lamelles, mais aussi certains points au sol près du bord des lamelles. Les multiplicateurs  $\vec{\lambda}$  sont représentés par des vecteurs. On constate qu'ils sont grandement concentrés sur les

Nombre de Tétraèdres	Temps total	Temps par résolution	Mémoire totale	Itérations Newton
9 714	166,4s	1,1s	297,3Mo	38
77 712	1 189,3s	11,5s	1 537,4Mo	37
621 696	44 561,5s	286,2s	11 135,4Mo	92

TABLE 3.4: Temps de calcul, lamelles frottantes en Mooney-Rivlin



bords d'attaque des lamelles, ce qui est un effet recherché par les industriels. La partie (B) de la figure illustre quant à elle la composante tangentielle des multiplicateurs sur le sol au centre du bloc. On y constate l'uniformité de celle-ci. Notamment, le passage du glissant à l'adhérent se fait sans perte de régularité.

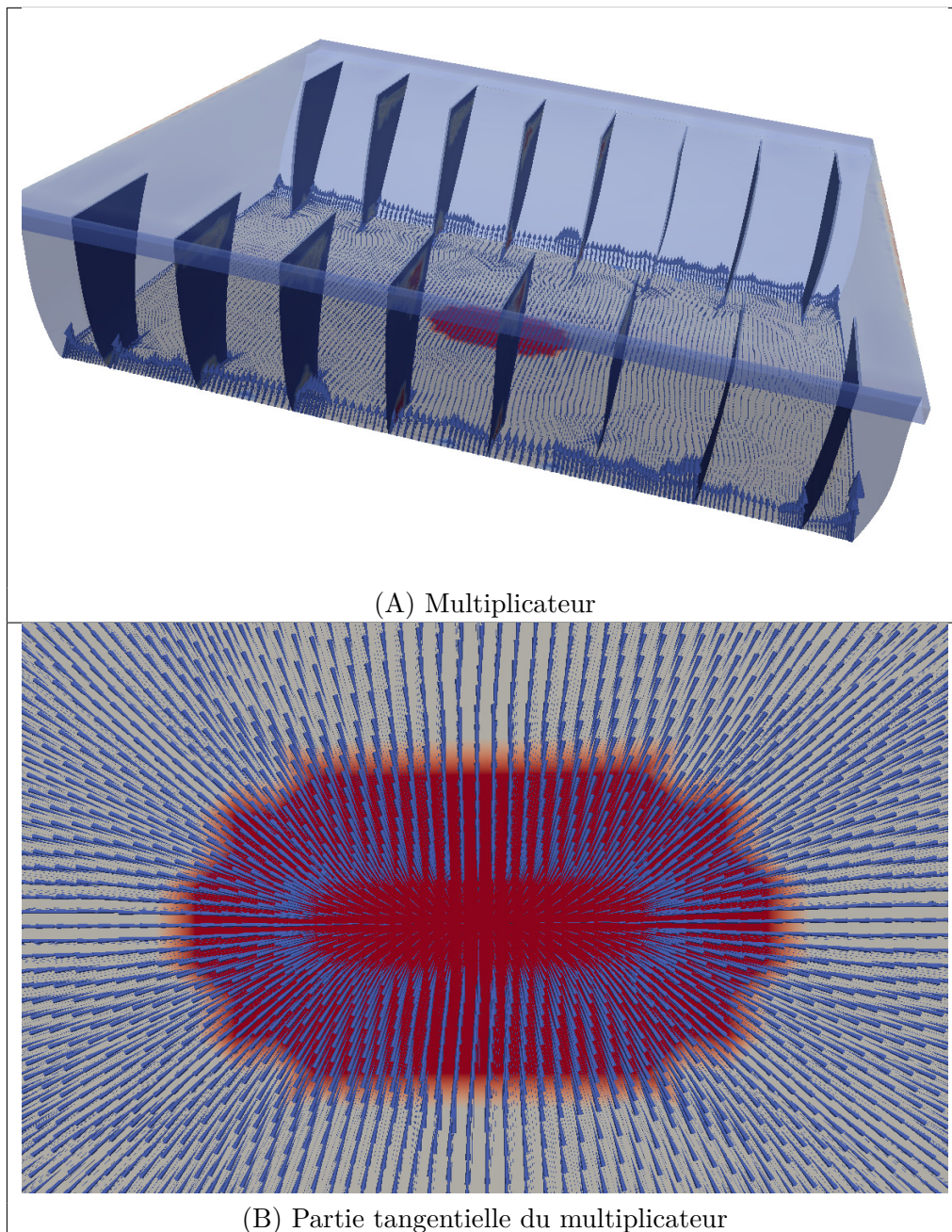


FIGURE 3.3: Face du bloc lamellé en contact avec le sol. La surface rouge est adhérente, la surface grise est glissante.

Pour valider la robustesse de notre méthode, nous avons fait suivre cette compression par un

cisaillement en déplaçant le sol vers la droite. La séquence de résultats obtenus est illustrée aux figures 3.4 et 3.5 pour notre maillage de 9 714 tétraèdres avec un coefficient de frottement de  $\mu = 0,4$ . Les trois premières images montrent l'évolution de la zone de contact et du multiplicateur lors de la phase de compression. Les trois images suivantes montrent la phase de cisaillement alors que le bloc de caoutchouc se déplace vers la gauche jusqu'à devenir complètement glissant au sol. Sur la dernière image, on peut voir que les lamelles de droite semblent vouloir se séparer. La grande flexibilité de ces lamelles minces est une des difficultés principales de cette simulation. Le mélange de nœuds adhérents et de nœuds glissants sur le bord des lamelles en est une autre, car ceci signifie que le glissement tangentiel y est presque nul. On voit bien aussi les porte-à-faux présents entre chaque paire de lamelles.

Il est intéressant de regarder comment se comportent les différents critères de convergence en cours de résolution. Sur la figure 3.6 on peut observer différentes normes calculées sur un intervalle de cinq pas de temps. On constate que notre algorithme arrive à converger très précisément selon chacun des critères.

Notre méthode s'est montrée rapide et robuste, mais lorsque nous avons raffiné ce maillage et augmenté le coefficient de frottement, plusieurs difficultés dues à la géométrie de notre problème sont apparues.

Parfois, la méthode de Newton s'est mise à osciller en raison d'un point d'intégration qui hésitait entre avoir un vis-à-vis ou ne pas en avoir, tel qu'illustré à la figure 3.7. En effet, comme nous utilisons des schémas d'intégration fixes, les porte-à-faux causent une discontinuité dans l'énergie que nous souhaitons minimiser. Il faut cependant préciser que cette oscillation est proportionnelle au poids du point d'intégration en cause. Aussi, comparativement à l'erreur de discrétisation, il s'agit d'une erreur négligeable. Pour nous permettre de converger dans ces situations, nous avons simplement choisie de désactiver les points d'intégration pour lesquels cela se produit. Il serait plus intéressant de tester les méthodes d'intégration par sous-éléments pour régler ce problème.

D'autres fois, il est arrivé que notre logiciel choisisse un mauvais vis-à-vis pour certains points d'intégration. Lorsque nous faisons glisser nos lamelles, le bas de celles-ci commence à se courber, tel qu'illustré à la figure 3.8. Ceci est possible parce que nous imposons le contact en moyenne et que nous utilisons des déplacements quadratiques. À la figure 3.9, nous montrons deux sortes de mauvaises projections que nous avons rencontrées. Une façon manuelle d'éviter cette confusion, serait d'imposer dès le départ les paires de surfaces qui peuvent être en contact.

Nous avons parlé du problème causé par les coins du maillage. Nous n'avons pas pu tester les bases de multiplicateurs modifiés au bord que l'on voit dans la littérature sur le mortier. Plutôt que de définir deux multiplicateurs tridimensionnels aux bords des lamelles (un pour le contact au sol et un pour le contact avec la lamelle opposée), nous avons plutôt choisi de désactiver ces degrés de liberté du multiplicateur vers l'autre lamelle (et de garder ceux vers le sol). Nous avons aussi essayé de garder ces deux multiplicateurs. Dans un essai avec un coefficient de frottement de  $\mu = 0,4$ , nous sommes arrivés à un problème de conditionnement illustré à la figure 3.10. Sur ces deux images, on voit en certains sommets que les deux multiplicateurs se corrigent mutuellement. Ces deux corrections se reproduisent successivement et notre méthode ne converge pas (ou converge très lentement). À l'opposé, en désactivant des degrés de liberté du multiplicateur ils nous est arrivé que ce multiplicateur absent ne nous permette pas d'empêcher l'interpénétration de la lamelle face au sol.

Nous avons aussi testé la résolution de ce problème à l'aide de déplacement de type *Crouzeix-Raviart*, c'est-à-dire en ajoutant un degré de liberté au milieu des tétraèdres et au milieu des faces. Ceci n'a pas amélioré le résultat, au contraire, on a vu apparaître une instabilité de la solution sur le bord d'attaque des lamelles, illustrée à la figure 3.11. Cette instabilité apparaissant autant pour une pression de type  $P_1$ , que pour une pression de type  $P_1$  discontinu.

Finalement, nous avons voulu vérifier que, en l'absence de ces difficultés géométriques, notre algorithme arrive bien à résoudre ce problème. Ainsi, nous avons résolu le même problème, mais avec le matériau compressible d'élasticité linéaire employé à la section 2.5. Avec ce matériau, la séquence complète de compression suivie de cisaillement s'est bien déroulée et ce, pour chacun de nos trois maillages de lamelles. Le changement de matériau a eu l'effet de réduire la pression de contact. En particulier l'impact du bord d'attaque s'est amoindri, causant moins de courbure au sol et rendant les projections des points de contact plus facile. Nous illustrons à la figure 3.12 le comportement des différents critères de convergence à chacune des itérations de Newton. On constate que notre méthode permet d'atteindre une bonne précision pour chacune des contraintes du problème.

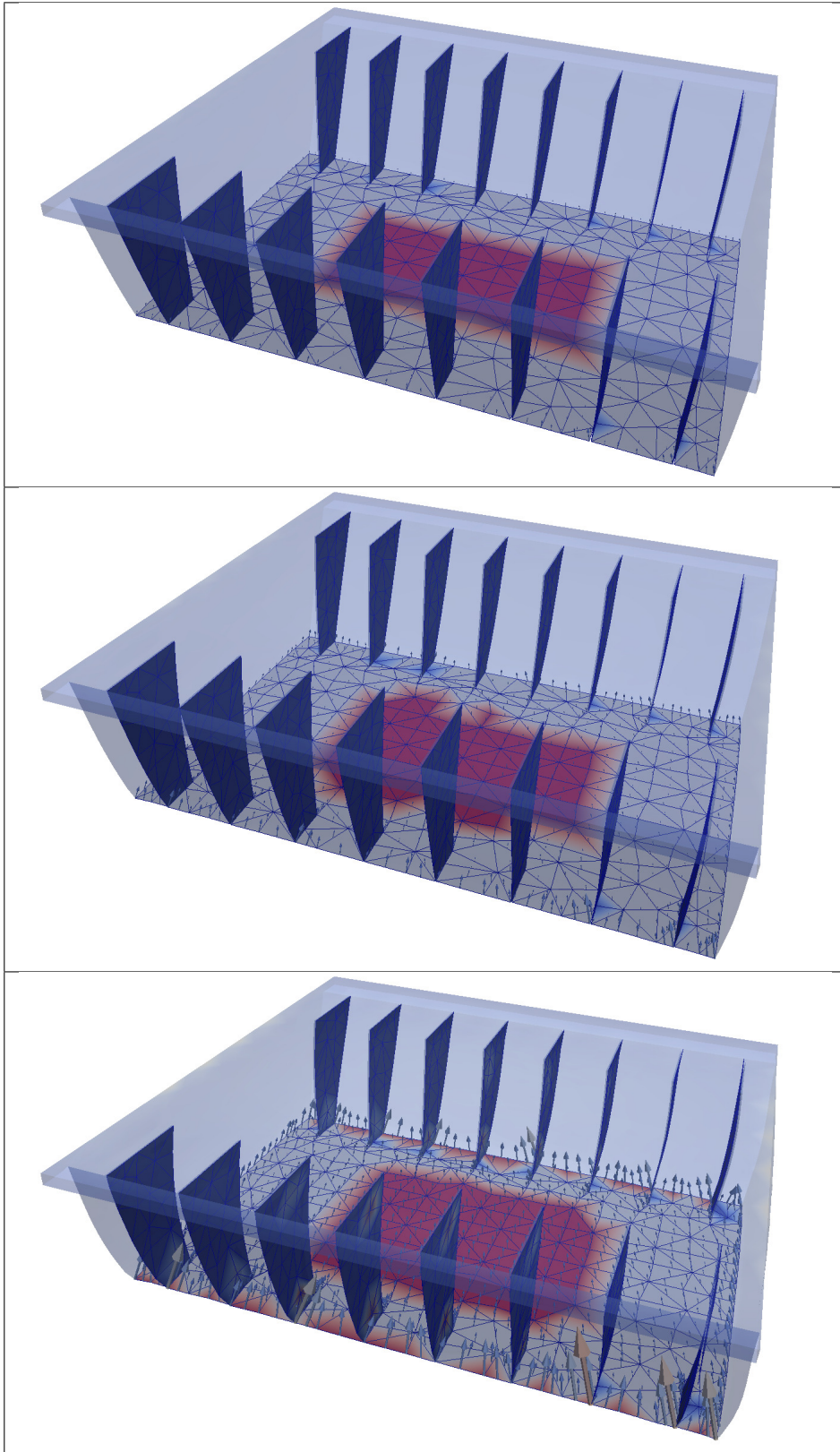


FIGURE 3.4: Lamelles en contact frottant comprimées

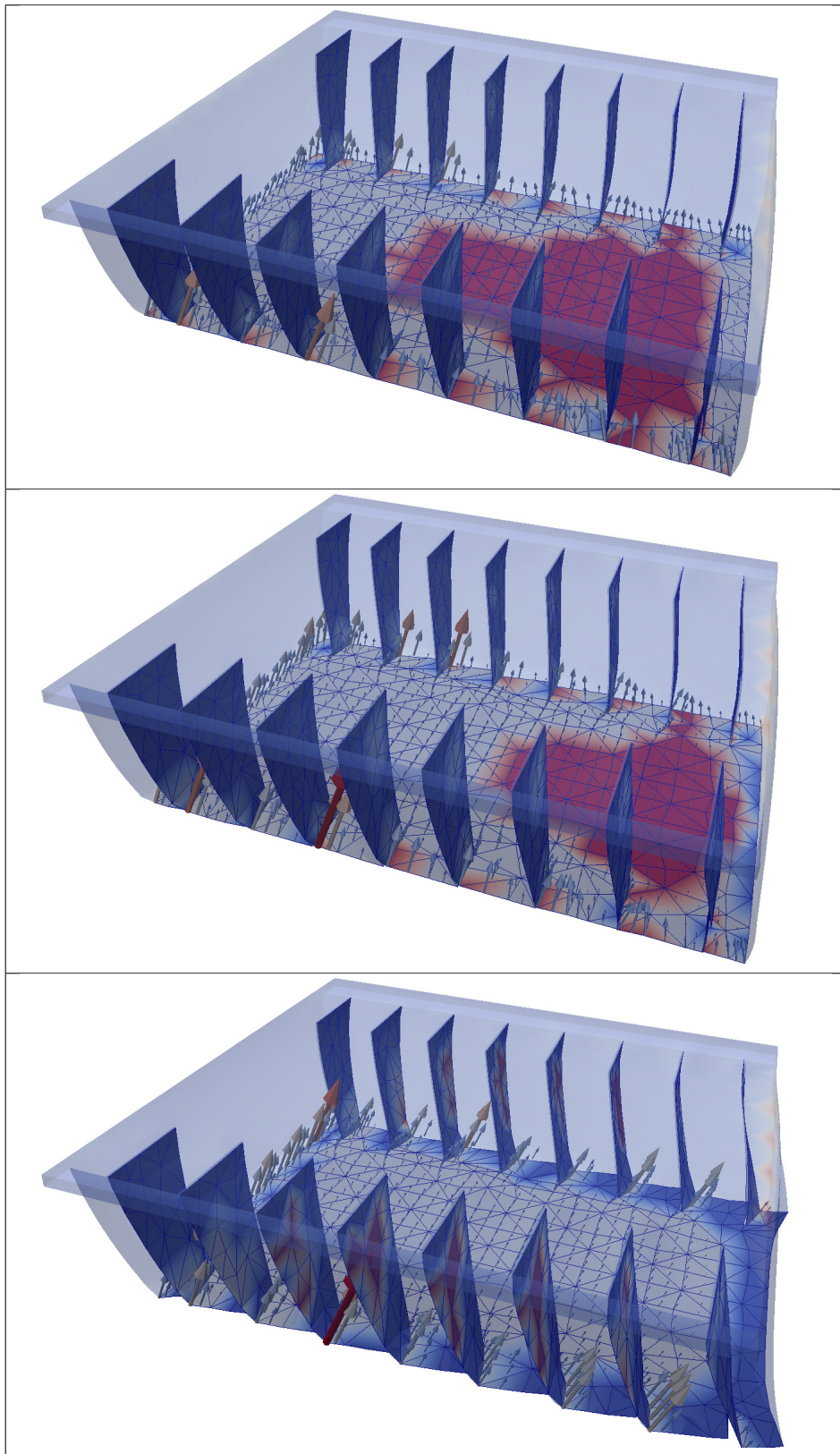


FIGURE 3.5: Lamelles en contact frottant cisailées

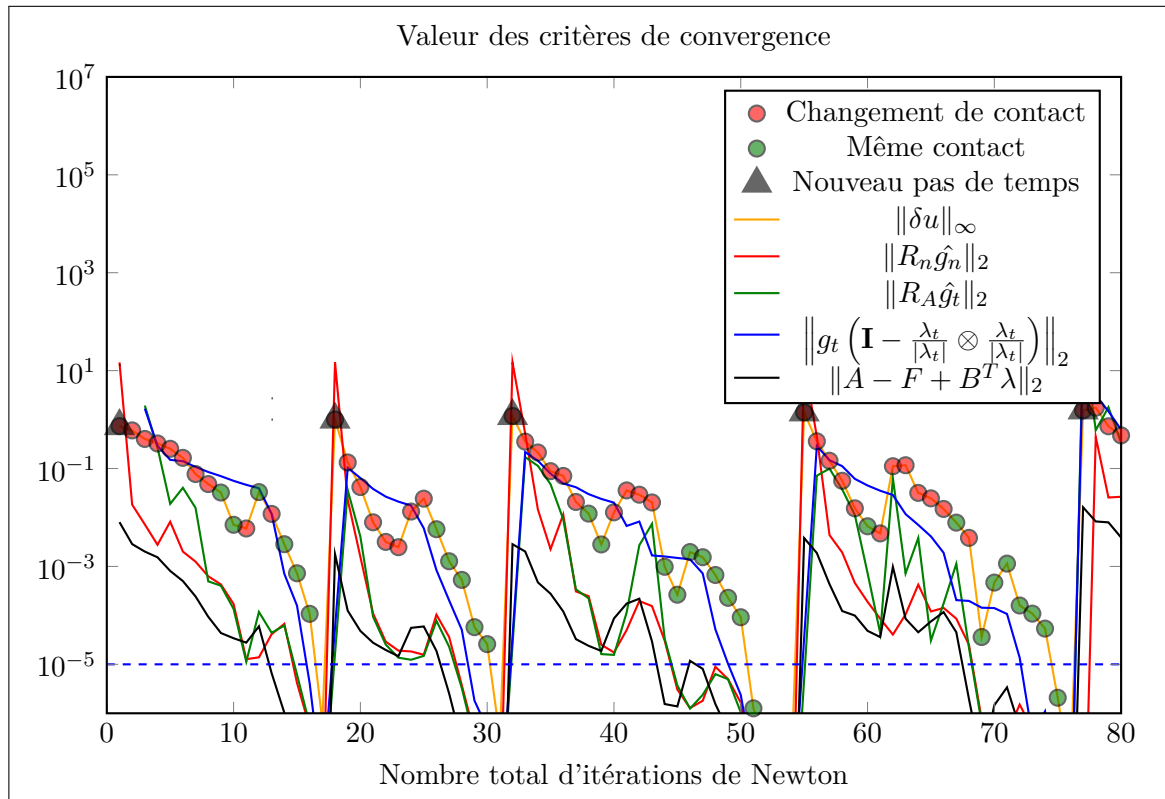


FIGURE 3.6: Valeurs des différents critères de convergence. Maillage à 16 916 sommets.

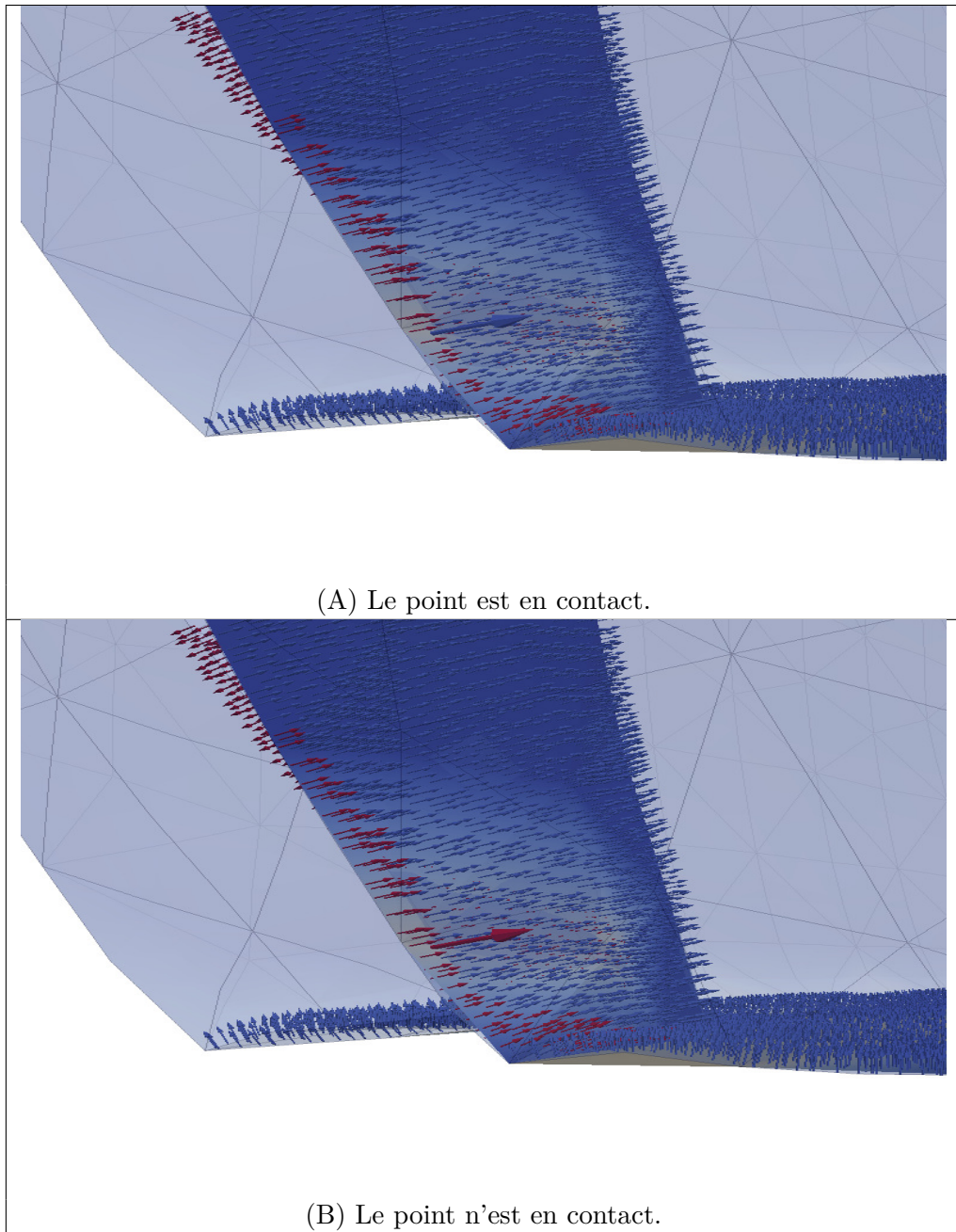


FIGURE 3.7: Un vecteur normal est dessiné en chaque point d'intégration ; de couleur bleu s'il a un vis-à-vis et de couleur rouge s'il est en porte-à-faux. Un des points alterne entre ces deux états, son vecteur est dessiné plus gros que les autres.

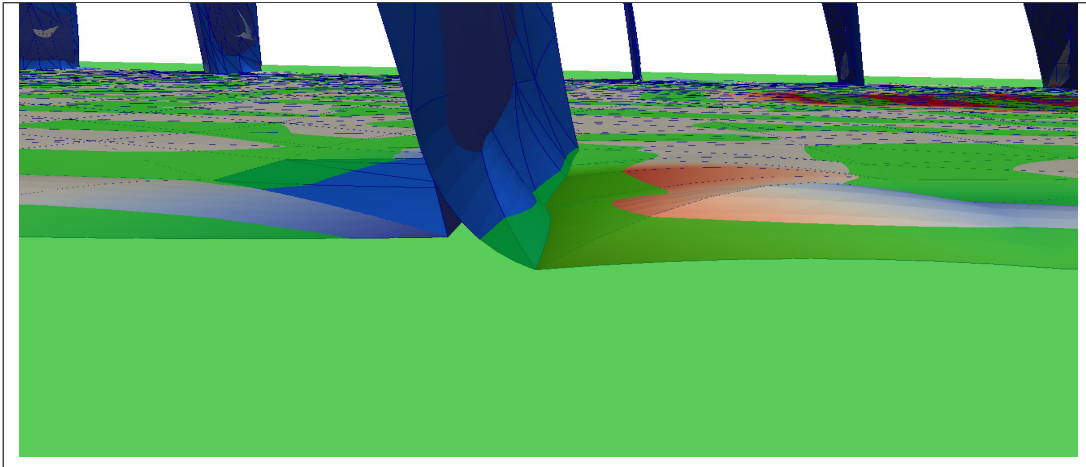


FIGURE 3.8: Le sol est en vert. Le gap intégré est nul sur la face du bas de la lamelle, mais pas le gap ponctuel.

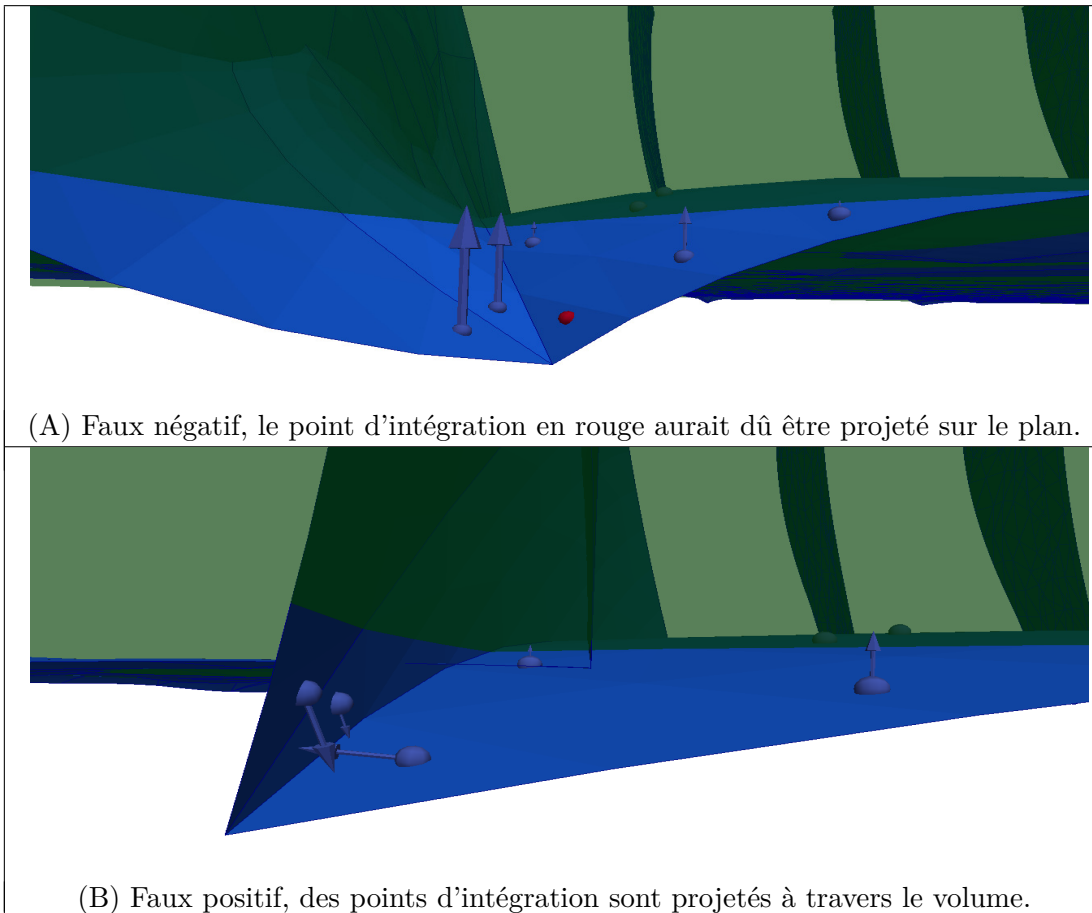


FIGURE 3.9: Mauvaise projection de points d'intégration



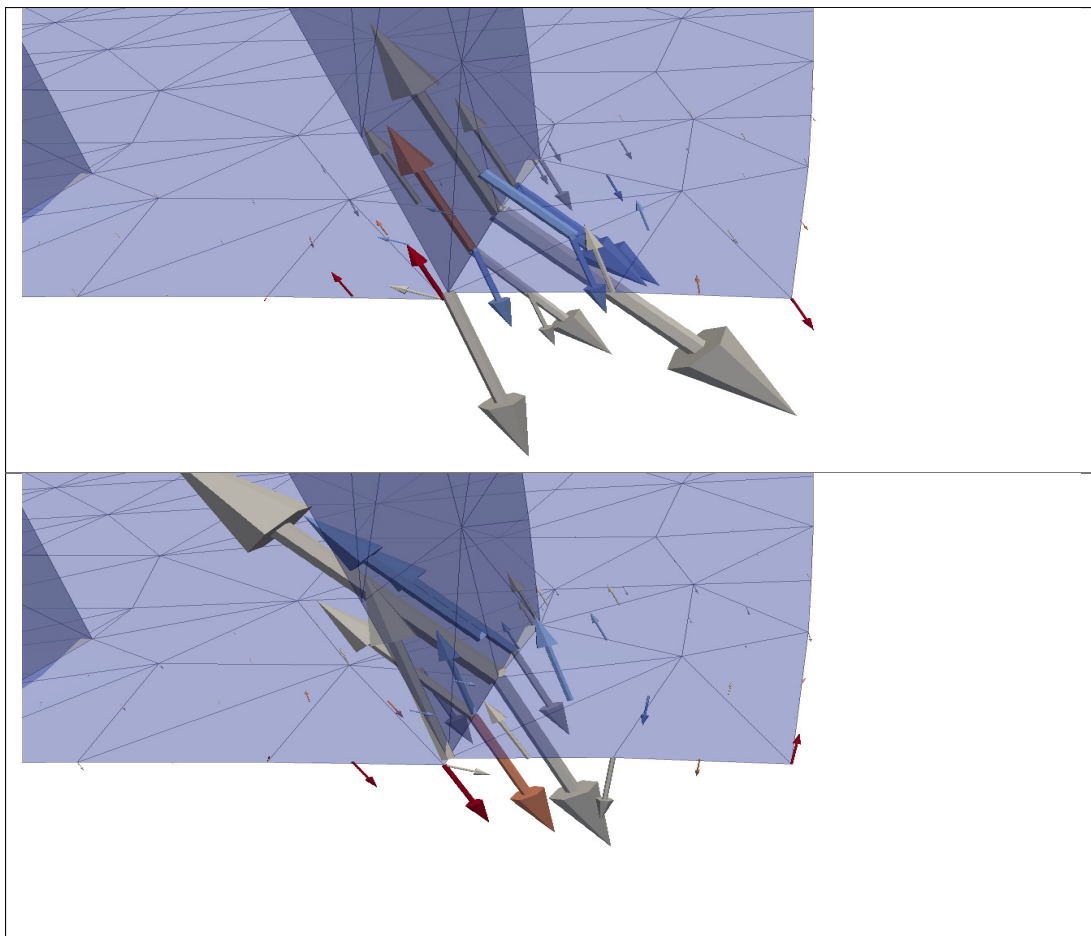


FIGURE 3.10: Oscillation du multiplicateur lorsqu'il a des inconnues au même sommet sur deux faces

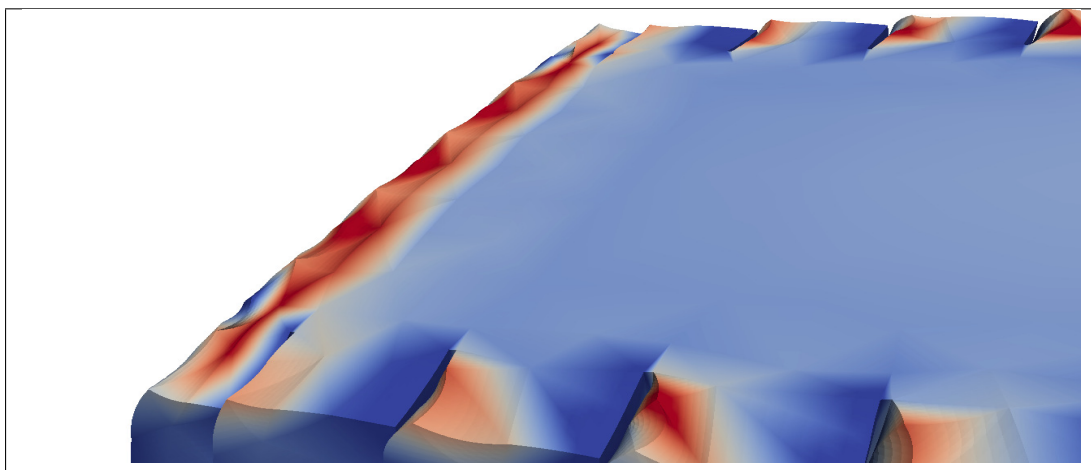


FIGURE 3.11: Instabilité du déplacement de type Crouzeix-Raviart au bord d'attaque

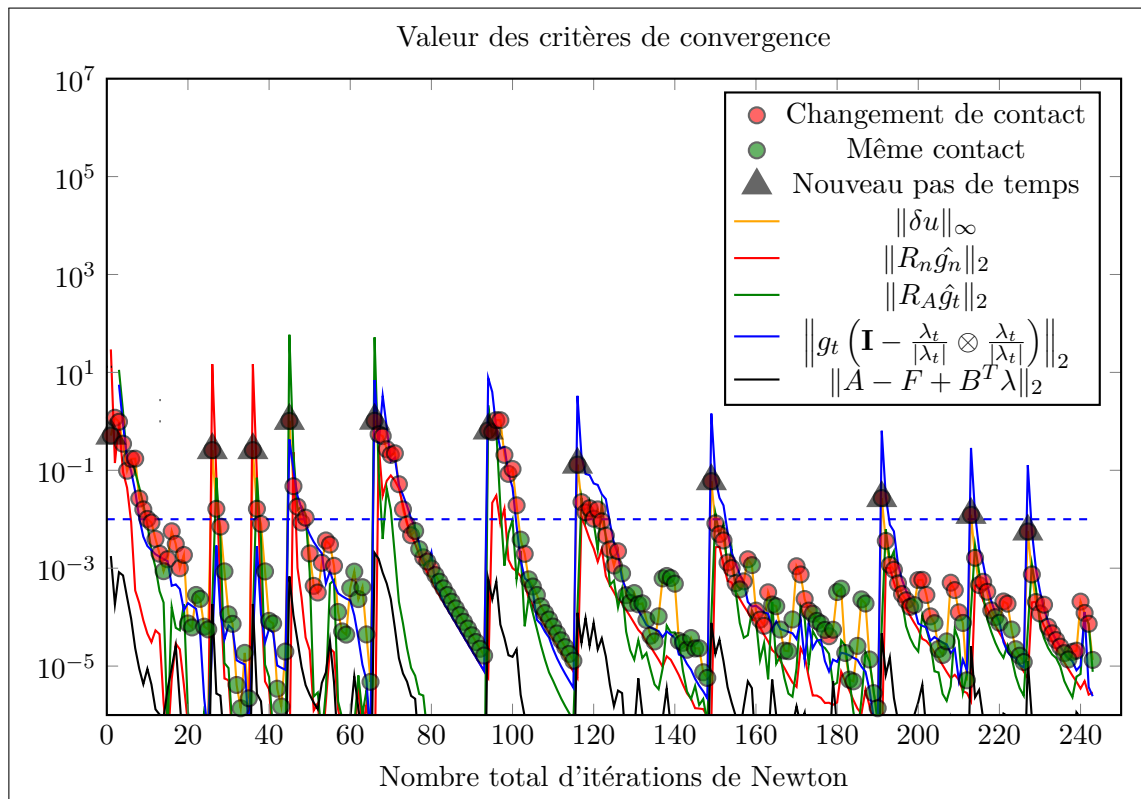


FIGURE 3.12: Valeurs des différents critères de convergence. Maillage à 16 916 sommets en matériau d'élasticité linéaire.

# Conclusion

Le présent travail a présenté de façon générique le problème d'élasticité sous la contrainte du contact frottant décrit par la loi de Coulomb. Nous avons par la suite développé dans le chapitre 2 quelques méthodes de résolution dans le cas sans frottement (où  $\mu = 0$ ). Les premiers algorithmes présentés, pénalisation (algorithme 1) et lagrangien augmenté régularisé (algorithme 3), sont des références auxquelles nous nous sommes comparés.

Déjà, le lagrangien augmenté avec stratégie de contraintes actives de l'algorithme 4 nous apparaît être une amélioration par rapport à la méthode la plus fréquemment présentée dans la littérature. C'est par contre l'algorithme du GCR appliqué sur le système couplé  $(\vec{u}, \vec{\lambda})$  en utilisant le préconditionneur (2.37) qui nous semble la principale contribution de ce chapitre.

Au chapitre 3, une composante tangentielle est ajoutée pour tenir compte du frottement. La première difficulté de ce chapitre réside dans le choix de la discrétisation. Nous avons apporté un soin particulier à la présentation des détails, en particulier la façon de décomposer le problème en parties normale et tangentielle. Alors que la communauté semble s'accorder sur l'usage des coordonnées curvilignes, nous avons préféré nous en priver, évitant ainsi plusieurs difficultés inhérentes à cette construction. Une fois ce travail de fond accompli, nous avons pu rapidement exhiber la factorisation (3.8) et le préconditionneur (3.10) qui l'accompagne. Il s'agit à notre avis d'une contribution novatrice qui simplifie grandement la résolution du contact frottant sans avoir recours à la pénalisation.

En plus de la discrétisation et de la résolution des systèmes linéaires, l'aspect non linéaire de ce problème a consommé beaucoup de nos énergies. L'alignement du glissement tangentiel avec le multiplicateur met particulièrement à l'épreuve nos algorithmes. La solution que nous y apportons à la section (3.5), qui permet de régulariser la condition d'alignement sans détériorer le conditionnement du système primal, nous a parue efficace et absente de la littérature.

Bien que les résultats numériques obtenus par les méthodes proposées dans cette thèse soient déjà intéressants, beaucoup de travail peut encore être fait pour les améliorer. Nous avons identifié plusieurs avenues que nous souhaitons rappeler ici.

— Plusieurs termes de linéarisation ont été omis dans nos calculs. Nous croyons que certains

d'entre eux pourraient accélérer la convergence de la méthode de Newton. Notamment, la dérivée de la normale n'est pas très compliquée à calculer. À l'opposé, le terme de formulation sur le bord de la zone de contact, esquissé dans la section 1.9.5, demande plus de travail informatique.

- Le contact entre deux surfaces déformables entraîne des difficultés d'intégration. Les quantités que nous intégrons n'étant pas nécessairement dérivables ni même continues, l'emploi de schémas d'intégration numérique cause des oscillations qui empêchent la convergence de la méthode de Newton. Pour nos calculs, nous avons contourné ce problème en raffinant nos schémas d'intégration, au prix d'un fort temps de calcul. La littérature offre déjà des solutions à ce problème en montrant comment, en projetant la géométrie des surfaces l'une sur l'autre, on peut créer des schémas d'intégration adaptés à cette situation.
- La matrice masse employée pour préconditionner le complément de Schur peut certainement être remplacée par une matrice tenant compte de la nature du matériau employé.
- Nous n'avons pas utilisé d'adaptation de maillage dans nos calculs, mais nous sommes persuadés que cela augmenterait beaucoup la précision des résultats. En plus d'adapter selon les déplacements et multiplicateurs calculés, on pourrait envisager de déplacer les nœuds près du bord de la zone de contact de façon à éviter complètement les éléments en porte-à-faux.
- Nous nous sommes limités à des multiplicateurs linéaires par morceaux. Nous avons notés dans notre bibliographie certains auteurs qui ont employé des multiplicateurs de plus haut degré.
- Nous avons employé une méthode en maître-esclave. Pour que cela soit possible il est nécessaire de connaître quelle surface peut entrer en contact avec quelle autre et de l'indiquer au logiciel. Il n'est pas toujours possible de déterminer cela *a priori*. Il serait intéressant d'élaborer une méthode où chacune des deux surfaces porte son propre multiplicateur. Évidemment, cela pose des problèmes de conditionnement si deux multiplicateurs imposent la même contrainte et quelque chose devrait alors être ajouté pour imposer l'égalité des multiplicateurs opposés. Nous pourrions aussi implanter dans notre logiciel une méthode qui détermine automatiquement et dynamiquement le maître et l'esclave.
- Nous nous sommes attaqués à une version quasi-statique du problème. Dans cette formulation, les termes d'inertie ont été négligés et la vitesse a été remplacée par des incréments de déplacement. Certaines simulations ne peuvent pas se permettre cette simplification et un travail subséquent devra être fait pour passer à une formulation dynamique, potentiellement couplée à une méthode de continuation.
- Dans tous nos calculs, nous avons appliqué un solveur direct (factorisation  $LU$ ) sur la partie  $P_1$  de la matrice de rigidité. Employer plutôt un solveur itératif bien précondi-

tionné permettrait de s'attaquer à des maillages beaucoup plus gros. Il reste cependant du travail à faire pour y arriver, en commençant par tester ce qui est disponible. La parallélisation de l'exécution de ces algorithmes permettrait aussi d'aller chercher en rapidité et en taille de maillage. Comme nos routines sont implantées au sein du MEF++ du GIREF, la majeure partie du travail nécessaire est déjà accomplie et validée.



# Bibliographie

- ALART, P. et CURNIER, A. (1987). Contact discret avec frottement : unicité de la solution, convergence de l'algorithme. *Document LMA-DME-EPFL*.
- ALART, P. et CURNIER, A. (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 92(3):353–375.
- BAILLET, L. et SASSI, T. (2003). Simulations numériques de différentes méthodes d'éléments finis pour les problèmes de contact avec frottement. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(11): 789–796.
- BAILLET, L. et SASSI, T. (2006). Mixed finite element methods for the Signorini problem with friction. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 22(6):1489–1508.
- BALAY, S., BROWN, J., BUSCHELMAN, K., EIJKHOUT, V., GROPP, W. D., KAUSHIK, D., KNEPLEY, M. G., MCINNES, L. C., SMITH, B. F. et ZHANG, H. (2011). PETSc users manual. Rapport technique ANL-95/11 - Revision 3.2, MSC ANL.
- BEN BELGACEM, F. (1999). The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 84(2):173–197.
- BENSOUSSAN, A. et KENNETH, P. (1968). Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, 2(3):13–25.
- BERNARDI, C., MADAY, Y. et PATERA, A. (1994). A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. *Dans Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, volume 299 de *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 13–51. Longman Sci. Tech., Harlow.
- BERTSEKAS, D. (1988). *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Computer Science and Appl. Mechanics Series. Academic Press, California.
- BOFFI, D., BREZZI, F. et FORTIN, M. (2013). *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer.

- BONET, J. et WOOD, D. R. (1997). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). Mixed and hybrid finite element methods. *Springer Series in Computational Mathematics*, 15.
- CAUCHY, A. L. (1827). De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de mathématiques*, 2:42–56. (Reproduit dans : Œuvres complètes, série 2, tome 7, pp. 60-78).
- CHAMBERLAND, É., FORTIN, A. et FORTIN, M. (2010). Comparison of the performance of some finite element discretizations for large deformation elasticity problems. *Computers & Structures*, 88(11-12):664 – 673.
- CHOLESKY, A.-L. (1910). Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.
- CHOULY, F. et HILD, P. (2013). On convergence of the penalty method for unilateral contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, 65(0):27 – 40.
- CIARLET, P. (1988). *Mathematical Elasticity volume I : Three-dimensional Elasticity*. North-Holland.
- COOREVITS, P., HILD, P., LHALOUANI, K. et SASSI, T. (2002). Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies. *Math. Comput.*, 71(237):1–25.
- COULOMB, C. A. (1821). *Théorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*. Bachelier.
- COURANT, R. et HILBERT, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. Interscience Publishers Inc., New York.
- CURNIER, A. (1984). A theory of friction. *Int. J. Solids Structures*, 20:637–647.
- CURNIER, A., HE, Q.-C. et KLARBRING, A. (1995). Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. Dans RAOUS, M., JEAN, M. et MOREAU, J., éditeurs : *Contact Mechanics*, pages 145–158. Springer US.
- de la VALLÉE POUSSIN, C. J. (1926). *Cours d'analyse infinitésimale*, volume 1. Gauthier-Villars.
- de SAXCÉ, G. et FENG, Z.-Q. (1991). New inequation and functional for contact with friction: the implicit standard material approach. *Mechanics of Structures and Machines*, 19(3):301–325.
- DELFOUR, M. C. et ZOLÉSIO, J. P. (2001). *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. the Society for Industrial and Applied Mathematic.



- DUFF, I. S. et S., P. (2005). Strategies for scaling and pivoting for sparse symmetric indefinite problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2):313–340.
- DUVAUT, G. (1998). *Mécanique des milieux continus*, 2<sup>e</sup> édition. Dunod, Paris. Masson, Paris 1990 pour la 1<sup>ère</sup> édition.
- DUVAUT, G. et LIONS, J.-L. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, France.
- D’YAKONOV, Y. (1966). The construction of iterative methods based on the use of spectrally equivalent operators. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 6(1): 14–46.
- EISENSTAT, S., ELMAN, H. et SCHULTZ, M. (1983). Variational iterative methods for non-symmetric systems of linear equations. *J. Num. Anal.*, 20(2):345–357.
- EL MALIKI, A. (2007). *Résolution de problèmes aux limites à l’aide de méthodes itératives hiérarchiques à préconditionneur variable*. Thèse de doctorat, Université laval, Québec.
- EL MALIKI, A., FORTIN, M., DETEIX, J. et FORTIN, A. (2013). Preconditioned iteration for saddle-point systems with bound constraints arising in contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 254(0):114 – 125.
- EL MALIKI, A., FORTIN, M., TARDIEU, N. et FORTIN, A. (2010). Iterative solvers for 3D linear and nonlinear elasticity problems: Displacement and mixed formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(13):1780–1802.
- ELMAN, H., HOWLE, V. E., SHADID, J., SHUTTLEWORTH, R., et TUMINARO, R. (2006). Block preconditioners based on approximate commutators. *J. Sci. Comput.*, 27:1651–1668.
- ELMAN, H. C., SILVESTER, D. J. et WATHEN, A. J. (2005). *Finite Elements and Fast Iterative Solvers : with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- FORTIN, A. et GARON, A. (2012). *Les éléments finis: de la théorie à la pratique*. 400 pages, En préparation.
- FORTIN, M. (1975). Minimization of some non-differentiable functionals by the augmented Lagrangian method of Hestenes and Powell. *Appl. Math. Optim.*, 2(3):236–250.
- FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1982). *Méthodes de lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod-Bordas, Paris.
- FORTIN, M., ROBITAILLE, C., FORTIN, A. et REZGUI, A. (2007). Frictional contact in solid mechanics. Dans JELTSCH, R. et WANNER, G., éditeurs : *6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, pages 131–154, Zurich.

- GERMAIN, P. (1973). *Cours de Mécanique des milieux continus, Théorie générale*. Masson.
- HASLINGER, J., HLAVÁČEK, I. et NEČAS, J. (1996). Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. Dans CIARLET, P. et LIONS, J.-L., éditeurs : *Handbook of Numerical Analysis*, volume 4, pages 313–485, Amsterdam. Elsevier Science B.V.
- HERTZ, H. (1882). Über die berührung fester elastischer körper. *J. Reine Angew. Math.*, 92:156–171.
- HESTENES, M. R. (1969). Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4(5):303–320.
- HILD, P. (2000). Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184:99–123.
- HILD, P. (2006). Solution multiplicity and stick configurations in continuous and finite element friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3):57 – 65.
- HILD, P. (2011). A sign preserving mixed finite element approximation for contact problems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 21(3):487–498.
- HILD, P. et LABORDE, P. (2002). Quadratic finite element methods for unilateral contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, 41(3):401–421.
- HINTERMÜLLER, M., ITO, K. et KUNISCH, K. (2002). The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. *SIAM Journal on Optimization archive*, 13(3).
- HÜEBER, S., STADLER, G. et WOHLMUTH, B. I. (2008). A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with Coulomb friction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(2):572–596.
- ITO, K. et KUNISCH, K. (2008). *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. Advances in design and control. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- KIKUCHI, N. (1982). A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:343–350.
- KIKUCHI, N. et ODEN, J. (1988). *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- KIKUCHI, N. et SONG, Y. J. (1981). Penalty/finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, XXXIX:No. 1.

- KLÜPPEL, M. et HEINRICH, G. (2000). Rubber friction on self-affine road tracks. *Rubber Chemistry and Technology*, 73:578–606.
- KONYUKHOV, A. et SCHWEIZERHOF, K. (2004a). Contact formulation via a velocity description allowing efficiency improvements in frictionless contact analysis. *Comput. Mech.*, 33:165–173.
- KONYUKHOV, A. et SCHWEIZERHOF, K. (2004b). Large deformation frictional contact formulation based on a velocity description. *PAMM*, 4(1):334–335.
- KORN, A. (1907). Sur les équations de l'élasticité. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 3*, 24:9–75.
- KUHN, H. et TUCKER, A. (1950). Non-linear programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492.
- LAURSEN, T. A. (1992). *Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements*. Thèse de doctorat, Stanford University.
- LAURSEN, T. A. (2002). *Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer.
- LAURSEN, T. A. et OANCEA, V. (1994). Automation and assessment of augmented Lagrangian algorithms for frictional contact problems. *J. Appl. Mech.*, 61.
- LIONS, J.-L. (1968-1969). Sur les problèmes unilatéraux. *Séminaire N. Bourbaki*, 350:55–77.
- LORIDAN, P. (1971). Sur la minimisation de fonctionnelles convexes par pénalisation. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, 5:117–133.
- LUENBERGER, D. G. (1984). *Linear and Non Linear Programming*. Addison-Wesley. seconde édition.
- LUENBERGER, D. G. et YE, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer. 3<sup>e</sup> édition.
- MARCEAU, D. (2001). *Modélisation du contact tridimensionnel avec frottement en grande transformation et son application à l'étude des dispositifs d'ancrage multitorons*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec.
- MOREAU, J.-J. (1970). Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, pages 608–611.
- PERSSON, B. (2000). *Sliding Friction, Physical Principles and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 2nd edition.

- PIETRZAK, G. (1997). *Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems*. Thèse de doctorat, LMAF/DGM/EPFL, Lausanne.
- PIETRZAK, G. et CURNIER, A. (1999). Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177:351–381.
- POULIOS, K. et RENARD, Y. (2014). A non-symmetric integral approximation of large sliding frictional contact problems of deformable bodies based on ray-tracing.
- POWELL, M. J. D. (1972). *A Method for the Non-Linear Constraints in Minimization Problems Optimization*. Academic Press, New York.
- RENARD, Y. (2013). Generalized Newton’s methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 256:38–55.
- SAAD, Y. et SCHULTZ, M. (1986). Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3): 856–869.
- SIGNORINI, A. (1933). Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze*.
- SIMO, J. C. et LAURSEN, T. A. (1992). An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 42:97–116.
- TEMIZER, İ., WRIGGERS, P. et HUGHES, T. (2012). Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212(0):115–128.
- TUR, M., FUENMAYOR, F. et WRIGGERS, P. (2009). A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37–40):2860–2873.
- VALLÉE, C. (1978). Lois de comportement élastique isotropes en grandes déformations. *Int. J. Engng. Sci.*, 16-7:451–457.
- VOLTERRA, V. (1907). Sur l’équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, série 3*, 24:401–517.
- WANG, S. P. et NAKAMACHI, E. (1997). The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(19): 3665–3685.

- WOHLMUTH, B. (2011). Variational consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. *Acta Numerica*, 20:569–734.
- WOHLMUTH, B. I. (2000). A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(3):989–1012.
- WRIGGERS, P. (1995). Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2(4).
- WRIGGERS, P. (2006). *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- WRIGGERS, P. et LAURSEN, T. A., éditeurs (2007). *Computational Contact Mechanics*, volume 498. Springer, Vienne.
- WRIGGERS, P. et ZAVARISE, G. (1993). Application of augmented lagrangian techniques for non-linear constitutive laws in contact interfaces. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:815–824.
- YOUBISSI, F. M. (2006). *Résolution par éléments finis du problème de contact unilatéral par des méthodes d'optimisation convexe*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec.
- YSERENTANT, H. (1986). On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numerische Mathematik*, 49(4):379–412.
- ZAVARISE, G. et WRIGGERS, P. (1999). A superlinear convergent augmented Lagrangian procedure for contact problems. *Engineering Computations*, 16(1):88–119.



# Index

- $(\cdot)^-, 41$
- $B, 33$
- $B^{\text{ext}}, 32$
- $B^{\text{int}}, 32$
- $B_n, 27$
- $B_n^{\text{ext}}, 27$
- $B_t, 32$
- $B_t^{\text{ext}}, 32$
- $B_t^{\text{int}}, 32$
- $B_p, 56$
- $B_{t \times}, 80$
- $B_{t \times}^{\text{ext}}, 80$
- $E, 8$
- $E^{\mathcal{C}}, 74$
- $F, 21$
- $I^{\perp \tau}, 74$
- $I_1, 6$
- $I_2, 6$
- $I_3, 6$
- $I_n, 33$
- $I_t, 32$
- $J, 6, 20$
- $L, 34$
- $L^n, 25$
- $L_a^t, 77$
- $M_p, 56$
- $M_{\lambda_n}, 24$
- $M_{\bar{\lambda}}, 75$
- $P, 10$
- $P_1, 22$
- $P_1 \text{ iso } P_2, 23$
- $P_2, 22$
- $P_n, 41$
- $R_A, 38$
- $R_C, 28$
- $R_G, 38$
- $R_{SC}, 28$
- $V_h, 19$
- $\Gamma, 5$
- $\Gamma_C, 11$
- $\Gamma_D, 10$
- $\Gamma_N, 10$
- $\Gamma_P, 10$
- $\Omega, 5$
- $\Omega_h, 19$
- $\Psi, 8$
- $\mathcal{C}, 6$
- $\mathbf{E}, 7$
- $\mathbf{F}, 6$
- $\mathbf{I}, 6$
- $\mathbf{S}, 7$
- $\mathbf{\Pi}, 7$
- $\mathbf{\Pi}_N, 17$
- $\sigma, 7$
- $\varepsilon, 7$
- $\delta \vec{u}, 42$
- $\eta_m, 46$
- $\gamma, 5$
- $\gamma_C, 11$
- $\kappa, 9$
- $\lambda, 8$
- $(\mathcal{M}_{\lambda_n})^3, 31$

$\hat{I}_1$ , 9  
 $\hat{I}_2$ , 9  
 $\hat{I}_3$ , 9  
 $\hat{C}$ , 9  
 $\hat{S}$ , 55  
 $\vec{\eta}$ , 33  
 $\vec{\lambda}$ , 31  
 $\vec{\lambda}_i$ , 36  
 $\vec{\sigma}_t$ , 14  
 $\vec{\varphi}_j^u$ , 19  
 $\vec{\varphi}_{i,1}^\lambda$ , 31  
 $\vec{a}_i$ , 84  
 $\vec{g}_t(x)$ , 29  
 $\vec{r}$ , 16  
 $\vec{t}_0$ , 10  
 $\vec{u}$ , 5, 20  
 $\vec{v}$ , 20  
 $\mathcal{A}$ , 57  
 $\mathcal{E}_i^A$ , 84  
 $\mathcal{HP}(A')$ , 56  
 $\mathcal{L}\vec{g}_t$ , 15  
 $\mathcal{MHP}(\mathcal{A})$ , 57  
 $\mathcal{M}^p$ , 56  
 $\mathcal{M}_{\lambda_n}$ , 22  
 $\mathcal{P}^{-1}$ , 53  
 $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ , 79  
 $\mathcal{SSOR}$ , 56  
 $\mathcal{S}$ , 54  
 $\mathcal{S}_p$ , 57  
 $\mathcal{T}_h$ , 19  
 $\mu$ , 8, 14  
 $\mu_{01}$ , 9  
 $\mu_{10}$ , 9  
 $\nabla_X$ , 6  
 $\nabla_x$ , 6  
 $\nu$ , 8  
 $\omega$ , 5  
 $\pi$ , 12  
 $\rho$ , 16  
 $\rho_n$ , 45  
 $\sigma_n$ , 14  
 $\varphi_j^\lambda$ , 22  
 $\varphi_i^p$ , 56  
 $\varphi_j^u$ , 19  
 $b_{ij}^n$ , 27  
 $g_n$ , 12  
 $o$ , 26  
 $p$ , 9  
 $q_n$ , 46  
 $qt$ , 76  
 $r_n$ , 41  
 $r_t$ , 77  
 $s$ , 15  
 $s_i$ , 33  
 $x$ , 6  
 $A'$ , 21  
 $\delta\vec{u}_k$ , 42  
 $\eta_{ni}$ , 33  
 $\eta_{nj}$ , 46  
 $\lambda_{ni}$ , 27, 36  
 $\vec{n}_i$ , 31  
 $\vec{n}$ , 20  
 $\vec{\eta}_i$ , 33  
 $\vec{\eta}_{ti}$ , 33  
 $\vec{\lambda}_{ti}$ , 37  
 $\vec{\tau}_1$ , 30  
 $\vec{u}_p$ , 28  
 $\vec{u}_j$ , 20  
 $\vec{v}_j$ , 20  
 $\mathcal{M}_{\lambda_{n+}}$ , 23  
 $b_{ij}^{n,\text{ext}}$ , 27  
 $g_{nj}$ , 24  
 $gt_{i,\alpha}$ , 31  
 $q_{nj}$ , 46  
 $qt_j$ , 76  
 $u_{j,1}$ , 20  
 $v_{j,1}$ , 20  
 $\vec{\lambda}_{ti}^a$ , 78



*active set strategy*, 50  
 approximation non conforme, 25  
*bulk modulus*, 9  
 cône de Coulomb, 14  
 cône positif des multiplicateurs normaux, 23  
 Cauchy  
     tenseur des contraintes de, 7  
 coefficient de pénalisation, 41  
 coefficient de Poisson, 8  
 coefficients de Lamé, 8  
 complément de Schur, 54, 75  
 contact, 12  
 contraintes actives, 50  
 coordonnées curvilignes convectées, 30  
 couche limite, 66  
 cylindre de Tresca, 15  
 déformation, 6  
 déplacement cinématiquement admissible, 11  
 déplacement infinitésimal admissible, 17  
 dérivée de Lie, 15  
 ddl, 20  
 DDLs, 61  
 distance au bord, 22  
 distances intégrées, 24  
 état de contact, 50  
 Euler  
     tenseur des contraintes de, 7  
 formulation variationnelle, 16  
*gap* intégré, 24  
 GCR, 52  
 generalized conjugate residual, 52  
 glissement tangentiel ponctuel, 29  
 gradient de la déformation, 6  
 Green-Lagrange, tenseur de, 7  
 Green-Saint-Venant, tenseur de, 7  
 hyperélastique, 8  
 invariants, 6  
 Kuhn-Tucker, 49  
 lagrangien, 47  
 lagrangien à trois champs pour la non-pénétration, 47  
 lagrangien augmenté pour la non-pénétration, 47  
 lagrangien augmenté tangentiel à trois champs, 77  
 Lamé, coefficients de, 8  
*Least Squares Commutator*, 55  
 Lie, dérivée de, 15  
*LSC*, 55  
 matrice masse, 24  
 matrice masse des multiplicateurs, 55  
 module d'élasticité, 8  
 module d'Young, 8  
 module de compressibilité, 9  
 module de rigidité à la compression, 9  
 Mooney-Rivlin, 9  
 multiplicateur augmenté, 49  
 multiplicateur tangentiel augmenté, 79  
 pas de chargement, 16  
 Piola-Kirchhoff  
     premier tenseur, 7  
     second tenseur, 7  
 point de contact, 12  
 Poisson, coefficient de, 8  
 positivité faible, 24  
 potentiel d'énergie élastique, 8  
 préconditionneur, 53  
 préconditionneur hiérarchique, 56  
 préconditionneur par commutateur aux moindres carrés, 55

pression de contact, 42  
principe de Courant-Hilbert, 48  
problème de Signorini, 18  
projection horizontale sur le cône de Coulomb, 79

quasi-statique, 15

résidu conjugué généralisé, 52  
renversement, 11

second tenseur de Piola-Kirchhoff, 7  
seuil de Tresca, 15  
solution non conforme, 31  
strain tensor, 6

tenseur

- de Green-Lagrange, 7
- de Green-Saint-Venant, 7
- des contraintes de Cauchy, 7
- des déformations, 7
- des déformations de Cauchy-Green, 6
- des dilatations, 6
- premier de Piola-Kirchhoff, 7
- second de Piola-Kirchhoff, 7

transformée de Piola, 17  
travail virtuel, 17

Young

- module, 8