

ALEXANDRE VACHON

# Trajectographie d'un lanceur de satellites basée sur la commande prédictive

Thèse présentée  
à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de doctorat en génie électrique  
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (PhD)

FACULTÉ DES SCIENCES ET GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2013

©Alexandre Vachon, 2013

## Résumé

Cette thèse traite de la trajectographie exo-atmosphérique d'un lanceur. Cette problématique repose sur la résolution d'un problème d'optimisation contraint : le problème aux deux bouts. Ce dernier consiste à trouver les actions à prendre afin d'atteindre la position et la vitesse désirées en consommant le moins d'énergie possible. Ces actions doivent respecter les contraintes imposées par la dynamique et la structure du véhicule. En plus, dans le cas d'un lanceur, le contrôle s'effectue uniquement en modifiant l'orientation de la poussée. Pour résoudre ce problème, le projet de doctorat est divisé en trois parties distinctes : la modélisation de la dynamique, l'obtention d'une trajectoire de référence et la fonction de guidage.

La première partie, la modélisation, consiste à obtenir un modèle précis et réaliste de la dynamique de translation d'un lanceur. Elle passe donc par l'application de la seconde loi de Newton sur le centre de masse du lanceur. Dans cette thèse, ceci est effectué en utilisant trois représentations différentes, dont une nouvelle utilisant un quaternion qui permet de combler le vide entre les deux représentations existantes.

À la suite de l'obtention d'un modèle du véhicule à guider, il devient possible de définir une trajectoire de référence régie par cette dynamique. Pour y parvenir, ce projet propose une optimisation directe où l'orientation de la poussée est discrétisée et correspond aux inconnues du problème d'optimisation. Le critère de ce problème d'optimisation inclut des termes utilisant des connaissances *a priori* de la trajectoire pour améliorer les propriétés de convergence. Le problème d'optimisation inclut également des contraintes, relaxées par des variables d'écart, sur l'orbite d'injection.

La trajectoire résultante est utilisée comme consigne dans une fonction de guidage par suivi de trajectoire. Le suivi de trajectoire est une façon contournée de traiter le problème aux deux bouts et d'accélérer la résolution du problème de guidage afin de s'insérer dans les capacités de calcul embarqué. Les algorithmes développés dans cette thèse sont basés sur la commande prédictive où les sorties du modèle prédictif sont les paramètres orbitaux instantanés de la trajectoire. Le premier algorithme utilise un modèle non-linéaire de prédiction alors que les deux autres sont basés sur une représentation linéaire variante dans le temps et sur une représentation linéaire fractionnelle. Ces trois algorithmes sont comparés à une solution classique en guidage de lanceur qui résout directement le problème aux deux bouts. Bien que les algorithmes développés produisent une orbite plus près de celle désirée et y parviennent en consommant moins de carburant, le temps de calcul nécessaire à leur résolution et leur piètre robustesse font en sorte qu'ils ne constitue pas une alternative intéressante à la solution de référence.

## Abstract

This thesis deals with the exo-atmospheric trajectory of a space launcher. The solution is obtained by solving a constrained optimization problem : the two-point boundary value problem. The solution is the required actions to reach the desired position and velocity while consuming the least energy as possible. These actions must comply with the constraints imposed by the dynamics and the structure of the vehicle. Also, for a space launcher, the control is limited to the thrust orientation. To solve this problem, this project is divided into three distinct parts : modeling the dynamics, obtaining a reference trajectory and the guidance function.

The first part, the modeling, is the definition of an accurate and realistic model of the space launcher translational dynamics. Therefore, it requires the application of Newton's second law on the launcher center of mass. In this thesis, this is carried out using three different representations. The representation using a full quaternion is new to this field of application and fills the hole between the two others.

With the model of the vehicle to be guided, it becomes possible to define a reference trajectory governed by this model. To do it, this project proposes a direct optimization where the thrust orientation is discretized and becomes the unknown of the optimization problem. The criterion of this optimization problem includes terms for *a priori* knowledge of the trajectory improving the convergence properties of the optimization. The optimization problem also includes constraints, relaxed by slack variables, on the injection orbit.

The resulting trajectory is used as reference in a trajectory tracking guidance function. The trajectory tracking is a way to circumvent the resolution of the two-point boundary value problem, which accelerates the resolution to fit in on-board computing capabilities. The algorithms developed in this thesis are based on predictive control in which the outputs of predictive model are the instantaneous orbital parameters of the trajectory. A first algorithm uses a non-linear model for prediction while two others are rather based on a linear time-varying representation and a linear fractional representation. These three algorithms are compared to a conventional space launcher guidance solution, which directly solves the *two-point boundary value problem*. Even if the developed algorithms give a more accurate orbit and a less consuming trajectory, their computational time and poor robustness properties do not make them a viable alternative to the comparison solution.

*À l'amour de ma vie, Caroline Nachez*

## Remerciements

En premier lieu, il convient de remercier mon directeur de recherche, M. André Desbiens, qui m'a orienté convenablement, principalement en m'introduisant une méthode de commande qui est finalement devenue l'élément central de mes travaux. Je me dois également de présenter des sincères remerciements à M. Eric Gagnon du RDDC-Valcartier pour m'avoir laissé explorer une méthode différente, mais en me ramenant vers les besoins du projet de lanceur. Ma co-directrice, Mme Caroline Bérard, qui s'est jointe au projet en cours de chemin afin d'apporter une aide, plus qu'utile, sur certains points spécifiques. MM. David Saussié et Jean de Lafontaine d'avoir pris le temps de lire ma thèse et de me donner un retour complet et très détaillé. Les commentaires de ces cinq personnes ont également permis d'étoffer mes travaux.

Je me dois également de remercier MM. Eric Gagnon et Rocco Farinaccio et le RDDC-Valcartier d'avoir créé et soutenu le projet de lanceur canadien. Il ne reste maintenant qu'à espérer que vos efforts soient reconnus pour que ce projet prenne l'ampleur qui lui est due, encore plus avec les multiples reports des derniers mois de SAPHIRE.

La thèse étant autant une épreuve personnelle que technique, plusieurs personnes m'ont permis d'en voir la fin sans être relié directement à mes travaux. Mes remerciements vont donc vers mes collègues présents et passés du LOOP (Eric Duplain, Danny Calisaya, Yanick Beaudoin, Alberto Riquelme, Soufiane Hallab, Amir Vasebi, et tous les autres) qui ont mis de l'ambiance dans notre sous-sol de l'université. À toutes mes équipes de volley-ball des trois dernières années, ainsi que le groupe d'arbitres de Hockey-Québec-Centre qui m'ont aidé à conserver une vie en dehors de mes travaux de recherche. En dernier, mais certainement pas le moindre, à ma famille qui m'a toujours encouragé à me dépasser et à suivre mes choix et à ma conjointe, Caroline Nacheff, qui, de par sa présence permanente à mes côtés, m'a motivé à terminer cette épreuve.

Le support financier de ce projet a été fourni par le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada, le Fonds de Recherche du Québec - Nature et Technologies et Numérica Technologies Inc.

*La bêtise est nettement supérieure à l'intelligence car toute l'intelligence du monde ne permettra jamais de comprendre la bêtise universelle, tandis qu'un peu de bêtise suffit amplement à ne pas comprendre quoi que ce soit d'intelligent. [Philippe Geluck]*

# Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Remerciements	v
Table des matières	vi
Liste des tableaux	x
Liste des figures	xii
Notation	xvi
<b>1 Les lanceurs de satellites et leurs boucles de guidage, navigation et commande</b>	<b>1</b>
1.1 Classification des lanceurs . . . . .	4
1.2 Boucles de Guidage, Navigation et Commande . . . . .	5
1.2.1 Fonction de navigation . . . . .	6
1.2.2 Fonction de commande . . . . .	7
1.2.3 Fonction de guidage . . . . .	7
1.2.4 Connaissances <i>a priori</i> . . . . .	8
1.3 Lanceur et mission du projet . . . . .	8
1.3.1 Mission étudiée . . . . .	8
1.3.2 Configuration étudiée . . . . .	9
1.3.3 Phases de la trajectoire . . . . .	10
1.3.4 Point de sortie de l'atmosphère . . . . .	12
1.4 Objectifs de la thèse . . . . .	12
1.5 Plan de la thèse . . . . .	14
<b>2 Modélisation de la dynamique de translation</b>	<b>16</b>
2.1 Systèmes de coordonnées utilisés . . . . .	18
2.1.1 Système de coordonnées J2000 . . . . .	18
2.1.2 Système de coordonnées terrestre . . . . .	19

2.1.3	Système de coordonnées local . . . . .	20
2.1.4	Système de coordonnées de la trajectoire . . . . .	21
2.1.5	Second système de coordonnées sur la trajectoire . . . . .	22
2.1.6	Système de coordonnées de la poussée . . . . .	23
2.1.7	Système de coordonnées du corps . . . . .	23
2.1.8	Système de coordonnées aérodynamique . . . . .	24
2.1.9	Système de coordonnées aérobalistique . . . . .	25
2.1.10	Relation entre les systèmes de coordonnées . . . . .	26
2.1.11	Relation entre les angles d'orientation de la poussée et les angles d'orientation du lanceur . . . . .	28
2.2	Forces agissant sur le lanceur . . . . .	30
2.2.1	Force gravitationnelle terrestre . . . . .	31
2.2.2	Force de poussée . . . . .	32
2.2.3	Forces aérodynamiques . . . . .	33
2.2.4	Forces perturbatrices négligées . . . . .	34
2.3	Développement des approches de modélisation . . . . .	35
2.3.1	Modélisation par l'approche vectorielle . . . . .	36
2.3.2	Modélisation par l'approche angulaire . . . . .	38
2.3.3	Modélisation par quaternion complet . . . . .	43
2.3.4	Passage de l'approche angulaire vers les autres approches . . . . .	49
2.3.5	Comparaison des différentes modélisations . . . . .	54
2.4	Paramètres orbitaux . . . . .	58
2.4.1	Définitions des paramètres orbitaux . . . . .	59
2.4.2	Passage de l'approche angulaire aux paramètres orbitaux . . . . .	60
2.5	Modèle à pseudo-cinq degrés de liberté . . . . .	65
2.6	Conclusion . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Définition d'une trajectoire de lancement par méthode directe</b>	<b>68</b>
3.1	Commentaires sur la partie endo-atmosphérique . . . . .	71
3.1.1	Manœuvre d'inclinaison gravitationnelle . . . . .	72
3.2	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	73
3.2.1	Manœuvres dans le plan orbital . . . . .	74
3.2.2	Manœuvres hors plan orbital . . . . .	78
3.3	Analyse de la formulation . . . . .	79
3.3.1	Résultats sans manœuvres hors plan orbital . . . . .	80
3.3.2	Résultats avec les manœuvres hors plan orbital . . . . .	87
3.4	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Commande prédictive</b>	<b>92</b>
4.1	Fondements et principes . . . . .	93
4.1.1	Formulation du problème de base . . . . .	95

4.2	Étude de la stabilité de la commande prédictive . . . . .	97
4.2.1	Preuve de la stabilité du mode duel . . . . .	98
4.3	Conclusion . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Guidage basé sur la commande prédictive non-linéaire</b>	<b>105</b>
5.1	Choix du modèle . . . . .	109
5.1.1	Équations d'état . . . . .	110
5.1.2	Équations de sortie . . . . .	111
5.1.3	Modèle complet . . . . .	112
5.2	Définition du critère et des contraintes . . . . .	113
5.2.1	Formulation du critère . . . . .	114
5.2.2	Formulation des contraintes . . . . .	114
5.3	Formulation du problème . . . . .	116
5.4	Analyse de l'algorithme . . . . .	119
5.4.1	Effet de l'horizon de contrôle . . . . .	122
5.4.2	Effet des matrices de pondérations variantes . . . . .	125
5.4.3	Effet des contraintes de formage . . . . .	128
5.4.4	Effet de la variation de la précision . . . . .	132
5.4.5	Comparaison avec une solution de référence . . . . .	135
5.5	Conclusion . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Modélisation multi-modèles linéaires de la translation d'un lanceur</b>	<b>138</b>
6.1	Linéarisation de la translation d'un lanceur . . . . .	139
6.1.1	Modèle linéaire tangent . . . . .	142
6.1.2	Étude de la linéarité du modèle . . . . .	144
6.2	Multi-modèles linéarisés du lanceur . . . . .	145
6.2.1	Modèle linéaire à paramètres variants . . . . .	146
6.2.2	Représentation fractionnelle linéaire . . . . .	147
6.2.3	Application à la translation d'un lanceur . . . . .	151
6.3	Validation des modélisations . . . . .	155
6.4	Conclusion . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles linéaires</b>	<b>161</b>
7.1	Choix du modèle . . . . .	162
7.1.1	Prédiction utilisant la représentation linéaire variante dans le temps . . . . .	163
7.1.2	Prédiction utilisant la représentation linéaire fractionnelle . . . . .	164
7.2	Formulation du problème . . . . .	165
7.2.1	Preuve de la stabilité . . . . .	168
7.3	Analyse des résultats . . . . .	170
7.3.1	Résultats d'une simulation nominale . . . . .	173

7.3.2	Étude de la robustesse . . . . .	176
7.4	Conclusion . . . . .	180
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>182</b>
8.1	Principales contributions . . . . .	184
8.2	Suite possible à l'étude . . . . .	186
8.3	Publications . . . . .	187
8.3.1	Articles de journaux . . . . .	188
8.3.2	Compte-rendus de conférences . . . . .	188
8.3.3	Rapports techniques du RDDC - Valcartier . . . . .	188
	<b>Bibliographie</b>	<b>190</b>
<b>A</b>	<b>Algèbre des quaternions</b>	<b>202</b>
<b>B</b>	<b>Forces fictives</b>	<b>206</b>
<b>C</b>	<b>Résolution d'un problème aux deux bouts par la commande optimale</b>	<b>209</b>
<b>D</b>	<b>Résolution du problème de Kepler</b>	<b>212</b>
<b>E</b>	<b>Solution pour l'hypothèse de la gravité linéaire</b>	<b>217</b>
<b>F</b>	<b>Preuve de l'optimalité de la solution à tangente de l'angle de tangage linéaire</b>	<b>227</b>

# Liste des tableaux

1.1	Pays ayant tenté une satellisation par leur propre moyen . . . . .	2
1.2	Catégories des lanceurs . . . . .	4
1.3	Point de sortie de l'atmosphère . . . . .	13
2.1	Résumé des caractéristiques des trois approches . . . . .	56
3.1	Modifications au point de sortie de l'atmosphère . . . . .	80
3.2	Orbites obtenues, à partir d'une mauvaise supposition initiale . . . . .	83
3.3	Résultats des optimisations avec différentes durées pour les paliers . . . . .	84
3.4	Comparaison des orbites en fonctions du modèle d'optimisation . . . . .	87
5.1	Résultats obtenus avec un horizon de contrôle court . . . . .	123
	(a) Orbite de dérive . . . . .	123
	(b) Orbite à l'injection . . . . .	123
5.2	Temps de calcul total obtenus avec un horizon de contrôle court . . . . .	125
5.3	Résultats obtenus avec des pondérations variantes . . . . .	126
	(a) Orbite de dérive . . . . .	126
	(b) Orbite à l'injection . . . . .	126
5.4	Temps de calcul total obtenus avec des pondérations variantes . . . . .	127
5.5	Résultats obtenus avec des contraintes de formage . . . . .	130
	(a) Orbite de dérive . . . . .	130
	(b) Orbite à l'injection . . . . .	130
5.6	Temps de calcul total obtenus avec des contraintes de formage . . . . .	131
5.7	Résultats obtenus avec une précision variante . . . . .	134
	(a) Orbite de dérive . . . . .	134
	(b) Orbite à l'injection . . . . .	134
5.8	Temps de calcul total obtenus avec une précision variante . . . . .	135
5.9	Orbite finale atteinte . . . . .	136
5.10	Temps de calcul total . . . . .	136
6.1	Ordre des LFRs obtenues . . . . .	155
6.2	Temps relatif de simulation . . . . .	159
7.1	Résultats obtenus dans le cas nominal . . . . .	173

(a)	Orbite de dérive . . . . .	173
(b)	Orbite à l'injection . . . . .	173
7.2	Temps de calcul total obtenus dans le cas nominal . . . . .	175
C.1	Conditions de transversalité initiales . . . . .	211
C.2	Conditions de transversalité finales . . . . .	211

# Liste des figures

1.1	Photo d'un V-2 . . . . .	2
1.2	Schématismation des boucles de Guidage, Navigation et Commande . . .	6
1.3	Schématismation d'un lancement avec ses différentes étape . . . . .	11
2.1	Système de coordonnées J2000 . . . . .	19
2.2	Système de coordonnées terrestre . . . . .	20
2.3	Système de coordonnées local . . . . .	21
2.4	Système de coordonnées de la trajectoire . . . . .	22
2.5	Second système de coordonnées sur la trajectoire . . . . .	22
2.6	Système de coordonnées de la poussée . . . . .	23
2.7	Système de coordonnées du corps . . . . .	24
2.8	Système de coordonnées aérodynamique . . . . .	25
2.9	Système de coordonnées aérodynamique, depuis le système corps . . . .	26
2.10	Système de coordonnées aérobalistiques, depuis le système corps . . . .	26
2.11	Ordre de grandeur des forces agissant sur le lanceur, altitude de 800 <i>km</i>	35
2.12	Comparaison des approches . . . . .	57
	(a) Rayon . . . . .	57
	(b) Vitesse relative . . . . .	57
2.13	Comparaison du temps de calcul . . . . .	58
2.14	Définition de la forme de l'ellipse orbitale . . . . .	60
2.15	Positionnement de l'ellipse orbitale . . . . .	60
3.1	Schématismation de la manœuvre d'inclinaison gravitationnelle . . . . .	72
3.2	Effet des incréments de commande . . . . .	82
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	82
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	82
3.3	Résultats des optimisations avec différentes durées pour les paliers . . .	85
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	85
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	85
3.4	Différences entre la trajectoire à 4 s et les trois autres . . . . .	86
	(a) Différences sur le rayon . . . . .	86
	(b) Différences sur la vitesse de déplacement . . . . .	86
3.5	Trajectoire de référence sans manœuvres hors plan orbital . . . . .	88

(a)	Rayon . . . . .	88
(b)	Vitesse de déplacement . . . . .	88
(c)	Trace au sol . . . . .	88
3.6	Trajectoire de référence avec manœuvres hors plan orbital . . . . .	90
(a)	Rayon . . . . .	90
(b)	Vitesse de déplacement . . . . .	90
(c)	Trace au sol . . . . .	90
4.1	Principe de l'horizon fuyant . . . . .	94
5.1	Stratégies de guidage . . . . .	105
(a)	Suivi de trajectoire . . . . .	105
(b)	Adaptation itérative . . . . .	105
5.2	Séparation en problèmes distincts consécutifs . . . . .	118
5.3	Orientations commandées, pour un horizon de contrôle court . . . . .	124
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	124
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	124
5.4	Temps de calcul obtenus avec un horizon de contrôle court . . . . .	125
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	125
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	125
5.5	Orientations commandées, pour des pondérations variantes . . . . .	127
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	127
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	127
5.6	Temps de calcul obtenus avec des pondérations variantes . . . . .	128
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	128
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	128
5.7	Forme imposée à l'entrée . . . . .	129
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	129
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	129
5.8	Orientations commandées, pour des contraintes de formage . . . . .	130
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	130
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	130
5.9	Temps de calcul obtenus avec des contraintes de formage . . . . .	131
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	131
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	131
5.10	Orientations commandées, pour une précision variante . . . . .	134
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	134
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	134
5.11	Temps de calcul obtenus avec une précision variante . . . . .	135
(a)	2 <sup>e</sup> étage . . . . .	135
(b)	3 <sup>e</sup> étage . . . . .	135

6.1	Évolution temporelle des Jacobiens . . . . .	145
	(a) Élément $\mathbf{A}_{(3,2)}$ . . . . .	145
	(b) Élément $\mathbf{C}_{(1,6)}$ . . . . .	145
6.2	Transformations linéaires fractionnelles . . . . .	148
	(a) <i>Upper</i> -LFT . . . . .	148
	(b) <i>Lower</i> -LFT . . . . .	148
6.3	LFR d'un système linéaire incertain . . . . .	150
6.4	LFR d'un système LTVR . . . . .	151
6.5	Pôles des représentations . . . . .	156
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	156
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	156
	(c) Phase de dérive . . . . .	156
	(d) Phase orbitale . . . . .	156
6.6	Validation de la représentation de la matrice de sortie par $\mathbf{C}_{(1,6)}$ . . . . .	157
	(a) Superposition des représentations . . . . .	157
	(b) Différences entre les représentations . . . . .	157
6.7	Validation de la représentation du vecteur d'entrée par $\vartheta_{com}$ . . . . .	158
	(a) Superposition des représentations . . . . .	158
	(b) Différences entre les représentations . . . . .	158
6.8	Validation de la représentation du vecteur de sortie par $h$ . . . . .	158
	(a) Superposition des représentations . . . . .	158
	(b) Différences entre les représentations . . . . .	158
7.1	LFR servant à la commande prédictive . . . . .	165
7.2	Forme imposée à l'entrée . . . . .	171
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	171
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	171
7.3	Orientations commandées dans le cas nominal . . . . .	174
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	174
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	174
7.4	Paramètres orbitaux obtenus dans le cas nominal . . . . .	175
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	175
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	175
7.5	Temps de calcul obtenus dans le cas nominal . . . . .	176
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	176
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	176
7.6	Orientations commandées pour un niveau de bruit élevé . . . . .	177
	(a) 2 <sup>e</sup> étage . . . . .	177
	(b) 3 <sup>e</sup> étage . . . . .	177
7.7	Différence entre la trajectoire obtenue avec le MPC-LTVR et la trajectoire de référence . . . . .	179

(a)	Rayon du lanceur . . . . .	179
(b)	Vitesse de déplacement . . . . .	179
7.8	Différence entre le modèle linéaire prédit et celui réel . . . . .	180
(a)	Pôles de la matrice $\mathbf{A}_e$ . . . . .	180
(b)	Élément $\mathbf{C}_{e(1,6)}$ . . . . .	180
D.1	Ellipse orbitale et son cercle circonscrit . . . . .	214
E.1	Découplage multiple . . . . .	224
E.2	Schématisation des dépendances . . . . .	225

# Notation

## Lettres latines

$a$	demi-grand axe de l'ellipse orbitale
$\mathbf{A}$	matrice d'état de la représentation d'état d'un système linéaire
$A_{col}$	aire au col de la tuyère
$A_e$	aire à la sortie de la tuyère
$\mathbf{B}$	matrice d'entrée de la représentation d'état d'un système linéaire
$b$	demi-petit axe de l'ellipse orbitale
$\mathbf{C}$	matrice de sortie de la représentation d'état d'un système linéaire
$C_A$	coefficient aérodynamique axial
$C_D$	coefficient aérodynamique de traînée
$C_L$	coefficient aérodynamique de portance
$C_N$	coefficient aérodynamique normal
$C_Y$	coefficient aérodynamique latéral
$\mathbf{D}$	matrice de transmission directe de la représentation d'état d'un système linéaire
$\mathbf{d}$	vecteur de consigne
$E$	anomalie excentrique
$e$	excentricité de l'ellipse orbitale
$\mathcal{E}$	énergie mécanique spécifique
$\mathbf{f}$	équations différentielles régissant la dynamique du système étudié
$\mathcal{F}$	application de la transformation linéaire fractionnelle
$F_A$	force aérodynamique axiale
$F_{aero}$	forces aérodynamique
$F_g$	force gravitationnelle
$F_N$	force aérodynamique normale
$F_p$	force de poussée
$F_Y$	force aérodynamique latérale
$g$	accélération gravitationnelle
$h$	moment angulaire spécifique
$h_c$	horizon de commande
$h_p$	horizon de prédiction
$\dot{H}_0$	partie de l'Hamiltonien qui est indépendante de la poussée
$H$	Hamiltonien
$H_T$	partie de l'Hamiltonien qui dépend de la poussée
$i$	inclinaison du plan orbital
$\mathbf{v}_L$	vecteur unitaire dans la direction de l'axe $x_L$
$\mathcal{I}$	ensemble des indices pour les contraintes de formage de l'entrée
$I_{sp}$	consommation spécifique

$\mathbf{I}_c$	intégrale du terme de poussée avec le cosinus $\left( \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \mathbf{v}_P(\zeta) \cos(\bar{\omega}\zeta) a_T(\zeta) d\zeta \right)$
$\mathbf{I}_s$	intégrale du terme de poussée avec le sinus, $\left( \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \mathbf{v}_P(\zeta) \sin(\bar{\omega}\zeta) a_T(\zeta) d\zeta \right)$
$\mathbf{j}_L$	vecteur unitaire dans la direction de l'axe $y_L$
$J$	critère à optimiser
$\mathbf{k}_L$	vecteur unitaire dans la direction de l'axe $z_L$
$\mathbf{K}$	contrôleur statique linéaire
$\mathcal{L}$	Lagrangien
$\mathbf{l}_0$	contraintes sur l'état au temps initial
$\mathbf{l}_f$	contraintes sur l'état au temps final
$\mathbf{l}_i$	contraintes instantanées
$M$	anomalie moyenne
$m$	masse du lanceur
$n$	vitesse orbitale moyenne
$n_{ts}$	nombre de points d'opérations considéré dans le problème des moindres carrés
$\mathbf{n}$	vecteur du nœud ascendant
$\mathbf{o}$	équations de sortie du système étudié
$p_0$	terme du critère liée au temps initial
$p_i$	terme du critère liée à l'intégrale temporelle
$\mathbf{P}$	matrice de normalisation des contraintes
$P_{ambient}$	pression atmosphérique externe
$P_{chambre}$	pression à l'intérieur de la chambre de combustion
$P_n$	polynôme de Legendre
$P_{nm}$	fonction de Legendre associée
$p_f$	terme du critère liée au temps final
$\mathbf{Q}$	matrice de pondérations de l'erreur de consigne
$q$	pression dynamique
$r$	distance entre le centre de la Terre et le centre de masse du lanceur (rayon)
$r_a$	rayon de l'apogée de l'ellipse orbitale
$r_e$	ratio d'expansion de la tuyère
$r_p$	rayon du périégée de l'ellipse orbitale
$r_{ref}$	rayon de référence dans le calcul de la fréquence de Schuler
$\mathbf{R}$	matrice de pondérations des incréments de commande
$S$	surface aérodynamique de référence
$t$	temps écoulé depuis le début du lancement
$t_b$	temps correspondant à la fin du brûlage du second étage
$t_c$	temps correspondant à la fin de la phase de dérive
$t_p$	temps de passage au périégée
$t_s$	temps sidéral actuel
$T_{max}$	poussée maximale de l'étage
$T_o$	période de l'orbite
$\mathbf{u}$	vecteur d'entrée du système étudié
$U_g$	potentiel gravitationnel
$\mathbf{U}$	matrice des vecteurs d'entrée
$v$	vitesse de déplacement du lanceur
$\mathbf{V}$	matrice de Vandermonde du problème des moindres carrés

$V$	fonction de Lyapunov
$w$	vitesse angulaire
$W$	quaternion de la vitesse angulaire généralisée
$\mathbf{x}$	vecteur d'état du système étudié
$\mathbf{y}$	vecteur de sortie du système étudié

**Lettres grecques**

$\alpha$	angle d'attaque
$\alpha'$	angle d'attaque total
$\beta$	angle de dérapage
$\chi$	cap
$\delta$	latitude géocentrique
$\Delta$	matrice d'incertitude de la transformation linéaire fractionnelle
$\Delta_m$	consommation instantanée de masse par le moteur
$\Delta_t$	pas de temps de l'intégration numérique
$\Delta u$	incréments de commande ( $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ )
$\varepsilon_a$	précision minimale acceptée sur le rayon de l'apogée
$\epsilon_a$	variable d'écart liée à l'apogée
$\varepsilon_i$	précision minimale acceptée sur l'inclinaison orbitale
$\epsilon_i$	variable d'écart liée à l'inclinaison orbitale
$\varepsilon_p$	précision minimale acceptée sur le rayon du périégée
$\epsilon_p$	variable d'écart liée au périégée
$\eta$	efficacité du moteur
$\gamma$	inclinaison de la trajectoire
$\iota$	valeur de la zone terminale, dans la preuve de stabilité
$\Lambda$	zone terminale de la commande prédictive par mode duel
$\lambda$	longitude
$\mu$	paramètre de Kuhn-Tucker
$\nu$	anomalie vraie
$\omega$	fréquence de Schuler
$\omega_o$	argument du périégée
$\Omega_o$	ascension droite du nœud ascendant
$\Omega$	matrice de pondérations des moindres carrés pondérés
$\varphi$	angle d'orientation de la poussée hors plan orbital
$\varphi_{com}$	angle commandé de l'orientation de la poussée hors plan orbital
$\Phi$	angle de roulis
$\Phi'$	roulis aérodynamique
$\Psi$	angle de lacet
$\sigma(\mathbf{G})$	valeurs singulières de $\mathbf{G}$
$\sigma_s$	paramètre de séquençement du modèle linéaire à paramètres variants
$\boldsymbol{\tau}$	vecteur adjoint
$\vartheta$	angle d'orientation de la poussée dans le plan orbital
$\Theta$	angle de tangage
$\vartheta_{com}$	angle commandé de l'orientation de la poussée dans le plan orbital
$\xi$	constantes de transversalité
$\zeta_1$	variable de pondération liée aux incréments de commande
$\zeta_2$	variable de pondération liée à la consommation
$\zeta_3$	variable de pondération liée aux connaissance <i>a priori</i>
$\zeta_4$	variable de pondération liée aux variables d'écart
$\zeta_n$	variable de conversion d'unité

**Indices**

$A$	système de coordonnées aérobalistique
$B$	système de coordonnées du corps
$d$	paramètre orbital désiré
$E$	système de coordonnées terrestre
$f$	paramètre orbital obtenu à la fin de l'intégration numérique
$G$	système de coordonnées J2000
$L$	système de coordonnées local
$NED$	système de coordonnées NED
$Q$	second système de coordonnées sur la trajectoire
$T$	système de coordonnées sur la trajectoire
$W$	système de coordonnées aérodynamique

**Constantes physiques**

$C_{nm}$	harmonique tesseral cosinus de degré $m$ et d'ordre $n$
$c^*$	vitesse caractéristique, 1728,7 m/s
$g_0$	gravité standard au niveau de la mer, 9,80665 m/s <sup>2</sup>
$J_2$	second harmonique zonal, 0,0010826
$J_n$	harmonique zonal d'ordre $n$
$\mu_e$	paramètre gravitationnel de la Terre, 398602 km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>
$\omega_e$	vitesse de rotation de la Terre, 7,2921 × 10 <sup>-5</sup> rad/s
$r_{eq}$	rayon équatorial terrestre, 6378,1370 km
$S_{nm}$	harmonique tesseral sinus de degré $m$ et d'ordre $n$

**Symboles**

$\mathbf{T}$	une matrice est écrite en gras droit
$\mathbf{t}_E$	un vecteur est écrit en gras italique et son indice réfère au système de coordonnées dans lequel il est écrit
$\mathbf{A}_d(t)$	interpolation temporelle de la matrice $\mathbf{A}$ en discret
$\mathbf{A}_e(t)$	interpolation temporelle de la matrice $\mathbf{A}$
$A_e^{\{1\}}$	coefficient du polynôme d'interpolation lié au terme d'ordre 1
$\mathbf{f}_{o.s.}$	termes d'ordre supérieure du développement de Taylor de la fonction $\mathbf{f}$
$\mathbf{I}_3$	matrice identité 3 × 3
$Q$	quaternion $Q$ unitaire
$\overline{r}_f^+$	valeur de $r$ utilisant (ou utilisée par) les données passées $t_f$
$\overline{r}_f^-$	valeur de $r$ utilisant (ou utilisée par) les données précédentes à $t_f$
$r_0$	valeur au temps initial de la variable $r$
$\bar{\mathbf{r}}$	vecteur $\mathbf{r}$ normalisé
$r_f$	valeur au temps final de la variable $r$
$\hat{r}$	valeur optimale de la variable $r$
$r_{Q_x}$	composante du vecteur $\mathbf{r}$ sur l'axe $x_Q$
$r_{max}$	valeur maximale de $u$
$r_{min}$	valeur minimale de $u$
$\mathbf{r}_o$	valeur de $\mathbf{r}$ au point d'opération
$\Delta_o \mathbf{r}$	variation de $\mathbf{r}$ autour point d'opération
$r^{(n)}$	valeur de $r$ au $n^e$ point d'opération
$\tilde{r}$	valeur prédite de $r$
$\mathbf{T}_{(n,m)}$	élément situé sur la $n^{ieme}$ ligne et la $m^{ieme}$ colonne de la matrice $\mathbf{T}$
$\mathbf{T}_E^L$	matrice de rotation du système $E$ vers le système $L$
$\mathbf{T}_x(a)$	matrice de rotation d'un angle $a$ autour de l'axe $x$

$\mathbf{T}_y(a)$	matrice de rotation d'un angle $a$ autour de l'axe $y$
$\mathbf{T}_z(a)$	matrice de rotation d'un angle $a$ autour de l'axe $z$
$v_i$	valeur inertielle de $v$ , incluant la rotation de la Terre ( $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}$ )

### Abréviations

ddl	degrés de liberté
GNC	Guidage, Navigation et Commande
GPS	système de géolocalisation par satellites ( <i>Global Positioning System</i> )
INS	centrale inertielle ( <i>Inertial Navigation System</i> )
LFR	représentation linéaire fractionnaire ( <i>Linear Fractional Representation</i> )
LFT	transformation linéaire fractionnaire ( <i>Linear Fractional Transformation</i> )
LPV	linéaire à paramètre variant ( <i>Linear Parameter Varying</i> )
LTVR	représentation linéaire variante dans le temps ( <i>Linear Time Varying Representation</i> )
MMPC	commande prédictive multi-modèles linéaires ( <i>Multi-Model Predictive Control</i> )
MPC-LFR	commande prédictive à représentation linéaire fractionnelle
MPC-LTVR	commande prédictive à représentation linéaire variante dans le temps
MPC	commande prédictive ( <i>Model Predictive Control</i> )
NMPC	commande prédictive non-linéaire ( <i>Nonlinear Model Predictive Control</i> )
RDDC	Recherche et Développement pour la Défense du Canada

# Chapitre 1

## Les lanceurs de satellites et leurs boucles de guidage, navigation et commande

Même si les Soviétiques ont été les premiers à réussir un lancement de satellite avec la mise en orbite de Sputnik 1, le 4 octobre 1957, la paternité de la technologie de lancement devrait plutôt être attribuée aux Chinois qui, durant la dynastie des Han (206 av. J.-C. à 280 apr. J.-C.), ont inventé la poudre noire pour propulser leurs projectiles. La poudre noire n'est pas utilisée comme moyen de propulsion des lanceurs modernes, mais elle a cependant des caractéristiques très similaires à la propulsion solide utilisée dans la majorité de ceux-ci. Parmi ces caractéristiques, les deux plus notables sont le brûlage constant et uniforme et la capacité de stockage d'énergie très élevée dans un faible volume.

La quantification mathématique de la force de poussée générée par une propulsion solide a cependant été uniquement publiée en 1903 par Konstantin Tsiolkovsky (1857-1935). D'ailleurs, l'équation fondamentale de la propulsion astronautique a été nommée en son honneur. Cette équation lie l'accroissement de vitesse d'un véhicule éjectant de la masse au rapport des masses initiale et finale. Il faut cependant attendre la fin de la Seconde Guerre mondiale avec le développement des missiles à très longue portée, notamment le V-2 allemand (portée de 300 km), pour voir une application calculée de Tsiolkovsky. Comme ils doivent être stabilisés pour atteindre leur cible avec une relative précision, ceux-ci posent également les bases des algorithmes de guidage et de commande de ce type d'engin.

À la fin de la guerre, l'Union Soviétique et les États-Unis capturent plusieurs scien-

tifiques travaillant sur le projet du V-2 amorçant ainsi une course à l'espace ultimement remporté par les Soviétiques avec le lancement de Sputnik 1 (4 octobre 1957). Le lancement s'effectue à partir d'une adaptation d'un missile balistique intercontinental, le R-7, précédant ainsi, de 4 mois, son compétiteur américain, le projet Redstone (première satellisation 31 janvier 1958 avec Explorer 1). Les deux projets étaient des dérivés du V-2 allemand. Même après la première réussite des deux principaux belligérants, le climat tendu de la Guerre Froide continue d'encourager les investissements dans le développement de missiles balistiques intercontinentaux et de leurs dérivés spatiaux, les fusées. Autant l'Union Soviétique, par le développement des projets Vostok, Soyuz et Proton, que les Américains, avec les Gemini, Atlas et Delta, profitent massivement de ces investissements pour développer une flotte importante de fusées. D'autres pays tels que le Japon, la France et la Grande-Bretagne sont également dans la course. Partant cependant avec bien du retard sur les deux autres pays et surtout avec des fonds monétaires moindres, ces pays auront besoin de près de 10 années supplémentaires avant de réussir une injection orbitale avec une fusée nationale. La France est la troisième, première des autres, à y parvenir avec le lancement d'Asterix le 26 novembre 1965. Le tableau 1.1 présente tous les pays ayant tenté une mise en orbite.



FIGURE 1.1 – Photo d'un V-2

pays	première réussite
Russie (Union Soviétique)	4 octobre 1957
États-Unis	31 janvier 1958
France	26 novembre 1965
Japon	2 février 1970
Chine	24 avril 1970
Grande-Bretagne	28 octobre 1971
Inde	18 juillet 1980
Israël	19 septembre 1988
Brésil	25 août 2003 <sup>1</sup>
Iran	2 février 2009
Corée du Nord	5 avril 2009 <sup>2</sup>
Corée du Sud	25 août 2009 <sup>1</sup>

TABLEAU 1.1 – Pays ayant tenté une satellisation par leur propre moyen

1. Ce pays n'a jamais réussi une satellisation et cette date correspond au premier essai.
2. Un communiqué nord-coréen indique la réussite qui a finalement été démentie.

De nos jours, la France et la Grande-Bretagne n'opèrent plus séparément et sont regroupées au sein de la communauté européenne qui permet à tous ses membres d'avoir accès à l'espace par le développement d'une flotte commune de lanceurs. La chute de l'Union des Républiques Socialistes Soviétiques a également modifié la répartition des pouvoirs spatiaux. Bien que le cosmodrome de Baïkonour, principal site de lancement de la Russie, se situe au Kazakhstan, il est sous juridiction russe et la Russie continue d'être le principal utilisateur de ce site. L'Ukraine, la seule ancienne république à avoir profité de l'expertise russe pour développer un lanceur et réussir un lancement le 21 avril 1999, utilise également le cosmodrome.

L'Ansari X Prize (créée le 18 mai 1996 et remportée le 4 octobre 2004 par Scaled Composites pour la réussite de SpaceShipOne (X PRIZE Foundation, 2011)), prix de dix millions de dollars américains attribué à la première organisation non gouvernementale à atteindre l'espace avec un véhicule spatial habité, a quelque peu contribué à démocratiser l'accès à l'espace. Dans le cadre de ce prix, plusieurs entreprises ont tenté, avec plus ou moins de succès, d'effectuer un vol suborbital. Ces essais ont préparé le terrain pour la nouvelle génération de lanceurs partiellement ou entièrement financés par l'entreprise privée, telle que la famille Falcon de SpaceX.

Il est intéressant de noter que bien que le satellite Alouette, lancé, le 28 septembre 1962 depuis la Californie, par la fusée américaine Thor, hisse le Canada au rang de troisième colonisateur de l'espace. Le pays demeure le seul membre du G8 à ne pas posséder la capacité de mettre en orbite ses propres satellites (l'Allemagne et l'Italie profitent de l'Union Européenne). De nos jours, le Canada est devenu un chef de file en conception de satellites radars. Cependant, ne possédant pas la technologie nécessaire à leur mise en orbite, les délais avant le lancement de ceux-ci sont souvent au-delà des exigences. De plus, les lancements s'effectuent par des lanceurs étrangers. Ces nations peuvent avoir une certaine réticence à effectuer le lancement lorsque le satellite entre en compétition avec leurs intérêts nationaux.

Dernièrement, cette dépendance envers les lanceurs étrangers est revenue à l'avant-plan permettant la création d'un groupe de recherche composé de centres de recherche nationaux, d'entreprises privées et d'universités à travers le pays. Ce groupe de recherche a pour objectif principal de développer l'expertise permettant de relever les défis technologiques posés par l'éventualité où le pays se lancerait dans le développement d'un lanceur national. Cette expertise permettra de mieux comprendre ce qui se fait actuellement dans la communauté spatiale et d'identifier les solutions réalisables au Canada.

## 1.1 Classification des lanceurs

Il est possible de distinguer deux types distincts de lanceur, les fusées et les véhicules spatiaux à surface portante (comme la navette spatiale américaine). Le second type est développé dans le but de pouvoir effectuer plusieurs lancements en réutilisant la majorité de la structure du véhicule. Cependant, ce type de véhicule beaucoup plus coûteux et difficile à réaliser que les fusées est en déclin, notamment depuis le remisage de la navette américaine. Ce type de véhicule demeure cependant celui de prédilection des compagnies privées désireuses de se lancer dans l'entreprise du tourisme spatial par des vols commerciaux suborbitaux et orbitaux. Lors de la phase ascensionnelle, la différence majeure entre les deux types de lanceurs réside dans la présence d'une force de portance pour les véhicules à surface portante. Ce type de véhicule ne sera pas étudié dans ce projet puisqu'il ne présente pas d'intérêts comme moyen de satellisation. Le type de lanceurs le plus répandu, les fusées, sera celui sur lequel ce projet se concentrera.

Les lanceurs sont également caractérisés (tableau 1.2) par les orbites qu'ils peuvent atteindre et par la charge qu'ils peuvent y amener. Par exemple, le lanceur chinois Long March 2C est caractérisé par une charge utile de 3850 *kg* sur une orbite basse et 1250 *kg* sur l'orbite de transfert géostationnaire (LM-2C, 1999).

type de lanceur	poids en orbite basse [kg]	poids en orbite de transfert géostationnaire [kg]
petit	< 2000	incapable
moyen	[2000, 10000]	< 2000
mi-lourd	[10000, 20000]	[2000, 8000]
lourd	[20000, 50000]	[5000, 20000]
très lourd	> 50000	> 20000

TABLEAU 1.2 – Catégories des lanceurs

Les orbites se situant à une altitude entre 200 *km* et 2000 *km* correspondent aux orbites basses. Cette zone d'orbites est la zone la plus utilisée. On y retrouve les missions habitées, les satellites météorologiques, ceux d'imagerie terrestre et certains satellites de communications. L'orbite de transfert géostationnaire est, comme son nom l'indique, une orbite elliptique ayant son apogée à l'altitude géostationnaire (36000 *km*) et servant d'orbite de transfert entre les orbites basses et l'orbite géostationnaire.

Les lanceurs de types fusées sont composés de quatre principales parties : la motorisation, la case à équipements, la coiffe de protection thermique et le compartiment charge utile. Les moteurs génèrent la force de poussée permettant de s'affranchir de la gravité terrestre et d'atteindre la vitesse et l'altitude caractérisant l'orbite désirée. Les moteurs constituent plus de 90 % de la masse initiale du lanceur, dont environ 80 % uniquement pour le combustible. La conception étagée du lanceur permet d'optimiser la tuyère des moteurs en fonction de l'altitude à laquelle ils évoluent. Cette optimisation de la dimension de la tuyère permet de limiter les pertes de poussée dues à la différence de pression entre le flux d'air provenant du moteur et la pression ambiante. La séparation en étage consiste à répartir l'énergie nécessaire pour réaliser la mission dans plusieurs étages propulsifs. Lorsque le combustible d'un étage est entièrement brûlé, la structure restante de cet étage est larguée et le moteur du suivant allumé.

Pour permettre de manœuvrer le lanceur, les tuyères sont orientables et, dans certains cas, à poussée variable. Les manœuvres à effectuer et les actions à prendre pour les réaliser sont calculées par les boucles de guidage, navigation et commande (GNC) (section 1.2). Les éléments électroniques composant ces boucles se retrouvent dans la case à équipements. Cette case à équipements contient également les autres éléments électroniques nécessaires au lancement, tels que les systèmes de communication avec le sol. La coiffe thermique est une pièce passive des lanceurs. Elle sert à protéger le satellite de la chaleur générée par le déplacement à grande vitesse dans l'atmosphère. La coiffe thermique est larguée lorsque le lanceur quitte l'atmosphère dense (voir section 1.3.3). Ce largage marque le début de la phase guidée du lancement. La quatrième partie essentielle du lanceur est le compartiment charge utile. Ce dernier contient la raison d'être du lanceur, à savoir le satellite à placer en orbite.

## 1.2 Boucles de Guidage, Navigation et Commande

Les boucles de guidage, navigation et commande permettent de gérer la poussée générée par les moteurs. La vitesse de déplacement et la distance parcourue par un lanceur ne permettent pas un lien continu et rapide avec des stations au sol. Par conséquent, le lanceur se doit d'être entièrement autonome. Les boucles de GNC constituent en quelque sorte le cerveau du lanceur. À partir des informations qu'elles reçoivent des capteurs et de celles connues préalablement au lancement, elles calculent l'orientation du lanceur et de ses tuyères pour lui permettre d'atteindre l'orbite désirée. Les boucles de GNC doivent composer avec les variations connues des paramètres terrestres (gravité, densité atmosphérique...) en fonction de l'altitude. Elles doivent également être en mesure de réagir à des perturbations inconnues, notamment le vent, et à des varia-

tions sur les paramètres du système, c'est-à-dire des différences entre le modèle utilisé dans les boucles de GNC et le lanceur réel, afin d'assurer la réussite du lancement. Ces boucles constituent le domaine d'étude d'un partenariat entre l'Université Laval, le centre de Recherche et Développement pour la Défense du Canada-Valcartier, l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et l'Espace et de l'École de technologie supérieure.

Il convient de séparer le processus de GNC en deux boucles imbriquées (figure 1.2). Cette séparation permet de créer une division claire entre les deux problèmes principaux, à savoir la stratégie et la réalisation. Le problème de la stratégie est réglé par la boucle externe et la fonction de guidage alors que la réalisation de cette stratégie est effectuée par la boucle interne et la fonction de commande d'attitude.

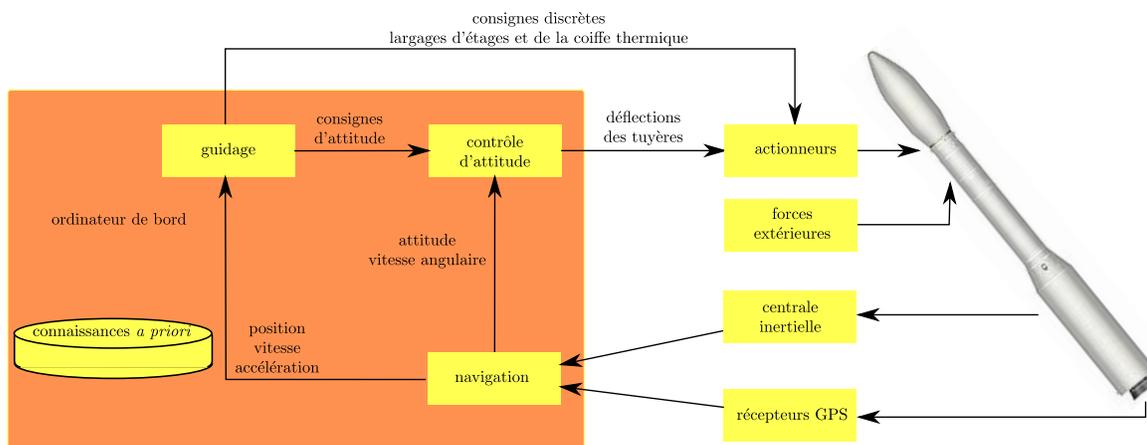


FIGURE 1.2 – Schématisation des boucles de Guidage, Navigation et Commande

### 1.2.1 Fonction de navigation

La navigation est la fonction qui est responsable de positionner le lanceur dans l'espace. Elle fournit des estimés des positions, des vitesses et des accélérations. La partie angulaire, liée à la dynamique de rotation, est utilisée par la fonction de commande alors que la partie liée à la dynamique de translation est utilisée par la fonction de guidage.

Pour effectuer ces estimations, la fonction de navigation reçoit des mesures provenant des capteurs, principalement des centrales inertielles et des récepteurs GPS. L'algorithme au cœur de la fonction de navigation effectue le filtrage et la fusion de ces données. La fusion de données s'effectue sur des données provenant de différents types de capteurs ou sur des données provenant du même type de capteur, mais situé à différents endroits sur la structure. Cette dispersion de capteur sur la structure de-

vrait également permettre, dans le cas d'une fonction de navigation avancée, d'estimer la dynamique de flexion de la structure du lanceur. Pour effectuer ces opérations, la navigation utilise un modèle générique calibré au sol, en position statique initiale. À la fin des calculs, la fonction de navigation est en mesure de fournir des estimations précises, et ce, même en présence de perturbations et de bruits de mesure.

### **1.2.2 Fonction de commande**

La fonction de commande a la responsabilité de définir les commandes à envoyer aux actionneurs afin de placer le lanceur dans l'attitude demandée par la fonction de guidage et de stabiliser le véhicule. Les lanceurs ont leur centre de masse situé à l'arrière de leur centre de pression, ce qui a pour effet de créer une instabilité en rotation. Cette fonction gère la dynamique de rotation du véhicule. L'effet des perturbations sur la dynamique de rotation de l'engin étant rapide, la boucle de commande doit fonctionner à une fréquence élevée.

Pour le lanceur considéré dans cette étude, les actionneurs disponibles pour la fonction de commande permettent l'orientation du flux de sortie de la tuyère de chaque moteur. La multiplicité des tuyères complexifie le contrôle de l'engin puisque le mouvement asymétrique de celles-ci peut mettre le lanceur en roulis ou s'annuler mutuellement. Cependant, il est également possible de penser à une loi de commande plus complexe qui utilise la multiplicité des tuyères pour contrôler, par exemple, le roulis du véhicule. De plus, dans le cas d'un lanceur, la flexion de la structure doit être prise en compte dans la conception. L'étude de son effet sur le contrôle du lanceur doit être effectuée et, si nécessaire, une loi de commande prenant en compte cette flexion doit être développée.

### **1.2.3 Fonction de guidage**

La fonction de guidage a la responsabilité de définir la trajectoire permettant d'atteindre l'orbite désirée. Elle gère la dynamique de translation du centre de masse d'un lanceur. La dynamique des perturbations étant plus lente pour le mouvement de translation que celui de rotation, la boucle de guidage fonctionne à une fréquence plus faible que la boucle de commande. Avec le calcul de la trajectoire, la fonction de guidage obtient également l'attitude à donner au lanceur afin de produire cette trajectoire. Cette attitude est envoyée à la fonction de commande. Puisqu'elle constitue l'un des éléments étudiés durant ce projet, cette fonction sera détaillée aux chapitres 5 et 7.

### 1.2.4 Connaissances *a priori*

Les trois fonctions composant les boucles de GNC utilisent toutes, de différentes façons, des données provenant de calculs effectués préalablement au lancement. Ces données contiennent notamment des informations sur les profils de vent, sur les modèles vibratoires, sur l'orbite désirée et sur la trajectoire de référence. Cette trajectoire permet de définir les points d'opération utilisés par les fonctions de commande et de navigation. Elle permet également de circonscrire une zone d'opération nominale, une zone de recherche initiale pour les fonctions de guidage et de navigation ainsi qu'une zone où le lanceur est considéré comme irrécupérable. Cette trajectoire de référence est donc très utile et importante dans le processus de lancement. En plus, de valider la possibilité d'atteindre l'orbite désirée, elle détermine, en grande partie, la zone de fonctionnement des trois fonctions des boucles de GNC. Le chapitre 3 est entièrement consacré à l'étude d'un algorithme permettant de générer cette trajectoire.

## 1.3 Lanceur et mission du projet

### 1.3.1 Mission étudiée

Le lanceur étudié dans le cadre du projet en est un qui doit répondre principalement aux besoins du Canada. Comme mentionné précédemment, le Canada est un chef de file en satellites radars à mission unique. Ainsi, les satellites canadiens sont majoritairement de très petite taille et placés sur une orbite héliosynchrone. Cette dernière est une orbite basse circulaire. Elle est catégorisée par une inclinaison légèrement rétrograde (sens de déplacement vers l'ouest) qui, avec l'altitude correspondante, permet de passer au-dessus d'un point terrestre à la même heure solaire locale, obtenant la même direction d'éclairement. L'orbite héliosynchrone est souvent utilisée par les satellites effectuant leurs mesures dans le spectre visible, tel que les satellites de reconnaissance, et par des satellites radars.

Bien que la mission du projet canadien vise une orbite héliosynchrone de 800 *km* d'altitude, la mission étudiée dans ce projet est de placer une charge utile de 150 *kg* sur une orbite héliosynchrone de 500 *km* d'altitude. Le choix de cette orbite intermédiaire est dicté par les configurations disponibles au début du projet. En effet, parmi celles-ci, aucune ne permet d'atteindre l'orbite initiale. Cependant, une étude de l'énergie disponible, validée par des simulations sur le logiciel ASTOS<sup>®</sup> (Well *et al.*, 2008), a permis de démontrer que la configuration de la section 1.3.2 permet d'atteindre une

orbite héliosynchrone de 500 *km*. La mission du projet national demeure cependant une orbite de 800 *km*. Les algorithmes développés dans ce projet pourront être réutilisés sur la future configuration permettant de rejoindre cette orbite.

La base de lancement est située près de Churchill, Manitoba (58°44′03″N, 93°49′13″O et altitude 20 m). L’orbite visée étant rétrograde, une latitude élevée est avantageuse. Sur une orbite rétrograde, le satellite se déplace dans la direction opposée à la rotation de la Terre. Le lanceur se doit ainsi de produire de l’énergie supplémentaire pour annuler la vitesse initiale qui est alors opposée à la direction désirée. La vitesse de rotation de la Terre étant liée à la latitude, une latitude élevée nécessite donc moins d’énergie qu’un lancement à l’équateur. Cependant, avec un site de lancement près de pôles, le nombre d’orbites atteignables, par lancement direct, est restreint. Les inclinaisons orbitales possibles, sans manœuvres hors plan, se limitent à l’intervalle  $[\delta_0, 180 - \delta_0]$  où  $\delta_0$  est la latitude du site de lancement (Sellers, 2005). Ainsi, la base de lancement de Churchill ne peut atteindre, sans coûteuses manœuvres hors plan, l’orbite de 28° de la station spatiale.

### 1.3.2 Configuration étudiée

La structure utilisée pour l’étude est un lanceur de type fusée à trois étages tous composés du même moteur hybride. La différence entre les trois étages du lanceur provient alors de la tuyère et du nombre de moteurs utilisés. Cette conception simplifie le développement de la propulsion qui se limite à un moteur et à trois tuyères. Elle complexifie cependant sa réalisation puisque tous les moteurs du même étage doivent être exactement identiques afin de ne pas créer de dissymétrie dans le lanceur. De plus, la multiplicité des tuyères augmente la complexité de la commande puisque celle-ci doit commander plusieurs actionneurs en parallèle. Cette conception permet surtout d’utiliser des installations de construction déjà existantes au Canada.

Une caractéristique importante de la propulsion hybride est de pouvoir moduler la force qu’elle génère. Il est également possible d’arrêter la combustion à n’importe quel moment et de la rallumer plus tard. À l’opposé, la propulsion classique de lanceurs fusée, utilisant une propulsion solide, ne donne aucun moyen de commander l’intensité de la force. Elle est cependant plus simple à réaliser que la propulsion hybride et a une impulsion spécifique légèrement plus élevée. Bien que les deux types de propulsion soient différents au niveau de la construction et de l’utilisation, elles sont similaires au niveau des caractéristiques utiles. Pour modéliser la propulsion, il faut connaître deux des trois paramètres de propulsion suivants : l’impulsion spécifique, la consommation instantanée et la vitesse effective de sortie. Avec deux de ces paramètres et les dimen-

sions de la tuyère, il est possible de calculer la force de poussée générée par le moteur ainsi que son taux de consommation de carburant. Dans le cas de la propulsion solide, ces paramètres sont des caractéristiques données par le motoriste. Pour une propulsion hybride, ce dernier fournit plutôt un graphique donnant la vitesse effective de sortie en fonction du ratio des dimensions de la tuyère et des données sur les conditions de combustion (pression dans la chambre de combustion, aire du col, efficacité de la combustion). Ces données permettent de calculer la consommation instantanée du moteur et sa poussée. Dans cette étude, la poussée à vide générée par le second étage propulsif est de  $169,92 \text{ kN}$  et celle du troisième étage de  $23,23 \text{ kN}$  pour une consommation instantanée de, respectivement,  $53,44 \text{ kg/s}$  et de  $7,36 \text{ kg/s}$ .

En plus de ces données de propulsion, une configuration de lanceur est définie par la masse des différentes parties le composant. Le budget de masse de chaque étage est également séparé en masse du carburant et masse inerte. Cette division permet une estimation rapide du temps de brûlage et de l'énergie disponible dans le lanceur. La masse de la coiffe de protection thermique et du satellite termine la définition de la configuration. La masse totale du lanceur étudié dans ce projet est de  $28935 \text{ kg}$ , dont  $1005 \text{ kg}$  pour le troisième étage.

### 1.3.3 Phases de la trajectoire

Un lanceur de satellites est un objet complexe qui évolue dans deux milieux différents. Dans un premier temps, il se déplace dans un air dense où les forces aérodynamiques sont présentes. Cette phase atmosphérique est la plus perturbée du lancement. Le maximum de pression dynamique, la manœuvre d'inclinaison initiale et le vent s'y retrouvent tous. Ces perturbations peuvent causer une instabilité du lanceur et une différence importante entre la trajectoire réelle et celle de référence. Malgré tout, selon Su (2008), la quasi-totalité des lanceurs ont un système de guidage en boucle ouverte dans cette phase. Ainsi, dans cette portion de la trajectoire, ils se basent uniquement sur des connaissances *a priori*. Ces résultats proviennent d'une minimisation de l'angle d'attaque et de l'utilisation de la gravité pour diminuer l'inclinaison de la trajectoire. Dans le cas d'un lanceur, autant la portance que la traînée sont des forces nuisibles pour la réalisation de sa mission puisqu'elles s'opposent à son mouvement. Ainsi, la stratégie de minimisation de l'angle d'attaque, qui minimise également les forces aérodynamiques, constitue une minimisation de l'énergie nécessaire pour vaincre les forces nuisibles.

La seconde partie du lancement est la phase exo-atmosphérique où le lanceur se déplace dans un air raréfié. Durant cette partie, la densité de l'air est suffisamment

faible pour négliger les forces aérodynamiques. Puisque les forces aérodynamiques sont négligées, la seule force s'opposant au mouvement du lanceur est la gravité. Ainsi, à partir de la sortie de l'atmosphère, la trajectoire et l'orientation du lanceur peuvent être optimisées afin d'atteindre l'orbite visée.

La figure 1.3 résume les différentes phases et évènements modifiant la dynamique du lanceur. En plus de se déplacer dans deux milieux ambiants différents, la trajectoire de lancement comporte différents évènements discrets. Ces évènements, principalement des éjections de morceaux du lanceur, modifient la dynamique du lanceur. Après une éjection, le lanceur subit une discontinuité dans sa masse, une variation de la position de son centre de masse et, lorsqu'il s'agit d'un étage propulsif, de sa poussée. Le changement de position du centre de masse affecte principalement les équations de moment, donc sa dynamique en rotation. Les deux autres changements modifient les équations de force, donc la dynamique de translation et rotation. Il se peut également que les morceaux éjectés ne soient pas consumés dans l'atmosphère et retombent au sol. Leur point d'impact doit alors être prédit et introduit comme contrainte supplémentaire au lancement.

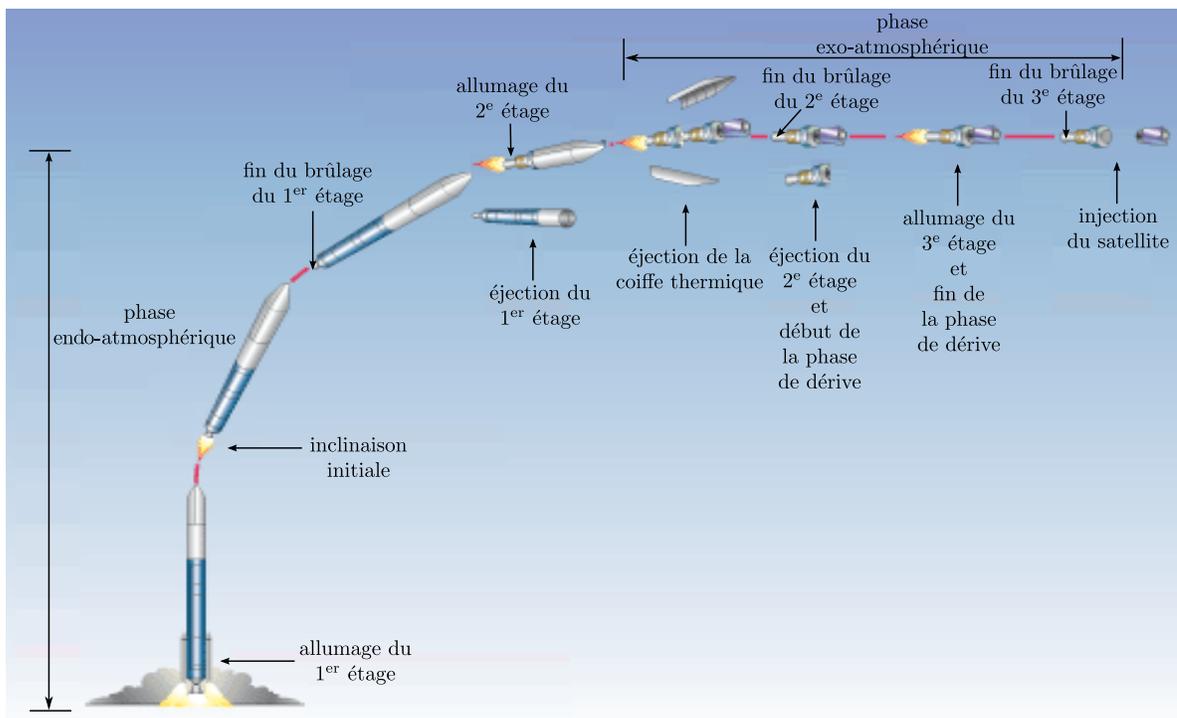


FIGURE 1.3 – Schématisation d'un lancement avec ses différentes étapes, inspirée de Bletsos (2004)

### 1.3.4 Point de sortie de l'atmosphère

Le guidage par inclinaison gravitationnelle ayant été choisi pour la phase endo-atmosphérique, cette phase ne sera pas étudiée, bien qu'elle soit brièvement abordée à la section 3.1. Ainsi, le site de lancement ne constitue plus le point initial à considérer dans la fonction de guidage. La phase exo-atmosphérique guidée débute avec le largage de la coiffe de protection thermique. Ce largage s'effectue lorsque le flux thermique passe sous un seuil de tolérance prédéfini. Puisque la technique de guidage utilisée minimise l'angle d'attaque, la trajectoire endo-atmosphérique est définie majoritairement par les paramètres de la manœuvre d'inclinaison initiale. Durant cette manœuvre les tuyères du premier étage sont orientées afin de donner une vitesse angulaire de tangage au lanceur. Par la suite, les tuyères sont alignées avec le corps du lanceur et de légers mouvements, commandés par la loi de commande, permettent de maintenir un angle d'attaque nul. Cette suite de manœuvres amène le lanceur à sortir de l'atmosphère à une position et une vitesse non nulle. Cependant, toutes les combinaisons vitesse et position ne permettent pas d'atteindre l'orbite désirée. L'optimisation de la manœuvre d'inclinaison initiale permet d'obtenir un point de sortie cohérent avec l'orbite désirée.

Cette optimisation nécessite un modèle complet, incluant l'aérodynamisme, à six degrés de liberté (ddl) et des algorithmes d'optimisation plus complexes que ceux utilisés dans la suite de ce projet. Pour les besoins de cette thèse, la génération de ce point de sortie a été effectuée sur le modèle Simulink<sup>®</sup> du RDDC-Valcartier. L'algorithme introduit à la section 3.1 est utilisé pour cette partie. Le point de sortie de l'atmosphère ainsi obtenu permet de rejoindre l'orbite désirée et se situe près du point optimal qui sera optimisé dans une étude future. Les algorithmes de trajectographie exo-atmosphérique développés dans la suite de cette thèse pourront alors être réutilisés pour le nouveau point. Le passage vers le point de sortie final devrait demander peu de modifications. Ainsi, dans la suite de la thèse, le point initial utilisé est, outre avis contraire, celui présenté au tableau 1.3.

## 1.4 Objectifs de la thèse

Les sections précédentes présentaient le projet de développement d'un lanceur canadien et de ses boucles de GNC, mais sans approfondir les objectifs spécifiques à cette thèse. Comme mentionné, cette dernière se concentre sur la partie traitant de la trajectoire à suivre : préalablement au lancement, par l'obtention d'une trajectoire de référence et, en cours de lancement, par la fonction de guidage. Ce type de problème

paramètre	valeur
temps [s]	170,8
masse [kg]	4854,2
rayon [km]	6474,6
vitesse [km/s]	2,75
inclinaison de la trajectoire [°]	28,48
cap [°]	-17,11
latitude géocentrique [°]	59,71
longitude [°]	-94,5

TABLEAU 1.3 – Point de sortie de l’atmosphère

repose sur la résolution d’un problème d’optimisation contraint, appelé le problème aux deux bouts. Ce dernier consiste à trouver les actions à réaliser afin d’atteindre la position et la vitesse désirées, et ce, en consommant le moins d’énergie possible. Ces actions doivent cependant respecter les contraintes imposées par la dynamique et la structure du véhicule. Le projet peut ainsi être divisé en trois parties distinctes : la modélisation de la dynamique, l’obtention d’une trajectoire de référence et la fonction de guidage.

Le but de la modélisation de la dynamique est de développer un modèle de la translation d’un lanceur. Ce dernier doit être assez représentatif du mouvement d’un lanceur pour pouvoir générer une trajectoire de référence précise, mais il se doit également d’être rapide pour pouvoir être utilisé dans la fonction de guidage. La précision passe par une modélisation fine de l’accélération gravitationnelle et par un schéma exempt de discontinuités. La vitesse d’exécution se traduit par un développement nécessitant le moins d’opérations possibles afin de propager l’état du lanceur.

L’obtention d’une trajectoire de référence doit développer un algorithme d’optimisation assez précis pour que la trajectoire résultante puisse être utilisée comme trajectoire de référence dans une fonction de guidage basée sur le suivi de trajectoire. Cet algorithme doit être générique pour pouvoir étudier différentes orbites et points initiaux. Cet algorithme passera nécessairement par la résolution d’un problème d’optimisation non-linéaire contraint. L’étude de l’algorithme d’optimisation, nécessaire à la résolution, n’est pas effectuée dans ce projet qui se consacre uniquement sur la formulation du problème.

La troisième partie est le développement d’une fonction de guidage qui calcule les manœuvres à effectuer pour atteindre l’orbite désirée durant le lancement. Le lanceur subit alors des perturbations, ses mesures de position et vitesse sont bruitées et le temps alloué à la résolution de la fonction est limité. Pour y parvenir, il peut utiliser des

connaissances *a priori* et des simplifications afin d'accélérer la résolution et permettre à la fonction de s'insérer dans les capacités de calcul du lanceur. Les simplifications ne doivent cependant pas nuire à la précision de l'orbite atteinte afin qu'elle demeure assez près de l'orbite désirée pour considérer le lancement comme une réussite.

## 1.5 Plan de la thèse

Le chapitre 2 présente la modélisation de la dynamique du système. Dans le cas d'un lanceur, il est composé des équations de translation du véhicule. Le modèle considère uniquement les équations de translation puisque la division en deux boucles imbriquées de la section 1.2 permet que la dynamique rapide, celle de rotation, soit gérée par la boucle de commande. Cependant, le schéma des boucles imbriquées modifie le procédé à guider. Celui-ci n'est plus composé uniquement de la translation, mais il doit inclure la dynamique de la boucle interne. Cette inclusion s'effectue via le modèle à pseudo-cinq degrés de liberté introduit à la fin du chapitre.

À la suite de l'obtention d'un modèle de la dynamique du véhicule à guider, il est possible de définir une trajectoire de référence. Cette partie, décrite dans le chapitre 3, est celle traitant des connaissances *a priori* des boucles de GNC (section 1.2.4). Ce chapitre définit un problème d'optimisation par méthode directe permettant d'obtenir la trajectoire à suivre et les actions à effectuer pour réaliser cette trajectoire. Les méthodes directes reposent sur une discrétisation des entrées du système et nécessitent peu de connaissances sur la trajectoire recherchée. Elles sont donc, dans l'état d'avancement actuel, intéressantes pour le projet.

La troisième partie, composée des chapitres 4, 5, 6 et 7, présente le guidage d'un lanceur de satellites basé sur la commande prédictive. Dans un premier temps, la théorie sur la commande prédictive (MPC) est présentée au chapitre 4. Cette présentation inclut également une discussion sur la stabilité de la fonction, un critère essentiel en guidage et en commande. Le chapitre 5 applique cette théorie en utilisant les équations non-linéaires précédentes dans le modèle de prédiction. Le chapitre 6 présente une modélisation de la dynamique de translation qui permet de simplifier le modèle utilisé dans l'algorithme. Cette modélisation est une représentation linéaire variante dans le temps (LTVR). La variation est exprimée sous la forme d'un polynôme dont la variable indépendante est le temps et comme une représentation linéaire fractionnaire (LFR). Ces modèles sont utilisés au chapitre 7 afin de développer un algorithme de guidage par commande prédictive où le modèle de prédiction est linéaire variant dans le temps. Ce chapitre compare les résultats obtenus par les algorithmes de guidage basés sur la

commande prédictive (non-linéaire et linéaire variant dans le temps) à une méthode classique pour le guidage d'un lanceur de satellite.

Le chapitre 8 résume les principales conclusions des développements précédents. Il suggère une orientation pour la poursuite des travaux effectués dans ce doctorat. Ces suggestions concernent autant la suite du développement que l'introduction des algorithmes dans des boucles de GNC complètes. Les différentes annexes de ce document contiennent des précisions utiles, mais non nécessaires à cette thèse. Ces précisions portent sur des notions mathématiques (annexes A et B), sur des théories de commande (annexe C) ou sur des solutions de base (annexes D, E et F).

## Chapitre 2

# Modélisation de la dynamique de translation

La trajectoire d'un lanceur se traduit par la connaissance, à tout instant, de la position et de la vitesse par rapport à un point fixe dans l'espace. Il est ainsi possible de dire que la définition d'une trajectoire de référence et le guidage d'un lanceur nécessitent seulement la connaissance du mouvement à trois degrés de liberté (3ddl) du véhicule, correspondant à son mouvement de translation. Les trois autres degrés de liberté, ceux liés au mouvement de rotation d'un véhicule se déplaçant dans l'air, seront contrôlés par la fonction de commande. Cette séparation des dynamiques est cohérente avec la définition des fonctions effectuée à la section 1.2.

La modélisation considère donc le lanceur comme un point de masse variable circulant autour d'un point central attractif. Les équations de translation sont donc l'application des lois de la mécanique classique (lois de Newton) à un objet spatial. Le résultat le plus connu de cette mécanique spatiale (astrodynamique) est les lois de Kepler (voir l'annexe D). Ces dernières décrivent les propriétés d'un objet non propulsé orbitant autour d'un autre objet central attractif dont sa gravité est assumée proportionnelle à l'inverse du carré de la distance séparant le centre de masse des deux objets. Puisque le lanceur est propulsé et que la Terre n'est pas proportionnelle à l'inverse du carré, les lois de Kepler ne suffisent pas à décrire son mouvement, il faut donc revenir aux notions de mécanique classiques. La modélisation des équations de translation consiste ainsi en l'application de la seconde loi de Newton ( $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ).

Il existe deux approches couramment utilisées pour effectuer ce développement. La première consiste à appliquer directement la seconde loi de Newton sur les vecteurs écrits dans un repère inertiel. Ce qui permet d'obtenir la vitesse de déplacement du lan-

teur et sa position par rapport au centre du repère. Cette approche, nommée approche vectorielle, est classique et bien documentée dans la majorité des documents traitants d'astrodynamique, par exemple Zipfel (2007) ou Blakelock (1991). Ces développements sont repris et détaillés à la section 2.3.1. La seconde approche, plus complexe à développer, est basée sur la séparation de la vitesse inertielle en ses composantes, vitesse de déplacement du lanceur et vitesse provenant de la rotation de la Terre. Ces composantes sont, par la suite, toutes deux exprimées dans un repère non inertiel et dérivées par rapport au temps. Cette approche, nommée approche angulaire, est également bien documentée (Zipfel (2007) ou Tewari (2007) par exemple). Elle est détaillée à la section 2.3.2.

Comme leur développement le démontre, ces deux approches ont cependant quelques problèmes lorsqu'elles sont appliquées à la translation d'un objet autour d'un point central attractif. L'approche vectorielle est difficile à visualiser et longue à calculer et l'approche angulaire comporte trois discontinuités. De ses trois discontinuités, seulement celle provenant du passage au-dessus des pôles est nuisible pour la partie exo-atmosphérique de la trajectoire de lancement. La section 2.3.3 présente une approche, basée sur un quaternion complet, qui permet d'éliminer le principal problème des deux autres approches. Le développement présenté constitue une extension de celui présenté par Andreis et Canuto (2005).

Avant de pouvoir effectuer ces trois développements, les bases du mouvement d'un lanceur doivent être définies. Ces bases sont introduites via la définition des différents systèmes de coordonnées utiles dans la conception d'une boucle de GNC d'un lanceur (section 2.1) et via la définition des forces agissant sur celui-ci (section 2.2). Par la suite, les trois approches sont développées et comparées entre elles (section 2.3).

Puisque le lanceur est un véhicule servant à l'injection orbitale, il convient donc d'introduire les paramètres orbitaux définissant l'orbite en fonction de la vitesse et de la position. La section 2.4 définit ces paramètres et les relations pour les lier aux coordonnées polaires.

La section 2.5 complexifie la modélisation à trois degrés de liberté pour introduire deux pseudo degrés de liberté. Cet ajout sert à modéliser la boucle de commande dans le procédé à guider. Comme mentionné par Zipfel (2007), une fonction de guidage développée pour un modèle à pseudo-cinq degrés de liberté peut être introduite, sans aucune modification, dans le modèle à six degrés de liberté.

## 2.1 Systèmes de coordonnées utilisés

Cette section introduit les principaux systèmes de coordonnées utilisés dans la modélisation de la dynamique d'un objet spatial. À ce point, il convient de faire une distinction entre le repère et le système de coordonnées qui sont souvent confondus et mal interprétés. Ces deux termes sont souvent employés, à tort, pour la même signification. Le repère a une base physique, il représente un objet physique et possède une origine. Cependant, il ne fait que définir une base orthonormée en fonction de cette signification physique. Quant à lui, le système de coordonnées est une représentation mathématique sans base physique. Cette représentation est un trièdre trirectangle dont les arêtes correspondent aux axes gradués permettant d'exprimer un vecteur dans le système de coordonnées. La confusion entre les deux appellations provient du fait que les axes du système de coordonnées sont souvent définis parallèles à la base orthonormée du repère<sup>1</sup>. Ainsi, dans une modélisation et un développement mathématique, le système de coordonnées doit être utilisé. Les sections 2.1.1 à 2.1.9 présentent les différents systèmes utiles alors que la section 2.1.10 introduit les matrices de rotation permettant le passage d'un système de coordonnées vers un autre.

### 2.1.1 Système de coordonnées J2000

Le premier système de coordonnées à définir est le système inertiel J2000 (figure 2.1). Ce système tire son nom du moment où il est défini, c'est-à-dire le 1<sup>er</sup> janvier 2000. À ce moment, la Terre se situait, sur son orbite, dans la constellation du Bélier. L'axe  $x_G$  est formé par la droite d'intersection du plan de l'écliptique et du plan équatorial. À l'instant de la définition et en définissant le sens positif vers l'extérieur de l'orbite, l'axe se trouve alors à pointer vers le Bélier ( $\Upsilon$ ). L'axe  $z_G$  est défini parallèle à l'axe de rotation de la planète et pointe vers son pôle nord. L'axe  $y_G$  se situe dans le plan de l'équatorial et complète le système direct.

N'importe quel système de coordonnées peut être inertiel en autant que les forces d'inertie (annexe B) induites par le mouvement du système soient négligeables en comparaison aux forces externes. Un objet sur lequel aucune force externe n'est appliquée doit se déplacer à vitesse constante, en direction et en norme. Dans le cas d'un lanceur, la vitesse de déplacement moyenne est telle que la rotation de la Terre ne peut être négligée, mais que sa révolution peut l'être. Ainsi, un système, tel que le système J2000,

---

1. L'appellation *repère* est ainsi cohérente avec la définition du mot qui signifie : *marque, jalon, servant à une utilisation ultérieure* (de Villers, 1997)

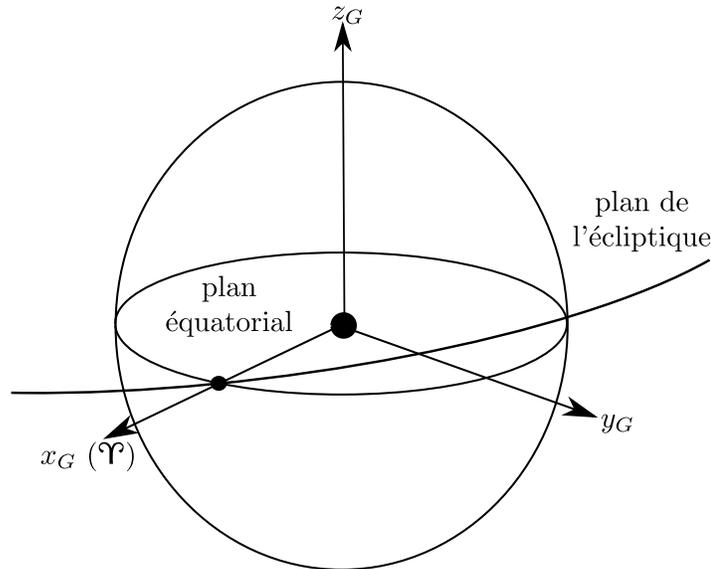


FIGURE 2.1 – Système de coordonnées J2000

défini pour ne pas suivre la rotation de la Terre peut être considéré inertiel pour un lanceur de satellites.

### 2.1.2 Système de coordonnées terrestre

Le second système de coordonnées nécessaire dans l'étude du mouvement d'un lanceur est lié à la Terre en rotation (figure 2.2). Sa définition s'effectue à partir de référence terrestre. L'axe  $x_E$  est formé par l'intersection du plan équatorial et du plan formé par le méridien de Greenwich. Il est orienté du centre de la Terre vers ce même méridien. L'axe  $z_E$  est défini parallèle à l'axe de rotation de la Terre et pointe vers le pôle nord. Le troisième axe,  $y_E$ , se situe dans le plan équatorial et complète le système direct.

Ce système de coordonnées est donc lié au système J2000 uniquement par le temps sidéral actuel. Ce temps correspond au temps écoulé depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2000. Une rotation autour de l'axe de rotation de la Terre ( $x_G$ ) de l'angle horaire permet de passer du système inertiel J2000 au système terrestre. Cette rotation unique est une approximation du passage vers le système de coordonnées terrestre puisqu'elle néglige la nutation, la précession et le déplacement de l'axe de rotation de la Terre. Ces trois déplacements sont cependant négligeable dans l'étude d'une trajectoire de lancement.

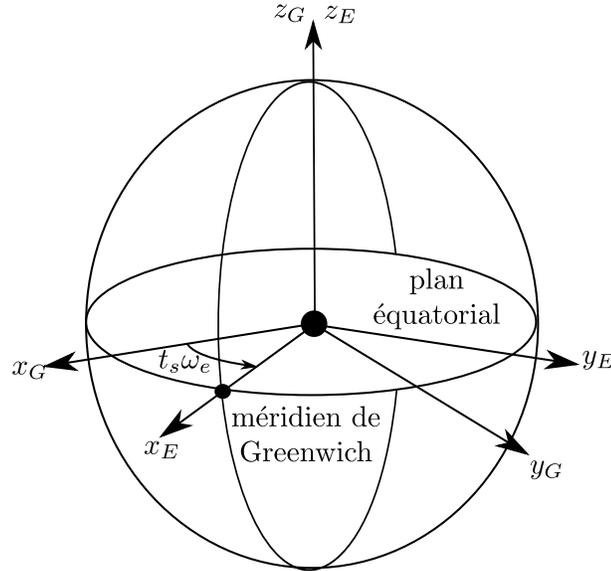


FIGURE 2.2 – Système de coordonnées terrestre

### 2.1.3 Système de coordonnées local

Ce système permet de situer le centre de masse du lanceur en utilisant des références terrestres (figure 2.3). Il est le résultat de l'utilisation de coordonnées polaires pour exprimer la position d'un objet autour de la Terre. La latitude géocentrique ( $\delta$ ) et la longitude ( $\lambda$ ) permettent d'obtenir ce système. Le passage du système terrestre vers le système local s'effectue par une suite de deux rotations. La première rotation de  $\lambda$  autour de l'axe de rotation de la Terre ( $z_E$ ). La seconde rotation s'effectue autour de l'axe  $y_L$ , obtenu après la première rotation. Cette seconde rotation vaut  $-\delta$ . Le signe négatif devant l'angle est important puisqu'il signifie que la rotation est anti-horaire. La latitude géocentrique correspond à la latitude de l'objet autour d'une Terre sphérique. Le système de coordonnées ainsi obtenu à des points de références terrestres. L'axe  $x_L$  est parallèle au rayon (vecteur reliant le centre de la Terre au centre de masse de l'objet) et pointe vers l'extérieur centre de la Terre. L'axe  $y_L$  est dans le plan équatorial et pointe vers l'est. Pour sa part, l'axe  $z_L$  complète le système direct et pointe vers le nord.

Ce système de coordonnées est similaire au système de coordonnées NED (*North-East-Down*) classiquement utilisé en aéronautique (Zipfel, 2007). La différence entre les deux se situe principalement dans l'orientation de l'axe parallèle au rayon. L'axe  $x$  du système local est positif en s'éloignant de la Terre alors que l'axe  $z$  du système NED est négatif en s'éloignant. De plus, l'axe  $x$  du système NED correspond à l'axe  $z$  du système local. L'utilisation du système local est préféré dans cette thèse puisque l'altitude et

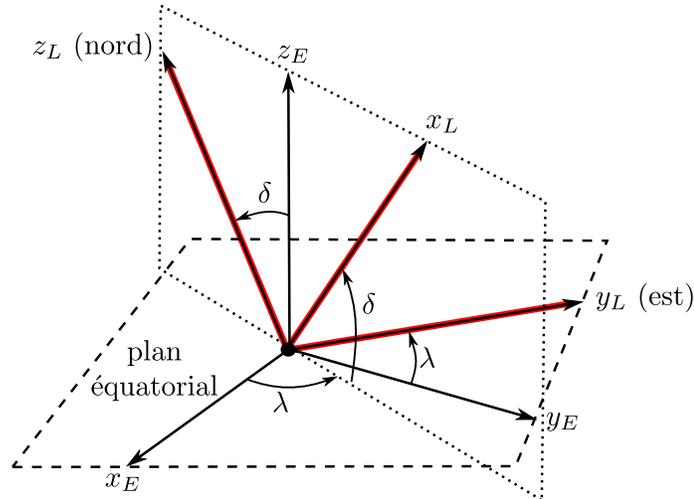


FIGURE 2.3 – Système de coordonnées local

les angles d'orientation de la vitesse (section 2.1.4) s'obtiennent en utilisant une valeur positive de la coordonnée sur l'axe  $x_L$ .

### 2.1.4 Système de coordonnées de la trajectoire

Ce système permet d'orienter la vitesse de déplacement du lanceur par rapport aux points cardinaux (figure 2.4). Il résulte de l'utilisation des angles définissant l'orientation de la vitesse par rapport aux points cardinaux. Le cap ( $\chi$ ) est l'angle, dans le sens horaire, entre la projection de la vitesse sur l'horizon local et le nord. L'inclinaison de la trajectoire ( $\gamma$ ) est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizon local. Il est ainsi possible de définir une suite de rotations pour passer du système local au système de la trajectoire. La première rotation s'effectue autour de l'axe  $x_L$  et vaut  $-\chi$ . Par la suite, une rotation de  $\gamma - 90^\circ$  autour de l'axe  $y_T$  est effectuée. L'axe  $x_T$  ainsi obtenu se trouve à être parallèle à la vitesse et l'axe  $z_T$  contenu dans le plan vertical orienté vers la Terre.

Les angles d'orientation de la vitesse sont plus directs lorsqu'ils ont utilisés avec le système NED. Dans ce cas, la suite de rotations permettant le passage du système NED vers le système de la trajectoire est composée d'une rotation d'un angle  $\chi$  autour de l'axe  $z_{NED}$  suivi d'une rotation d'un angle  $\gamma$  autour de l'axe  $y_T$ .

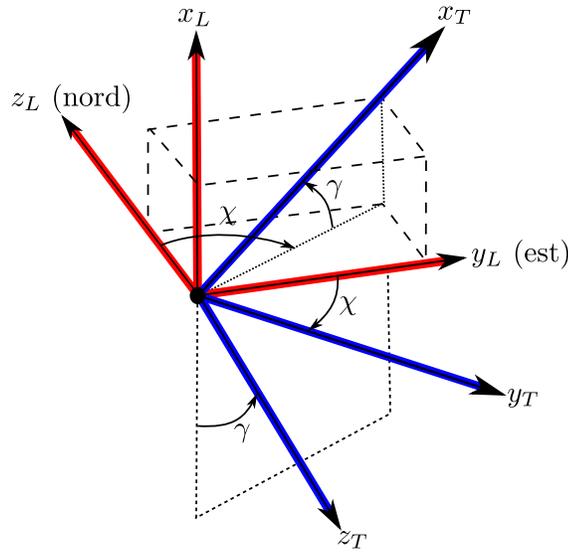


FIGURE 2.4 – Système de coordonnées de la trajectoire

### 2.1.5 Second système de coordonnées sur la trajectoire

Ce quatrième système est très semblable au précédent (figure 2.5). Il résulte également de l'utilisation des angles d'orientation de la vitesse. Cependant, l'orientation de ses axes provient d'opérations mathématiques plutôt que d'une analyse physique. L'axe  $y_Q$  est parallèle au produit vectoriel entre les vecteurs position et vitesse du lanceur. L'axe  $x_Q$  est, tout comme l'axe  $x_L$ , parallèle à la vitesse et l'axe  $z_Q$  complète le système direct. Cette définition permet, comme il est présenté à la section 2.3.3, de simplifier le développement des équations de translation utilisant un quaternion. Ceci explique d'ailleurs que les axes de ce système soient exprimés par l'indice  $Q$ .

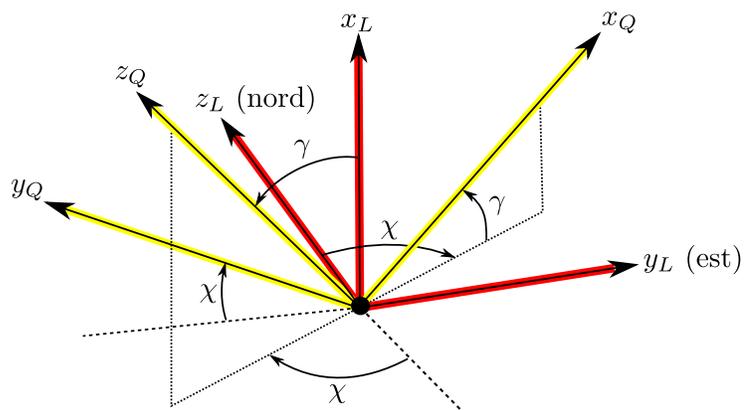


FIGURE 2.5 – Second système de coordonnées sur la trajectoire

### 2.1.6 Système de coordonnées de la poussée

Le cinquième et dernier système de coordonnées directement utilisé dans le développement des équations de translation d'un lanceur est celui défini à l'aide des angles d'orientation de la poussée (figure 2.6). Il sert à positionner la poussée par rapport au lanceur. Puisque le lanceur est défini comme un point de masse, l'orientation de la poussée s'effectue par rapport à la direction de déplacement du lanceur. Ainsi les angles d'orientation de la poussée correspondent aux angles entre l'orientation de la poussée et le vecteur vitesse. Il est possible de définir plusieurs combinaison d'angles permettant de représenter la poussée, la représentation utilisée ici est particulièrement adaptée à la problématique de trajectographie orbitale. Le premier angle correspond à la rotation autour de l'axe  $z_T$ . Puisqu'une modification de cet angle entraîne une modification de l'orientation du plan orbital (section 2.4), cet angle ( $\varphi$ ), est nommé angle hors plan orbital. Le second angle ( $\vartheta$ ), correspondant à une rotation positive autour de l'axe  $y_P$ , est appelé angle dans le plan orbital. Cette appellation provient du fait qu'une modification de cet angle provoque uniquement un changement de la forme de l'orbite.

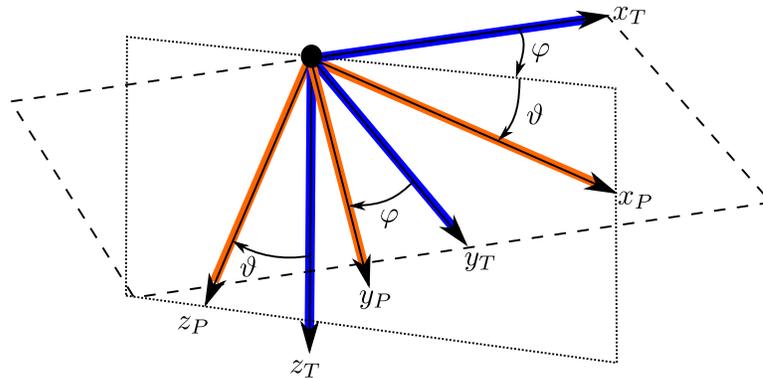


FIGURE 2.6 – Système de coordonnées de la poussée

### 2.1.7 Système de coordonnées du corps

Ce système n'est pas directement utilisé dans la modélisation de la translation (figure 2.7). En effet, il est, comme son nom l'indique, défini en utilisant le corps et n'a donc pas de signification lorsque le lanceur est considéré comme un point de masse. L'axe  $x_B$  pointe vers le nez du lanceur, l'axe  $y_B$  pointe à tribord et l'axe  $z_B$  complète le système direct. Le passage du système local vers le système du corps s'effectue en utilisant les angles d'Euler. Ces angles servent, de façon générale, à définir l'attitude d'un objet dans un système de coordonnées quelconque. Puisque l'orientation du sys-

tème de coordonnées est déterminée par trois rotations, il existe une indétermination où deux suites de rotations peuvent donner la même orientation. La position de cette indétermination dépend de l'ordre dans laquelle les trois rotations sont effectuées. Par exemple, la suite présentée à la figure 2.7 donne une indétermination pour un angle de tangage ( $\Theta$ ) de  $90^\circ$ . Avec cette orientation, il est impossible de déterminer la valeur de l'angle de lacet ( $\Psi$ ) et celle de l'angle de roulis ( $\Phi$ ). La figure présente une rotation négative en lacet autour de l'axe  $x_L$  suivie d'une rotation de  $90^\circ - \Theta$  autour de l'axe  $y'_L$  et d'une rotation positive en roulis autour de l'axe  $x_B$ .

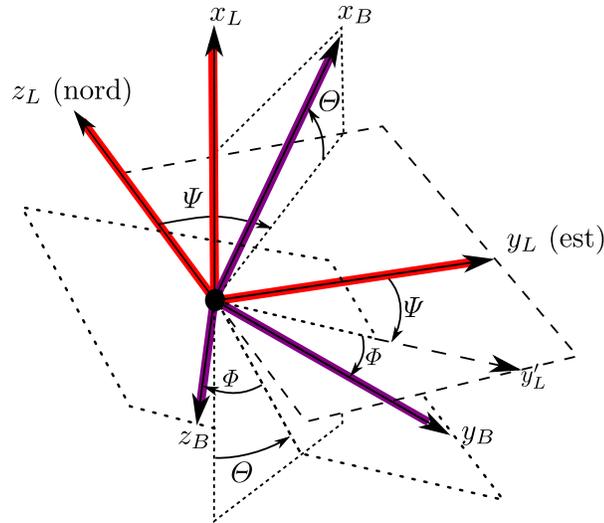


FIGURE 2.7 – Système de coordonnées du corps

Ce système de coordonnées est principalement utile pour la boucle de commande (section 1.2). Gérant la rotation, cette dernière se doit de placer le lanceur dans l'orientation désirée. Ainsi, les ordres donnés par la fonction de guidage sont des angles d'Euler. Certaines hypothèses, présentées à la section 2.1.11, permettent de lier les angles d'orientation de la poussée, calculés par la fonction de guidage, aux angles d'Euler.

### 2.1.8 Système de coordonnées aérodynamique

Ce système de coordonnées n'est également pas utilisé directement dans la modélisation de la translation (figure 2.8). Il a une signification uniquement dans la phase endo-atmosphérique du lancement. Il est similaire au système de coordonnées sur la trajectoire, mais utilise la vitesse dans l'air plutôt que la vitesse réelle. C'est donc dire qu'il inclut le vent dans la vitesse servant à définir son axe  $x_W$ .

Ce système de coordonnées est cependant plus utilisé pour sa relation avec le sys-

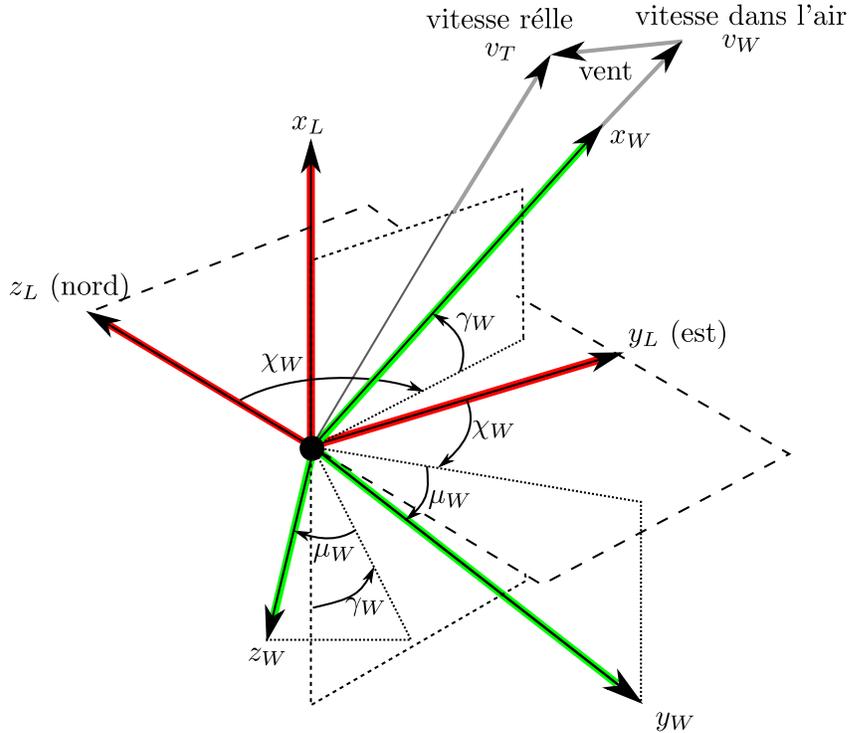


FIGURE 2.8 – Système de coordonnées aérodynamique

tème local. Cette relation s'effectue à partir des angles d'attaque ( $\alpha$ ) et de dérapage ( $\beta$ ) (figure 2.9). Ces angles sont utilisés dans le guidage endo-atmosphérique. Ce dernier n'est pas étudié dans le cadre de cette thèse mais certains commentaires lui faisant référence sont faits à la section 3.1 et nécessite la définition de ces angles. La section 2.1.11 présente également des hypothèses permettant de lier les angles aérodynamiques aux angles d'orientation de la poussée.

### 2.1.9 Système de coordonnées aérobalistique

Dans le cas d'un lanceur, qui possède une symétrie circulaire, le plan du facteur de charge, formé par les axes  $z_A$  et  $x_B$ , est plus important que le plan de symétrie formé par les axes  $x_W$  et  $z_W$ . Ainsi, un dernier système de coordonnée, très similaire au précédent mais utilisant les angles aérobalistiques est défini (figure 2.10). L'orientation de ce système correspond à une rotation autour de l'axe  $x_B$  du roulis aérodynamique du lanceur ( $\Phi'$ ) suivi d'une rotation par rapport à l'axe  $y_A$ . L'amplitude de cette seconde rotation correspond à l'angle d'attaque total ( $\alpha'$ ).

Cette suite de rotation permet de superposer l'axe  $x_A$  et l'axe  $x_W$ . Il existe ainsi des relation entre les angles aérodynamiques et les angles aérobalistiques. Ces relations

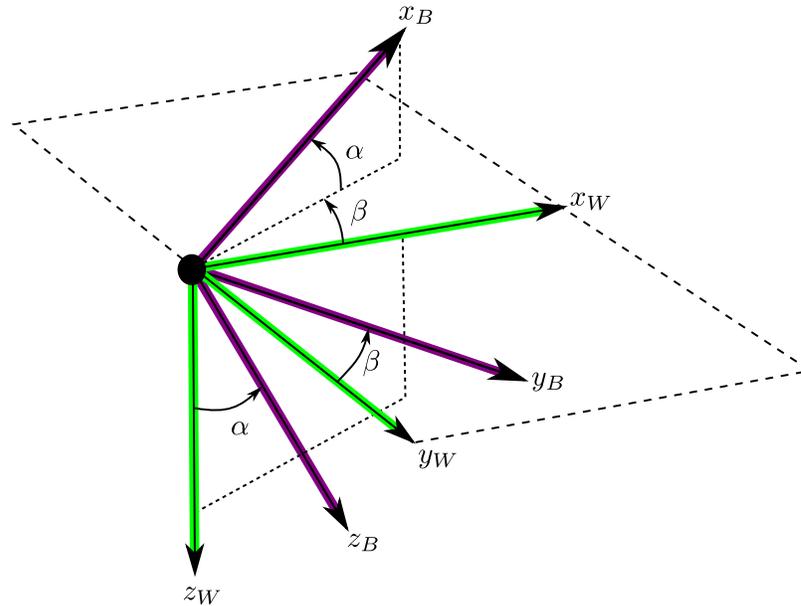


FIGURE 2.9 – Système de coordonnées aérodynamique, depuis le système corps

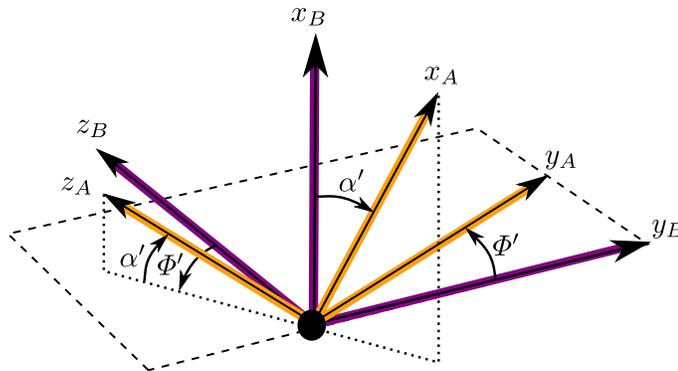


FIGURE 2.10 – Système de coordonnées aérobalistiques, depuis le système corps

(équations (2.1) et (2.2)) proviennent du triangle sphérique formé par les quatre angles (Zipfel (2007), p. 79, figure 3.19).

$$\alpha' = \arccos(\cos \alpha \cos \beta) \quad (2.1)$$

$$\Phi' = \arctan\left(\frac{\tan \beta}{\sin \alpha}\right) \quad (2.2)$$

### 2.1.10 Relation entre les systèmes de coordonnées

Il est possible d'exprimer mathématiquement le passage d'un système de coordonnées à un autre par les matrices liés la suite de rotations. Chaque rotation s'exprime par un matrice de rotation correspondante à l'axe autour duquel la rotation est effectuée.

La rotation d'un angle  $a$  autour de l'axe  $x$  s'exprime :

$$\mathbf{T}_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

Celle autour de l'axe  $y$  est :

$$\mathbf{T}_y(a) = \begin{bmatrix} \cos(a) & 0 & -\sin(a) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a) & 0 & \cos(a) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

et celle autour de l'axe  $z$  :

$$\mathbf{T}_z(a) = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matrice de rotation complète est obtenu par la multiplication des matrices intermédiaires entre elles. Par exemple, la rotation du système terrestre vers le système local se compose d'un rotation de  $\lambda$  autour de  $z_E$  suivi d'une rotation de  $-\delta$  autour de  $y_L$  :

$$\mathbf{T}_E^L = \mathbf{T}_y(-\delta) \mathbf{T}_z(\lambda) \quad (2.6)$$

La notation  $\mathbf{T}_E^L$  exprime la matrice de rotation de  $E$  vers  $L$ .

Les matrices de rotation sont orthogonales. L'orthogonalité des matrices modélise le fait qu'elles représentent une rotation qui ne modifie par l'ordre des axes et qu'elles conservent l'orthogonalité de ceux-ci. L'orthogonalité d'une matrice implique que sa transposée est égale à son inverse et que le carré de son déterminant est unitaire. Dans le cas des matrices de rotations, puisqu'elles représentent des systèmes directs, leur déterminant vaut  $+1$ . Pour des systèmes indirects, il vaudrait  $-1$ . Une transposée égale à l'inverse modélise le fait que la suite de rotations inverse est égale à la transposée de la matrice initiale ( $\mathbf{T}_E^L = \mathbf{T}_L^E{}^T$ ).

De plus, comme il est possible de multiplier les rotations de base entre elles pour former une matrice de rotation, il est possible de multiplier plusieurs matrices entre elles pour représenter le passage d'un système à un qui ne lui est pas directement relié. Par exemple, la suite de rotations permettant de passer du système terrestre au système de la trajectoire peut se modéliser comme :

$$\mathbf{T}_E^T = \mathbf{T}_y\left(-\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \mathbf{T}_x(-\chi) \mathbf{T}_y(-\delta) \mathbf{T}_z(\lambda) \quad (2.7)$$

ou, en sachant que  $\mathbf{T}_L^T = \mathbf{T}_y\left(-\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \mathbf{T}_x(-\chi)$ , comme :

$$\mathbf{T}_E^T = \mathbf{T}_L^T \mathbf{T}_E^L \quad (2.8)$$

La représentation de la suite de rotations permettant le passage d'un système à un autre par une matrice de rotation permet d'exprimer un vecteur dans n'importe quel système de coordonnées. Pour ce faire, il suffit de multiplier la matrice de rotation par le vecteur exprimé dans le système de coordonnées d'origine.

$$\mathbf{x}_{vers} = \mathbf{T}_{de}^{vers} \mathbf{x}_{de} \quad (2.9)$$

### 2.1.10.1 Principales matrices de rotation

Les sections définissant chacun des systèmes de coordonnées (sections 2.1.1 à 2.1.9) présentaient également la suite de rotations nécessaire pour passer d'un système de coordonnées précédent au système de coordonnées défini. À l'aide des définitions des matrices de rotation de base (équations (2.3) à (2.5)) et de ces suites de rotations, il est possible d'obtenir les matrices de rotation désirées. Dans la suite du document, lors de sa première utilisation, chaque matrice de rotation est exprimée en fonction des rotations de base.

### 2.1.11 Relation entre les angles d'orientation de la poussée et les angles d'orientation du lanceur

Les angles d'orientation de la poussée ( $\vartheta$  et  $\varphi$ ) sont des angles conceptuels qui permettent uniquement de définir l'orientation de la poussée par rapport à la direction de déplacement du lanceur. Ce sont des angles inutiles à la fonction de commande qui commande l'attitude du lanceur et non pas de sa poussée. La fonction de guidage doit donc convertir les angles d'orientation de la poussée en angles d'orientation du lanceur. Pour déterminer l'attitude du lanceur, deux ensembles d'angles peuvent être utilisés : les angles d'Euler ou les angles aérodynamiques.

La séparation de la section 1.2 est celle qui permet que la fonction de guidage ne gère que le mouvement de translation du lanceur. Cette séparation lie les angles d'orientation de la poussée aux angles d'Euler. Ainsi, puisque la rotation du lanceur n'est pas considérée, ce dernier devient un point de masse sans orientation. Cette orientation peut ainsi être posée afin de simplifier l'utilisation des angles d'Euler. Le nez du lanceur sera alors défini comme étant toujours pointé dans la direction de la force de poussée. En négligeant les angles d'orientation de la tuyère, le système de coordonnées du corps et celui de la poussée se retrouve donc confondus. Ce choix n'est pas purement arbitraire puisque, afin de limiter les problèmes structuraux et de maximiser le transfert d'énergie du lanceur vers l'orbite, la poussée doit être, dans la majorité du temps, orientée

parallèlement au lanceur. La différence entre les deux est l'orientation des tuyères qui permet de modifier l'orientation de la poussée par rapport au lanceur. Cette orientation est celle utilisée par la fonction de commande pour placer le lanceur dans l'attitude désirée. L'équivalence entre le système de coordonnées du corps et celui de la poussée se répercute également dans les matrices de rotation. Ainsi la matrice de rotation du système local vers le système du corps est égale à celle du système local vers le système de la poussée :

$$\mathbf{T}_L^B = \mathbf{T}_L^P \quad (2.10)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{T}_L^B$  est composée des trois rotations élémentaires définies à la section 2.1.7 :

$$\mathbf{T}_L^B = \mathbf{T}_x(\Phi) \mathbf{T}_y\left(-\frac{\pi}{2} + \Theta\right) \mathbf{T}_x(-\Psi) \quad (2.11)$$

Le lanceur ayant une symétrie circulaire, le roulis ( $\Phi$ ) peut être maintenu à  $0^\circ$  sans affecter la validité de la modélisation, au point de vue du guidage. Pour la fonction de commande, le roulis doit être considéré afin de correctement orienter les tuyères. Ainsi, la matrice de rotation  $\mathbf{T}_L^B$  à utiliser dans le guidage vaut :

$$\mathbf{T}_L^B = \mathbf{T}_y\left(-\frac{\pi}{2} + \Theta\right) \mathbf{T}_x(-\Psi) \quad (2.12)$$

Pour sa part, la matrice de rotation  $\mathbf{T}_L^P$  est composée de la matrice de rotation décrivant le passage du système local au système sur la trajectoire multipliant la matrice de rotation du système sur la trajectoire vers le système de la poussée. Ces deux matrices de rotation sont composées, respectivement, des rotations décrites aux sections 2.1.4 et 2.1.6 :

$$\mathbf{T}_L^P = \mathbf{T}_T^P \mathbf{T}_L^T = \mathbf{T}_y(-\vartheta) \mathbf{T}_z(\varphi) \mathbf{T}_y\left(-\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \mathbf{T}_x(-\chi) \quad (2.13)$$

Les égalités terme-à-terme de ces matrices de rotation (équations (2.12) et (2.13)) permettent de tirer les relations suivantes entre les angles d'Euler et les angles d'orientation de la poussée :

$$\sin \Theta = \cos \vartheta \sin \gamma \cos \varphi - \sin \vartheta \cos \gamma \quad (2.14)$$

$$\tan \Psi = \frac{-\sin \varphi \cos \gamma \cos \chi + \cos \varphi \sin \chi}{\sin \varphi \sin \chi \cos \gamma + \cos \varphi \cos \chi} \quad (2.15)$$

Notamment, lorsque l'angle d'orientation de la poussée hors plan orbital ( $\varphi$ ) est nul, l'angle de lacet ( $\Psi$ ) est directement égal au cap ( $\chi$ ) et l'angle de tangage ( $\Theta$ ) correspond à l'inclinaison de la trajectoire ( $\gamma$ ) auquel on soustrait l'angle d'orientation de la poussée dans le plan ( $\vartheta$ ) :

$$\Theta = \gamma - \vartheta \quad (2.16)$$

La seconde équivalence, celle entre les angles aérodynamiques et les angles de la poussée s'obtient en effectuant l'hypothèse d'absence de vent. Dans ce cas, le système de coordonnées aérodynamique et le système sur la trajectoire sont identiques. En combinant cette hypothèse avec l'équivalence entre les systèmes de coordonnées de la poussée et du corps, il est possible d'obtenir la relation désirée. En effet, les angles aérodynamiques définissent la rotation du système aérodynamique vers le système corps :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_{\mathbf{y}}(\alpha) \mathbf{T}_{\mathbf{z}}(-\beta) \quad (2.17)$$

Les angles d'orientation de la poussée définissent la rotation du système sur la trajectoire vers le système lié à la poussée :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{P}} = \mathbf{T}_{\mathbf{y}}(-\vartheta) \mathbf{T}_{\mathbf{z}}(\varphi) \quad (2.18)$$

Les équivalences précédentes entre les systèmes de coordonnées sont telles que les deux rotations précédentes sont équivalentes :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{P}} \quad (2.19)$$

et donc que les angles d'orientation de la poussée sont égaux, au signe près, aux angles aérodynamiques :

$$\vartheta = -\alpha \quad (2.20)$$

$$\varphi = -\beta \quad (2.21)$$

Ces relations seront particulièrement utiles dans la partie traitant du guidage en phase endo-atmosphérique (section 3.1). Ces relations sont basées sur les hypothèses d'absence de vent et de tuyères rigides, leur utilisation directement dans le calcul des forces aérodynamiques entraîne donc une approximation implicite.

## 2.2 Forces agissant sur le lanceur

Comme mentionné précédemment, la modélisation des équations de translation consiste en l'application de la seconde loi de Newton ( $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ). Ainsi, lorsque les forces agissant sur le lanceur sont additionnées, l'accélération inertielle du lanceur s'obtient uniquement en divisant ce résultat par la masse actuelle du lanceur. Ce principe est la base du développement des équations de translation par l'approche vectorielle (section 2.3.1). La présente section se concentre cependant uniquement sur le développement et la modélisation des forces. Ces forces seront utilisées à la section suivante (section 2.3) pour obtenir les équations de translation. Ainsi, les sections 2.2.1 à 2.2.3 introduisent les trois types de forces considérées et principalement l'amplitude des celles-ci. La section 2.2.4 présente certaines forces supplémentaires qui pourraient être incluses et leur ordre de grandeur.

## 2.2.1 Force gravitationnelle terrestre

La force gravitationnelle terrestre est la principale force que le lanceur doit vaincre et correspond à l'attraction que la planète exerce sur un corps se situant près d'elle. Cette force gravitationnelle ( $F_g$ ), liée à l'accélération gravitationnelle par la seconde loi de Newton :

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \quad (2.22)$$

En astrodynamique, la solution de Kepler (annexe D) considère celle-ci comme étant la résolution du problème à deux corps. Ainsi, elle est dirigée vers le centre de la Terre et est fonction de l'inverse du carré de l'altitude de l'objet orbital. Cependant, la Terre n'étant pas sphérique et homogène (la répartition de sa masse n'est pas uniforme), cette modélisation est valide uniquement que lorsque l'objet orbitant est suffisamment loin pour que la Terre soit considérée comme un point de masse, ce qui est le cas lorsque l'altitude de l'orbite est très supérieure au rayon équatorial (Tewari, 2007).

Ainsi, puisque l'altitude du lanceur est bien en deçà du rayon équatorial terrestre, un modèle de l'accélération gravitationnelle correspondant au gradient du potentiel gravitationnel ( $U_g$ ) doit être utilisé :

$$\mathbf{g} = -\nabla U_g \quad (2.23)$$

Une modélisation mathématique simple mais représentative du potentiel gravitationnel terrestre consiste en l'intégration du volume terrestre par la sommation des harmoniques zonaux et tesseraux (Gaposchkin et Lambeck, 1970) :

$$U_g = \frac{\mu_e}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^n (-J_n P_n(\sin \delta)) + \sum_{m=1}^n (C_{mn} \cos(m\lambda) + S_{mn} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \delta) \right) \right) \quad (2.24)$$

Cette représentation introduit les constantes terrestres  $\mu_e$  (paramètre gravitationnel de la Terre),  $r_{eq}$  (rayon équatorial terrestre),  $J_n$  (harmonique zonal d'ordre  $n$ ) et  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  (harmoniques tesseraux de degré  $m$  et d'ordre  $n$ ). Les valeurs de ces harmoniques se trouvent dans Gaposchkin et Lambeck (1970). Les termes  $P_n$  et  $P_{nm}$  sont respectivement le polynôme de Legendre d'ordre  $n$   $\left( P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \right)$  et la fonction de Legendre associée  $\left( P_{nm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right)$ . L'intérêt principal de cette représentation provient des harmoniques qui la rendent versatile. Les imperfections dans l'accélération gravitationnelle peuvent être modélisées avec grande précision uniquement en allongeant la sommation des harmoniques. À l'opposé, une modélisation simple et spécifique peut

être obtenue en utilisant uniquement les indices désirés dans la sommation. Notamment, les algorithmes développés dans le cadre du projet se limiteront à l'utilisation du terme du  $J_2$ , modélisant l'aplatissement de la Terre :

$$U_g = \frac{\mu_e}{r} \left( 1 + J_2 \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^2 \left( \frac{1 - 3 \sin^2 \delta}{2} \right) \right) \quad (2.25)$$

L'utilisation du second harmonique zonal est nécessaire puisque l'orbite étudiée et le site de lancement amènent le lanceur sur des latitudes élevées où l'effet de l'aplatissement est importante (Vachon *et al.*, 2012). Comme le démontre la section 2.2.4, l'utilisation des harmoniques supplémentaires apporterait un gain très faible en précision.

Selon la définition de l'accélération gravitationnelle (équation (2.23)), l'accélération gravitationnelle utilisée dans ce projet vaut :

$$\mathbf{g} = -\nabla \left( \frac{\mu_e}{r} \left( 1 + J_2 \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^2 \left( \frac{1 - 3 \sin^2 \delta}{2} \right) \right) \right) \quad (2.26)$$

Le système de coordonnées local étant un système de coordonnées polaires, le gradient vaut :

$$\nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{\partial f}{r \partial \delta} \boldsymbol{\delta} + \frac{\partial f}{r \sin \delta \partial \lambda} \boldsymbol{\lambda} \quad (2.27)$$

L'accélération gravitationnelle exprimée dans le système de coordonnées local est donc :

$$\mathbf{g}_L = \begin{bmatrix} -g_r \\ 0 \\ g_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_e}{r^2} \left( 1 + 1,5 J_2 \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) \right) \\ 0 \\ \frac{\mu_e}{r^2} \left( 3 J_2 \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^2 \sin \delta \cos \delta \right) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La force gravitationnelle dans le système de coordonnées sur la trajectoire vaut :

$$\mathbf{F}_{g_T} = m \mathbf{T}_L^T \mathbf{g}_L = m \begin{bmatrix} -g_r \sin \gamma + g_\delta \cos \chi \cos \gamma \\ -g_\delta \sin \chi \\ g_r \cos \gamma + g_\delta \cos \chi \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

## 2.2.2 Force de poussée

La force de poussée est la force résultant de l'éjection des particules de gaz vers l'arrière du lanceur. Cette éjection de particules étant elle-même le résultat de la transformation en énergie cinétique de l'énergie thermique produite dans la chambre de combustion lors du passage du fluide dans la tuyère. Pour la motorisation hybride utilisée dans le projet, la force de poussée ( $F_p$ ) et la consommation instantanée du moteur

( $\Delta_m$ ) se modélisent par les deux équations suivantes :

$$\Delta_m = \frac{P_{chambre} A_{col}}{c^*} \quad (2.30)$$

$$F_p = \Delta_m I_{sp} g_0 \eta - P_{ambient} A_{col} r_e \quad (2.31)$$

où  $P_{chambre}$  est la pression dans la chambre de combustion,  $A_{col}$  est l'aire au col de la tuyère,  $c^*$  est la vitesse caractéristique des gaz produits par le moteur,  $\Delta_m$  est la masse de carburant éjecté,  $I_{sp}$  est la consommation spécifique du moteur,  $g_0$  est la gravité standard au niveau de la mer et  $\eta$  est l'efficacité de la combustion dans le moteur. La multiplication de la pression atmosphérique externe ( $P_{ambient}$ ) par l'aire à la sortie de la tuyère ( $A_e = A_{col} r_e$ ) correspond à la perte de poussée due à la présence d'air de densité non négligeable à l'extérieur de la tuyère. La ratio d'expansion de la tuyère ( $r_e$ ) est le facteur de proportionnalité entre l'aire au col et l'aire de sortie.

Les moteurs sont également équipés de tuyères orientables permettant d'orienter le flux de sortie et donc la force de poussée selon les angles  $\varphi$  et  $\vartheta$ . Ces angles sont les mêmes angles que ceux utilisés pour orienter le système de coordonnées lié à la poussée (section 2.1.4). Ainsi, la force de la poussée, exprimée dans le système de coordonnées de la trajectoire, vaut :

$$\mathbf{F}_{pT} = F_p \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

### 2.2.3 Forces aérodynamiques

Les forces aérodynamiques sont les forces résultant du déplacement du véhicule dans un fluide résistant à son déplacement, l'air. Ainsi, dans le cas d'un lanceur, ces forces ne sont présentes que dans la phase endo-atmosphérique de sa trajectoire. Lorsque l'engin passe dans la phase exo-atmosphérique, elles peuvent être négligées puisque la densité de l'air est assez faible pour qu'il n'impose pas de résistance au mouvement. Ainsi, puisque ce projet traite uniquement de phase exo-atmosphérique du lancement, les forces aérodynamiques ne seront que brièvement introduites.

Ces forces aérodynamiques sont la force axiale ( $F_A$ ), la force normale ( $F_N$ ) et la force latérale ( $F_Y$ ) dans le système de coordonnées lié au corps. Elles sont fonctions de la vitesse de déplacement, des angles aérodynamiques, des caractéristiques (viscosité, densité, vitesse du son, pression statique) du milieu dans lequel le lanceur se déplace et de la forme de l'objet. Ainsi, puisque le lanceur traverse plusieurs couches de l'atmosphère, les caractéristiques du milieu évolue avec l'altitude à laquelle celui-ci se déplace.

Un modèle de l'atmosphère, le standard US-76 (COESA, 1976), doit être utilisé pour calculer les caractéristiques du milieu et ainsi, avec la connaissance de la vitesse et des angles aérodynamiques, obtenir la valeur des coefficients aérodynamiques. Les coefficients obtenus sont le coefficient de portance ( $C_L$ ) et le coefficient de traînée ( $C_D$ ). Ces coefficients correspondent aux forces exprimées dans le système de coordonnées aérodynamique. Les coefficients normal ( $C_N$ ), axial ( $C_A$ ) et latéral ( $C_Y$ ) sont obtenus en utilisant la définition du système de coordonnées aérobalistique (section 2.1.9) :

$$C_{A'} = -C_L \sin \alpha' + C_D \cos \alpha' \quad (2.33)$$

$$C_{N'} = C_L \cos \alpha' + C_D \sin \alpha' \quad (2.34)$$

$$C_A = C_{A'} \quad (2.35)$$

$$C_N = -C_{N'} \sin \Phi' \quad (2.36)$$

$$C_Y = -C_{N'} \cos \Phi' \quad (2.37)$$

Par la suite, en utilisant les dimensions du lanceur, les coefficients sont dénormalisés pour obtenir la valeur de la force en Newton. L'expression de l'amplitude des trois forces est donc la suivante :

$$\mathbf{F}_{aeroB} = \begin{bmatrix} -F_A \\ -F_Y \\ -F_N \end{bmatrix} = qS \begin{bmatrix} C_A \\ C_Y \\ C_N \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

où  $S$  est la surface aérodynamique de référence et  $q$  est la pression dynamique. Cette pression dynamique est également fonction de la vitesse de déplacement et de la pression statique du milieu ambiant. Puisque ce projet ne considère que la trajectoire exo-atmosphérique, les forces aérodynamiques seront négligées dans la suite de l'étude.

## 2.2.4 Forces perturbatrices négligées

Les trois sections précédentes présentaient les forces agissant sur le mouvement du lanceur qui ne peuvent être négligées pour le calcul d'une trajectoire de lancement. Selon la précision désirée dans la modélisation, il est possible d'ajouter des forces supplémentaires.

Notamment, pour le calcul de l'accélération gravitationnelle, la répartition de masse de la Terre est considérée constante ce qui n'est rigoureusement pas le cas puisque cette répartition varie sous l'effet de l'attraction lunaire créant les marées, un déplacement d'eau et donc de masse. Les forces résultantes des marées sont de l'ordre de  $10^{-7}$  par

rapport à  $10^0$  pour le terme d'attraction centrale (inverse du carré de la distance). Une seconde perturbation qui pourrait être considérée provient également de l'effet de l'attraction lunaire, mais par la force qu'elle exerce directement sur le lanceur. Dans ce cas, le problème deviendrait un problème à trois (quatre si on considère également le Soleil) corps. L'ordre de grandeur de l'attraction de ces deux astres sur le lanceur est de  $10^{-6}$ . En plus des forces aérodynamiques, une autre force de frottement affecte le mouvement du lanceur. Celle-ci provient cependant de l'émission de photons par le Soleil qui sont rencontrés par le lanceur. L'ordre de grandeur de cette force de frottement est de  $10^{-8}$ . Le graphique 2.11 schématise l'importance de quelques forces supplémentaires affectant un lanceur à une altitude de 800 km.

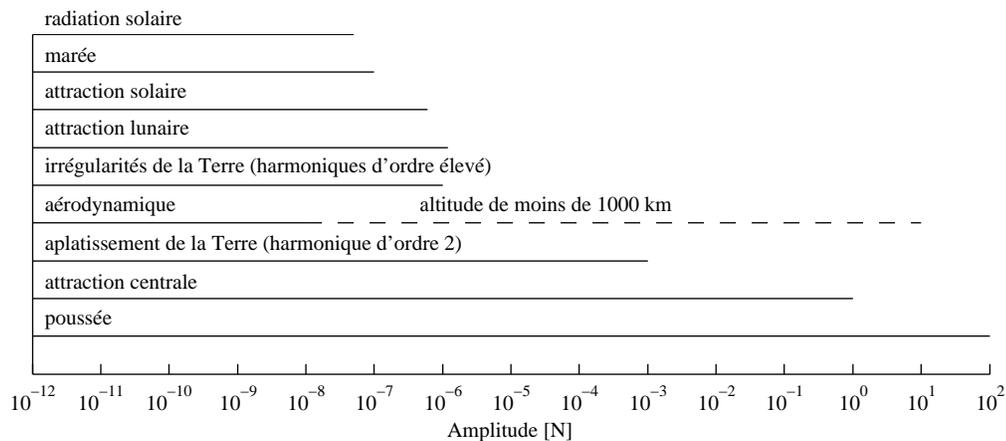


FIGURE 2.11 – Ordre de grandeur des forces agissant sur le lanceur, altitude de 800 km

## 2.3 Développement des approches de modélisation

Cette section est la section principale de la partie sur la modélisation. Elle introduit le développement des trois approches pour la modélisation de la dynamique de translation d'un lanceur. Les développements de l'approche vectorielle (section 2.3.1) et de l'approche angulaire (section 2.3.2) sont bien connus dans la littérature (Zipfel, 2007). Ils sont présentés ici car ils permettent de faire ressortir leurs faiblesses et ces présentations facilitent les comparaisons.

Par la suite, la section 2.3.3 reprend le développement du mouvement orbital utilisant un quaternion complet présenté par Andreis et Canuto (2005) et l'étend au mouvement de translation d'un lanceur. Cette approche permet de disposer d'une troisième approche. Cette nouvelle approche corrige les principaux problèmes des deux autres, à

savoir la présence de discontinuité de l'approche angulaire et la complexité d'utilisation et d'analyse de l'approche vectorielle.

Afin d'effectuer la comparaison entre les différentes approches (section 2.3.5), il est nécessaire de trouver un lien entre les valeurs non physiques des modélisations vectorielle et par quaternion avec les valeurs physiques de l'approche angulaire. La section 2.3.4 introduit les équations permettant d'obtenir ces liens.

### 2.3.1 Modélisation par l'approche vectorielle

Cette approche est classique et se retrouve dans la majorité des ouvrages traitant d'astrodynamique (Zipfel, 2007; Blakelock, 1991). Pour l'obtenir, il suffit d'appliquer la seconde loi de Newton dans le système inertiel de coordonnées J2000 :

$$\mathbf{F}_{extG} = m\mathbf{a}_G = m\dot{\mathbf{v}}_{iG} \quad (2.39)$$

où l'indice  $i$  à la vitesse  $v$  explicite que la vitesse utilisée est la vitesse inertielle. Elle inclut donc la vitesse de rotation de la Terre en plus de la vitesse, non inertielle, de déplacement du lanceur :

$$\mathbf{v}_{iG} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}_{eG} \times \mathbf{r}_G \quad (2.40)$$

où  $\boldsymbol{\omega}_e$  est le vecteur de rotation de la Terre, de norme  $\omega_e$  et orienté dans la direction de l'axe  $z_E$ .

Les forces aérodynamiques (section 2.2.3) étant négligées, les forces externes restantes sont la force gravitationnelle (équation (2.29)) et la force de poussée (équation (2.32)). Ces forces, définies dans le système de coordonnées de la trajectoire sont ramenées dans le système de coordonnées inertiel :

$$\mathbf{F}_{extG} = \mathbf{T}_T^G (\mathbf{F}_{gT} + \mathbf{T}_T) \quad (2.41)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{T}_T^G$  s'obtient via le passage par deux systèmes de coordonnées intermédiaires :

$$\mathbf{T}_T^G = \mathbf{T}_E^G \mathbf{T}_L^E \mathbf{T}_T^L \quad (2.42)$$

$$= \mathbf{T}_z(\omega_e t_s) \mathbf{T}_y(-\delta) \mathbf{T}_z(\lambda) \mathbf{T}_x(\chi) \mathbf{T}_y\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \quad (2.43)$$

L'équation (2.39) donne uniquement la variation de la vitesse du lanceur. Pour connaître entièrement l'état du lanceur en translation, il faut ajouter la variation du rayon et celle de la masse. La vitesse correspond à la dérivée de la position :

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{v}_{iG} \quad (2.44)$$

Il ne reste donc qu'à définir la variation de la masse du lanceur. Elle provient du brûlage et l'éjection de carburant par les moteurs. Ainsi, la variation de la masse est directement liée au type de propulsion utilisée et à la consommation instantanée (équation (2.30)) de celui-ci.

Le schéma complet de l'approche vectorielle (équations (2.45)) est donc composé de l'équation (2.39) pour l'évolution de la vitesse, de l'équation (2.44) pour l'évolution de la position et de la consommation de masse durant la génération de la poussée (équation (2.30)) :

$$\dot{m} = \Delta_m \quad (2.45a)$$

$$\mathbf{v}_{iG} = \frac{\mathbf{T}_L^G \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_g \end{bmatrix} + \mathbf{T}_P^L \begin{bmatrix} F_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}{m} \quad (2.45b)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{v}_{iG} \quad (2.45c)$$

Lors de l'implémentation, la matrice  $\mathbf{T}_L^G$  est nécessaire pour transférer les forces définies dans le système de coordonnées local vers le système de coordonnées J2000. Cette matrice de rotation, correspondant à la suite de rotations de l'équation (2.46), fait apparaître des variables difficiles à utiliser. Le temps sidéral est complexe à estimer et les angles sont indisponibles dans les valeurs obtenues lors de l'intégration des équations vectorielles. Bien qu'il soit possible d'obtenir ces angles par des opérations mathématiques simples (section 2.3.4.1), ces opérations supplémentaires sont coûteuses en temps de calcul (Vachon *et al.*, 2011) :

$$\mathbf{T}_L^G = \mathbf{T}_E^G \mathbf{T}_E^L = \mathbf{T}_z(t_s \omega_e) \mathbf{T}_z(-\lambda) \mathbf{T}_y(\delta) \quad (2.46)$$

De plus, les vecteurs vitesse et rayon sont exprimés dans un système de coordonnées inertiel. C'est donc dire qu'ils donnent une description par rapport à un objet fixe, la Terre, bien que celui-ci soit en rotation constante. Dans le cas d'un lanceur, ces vecteurs inertiels n'ont donc pas de signification physique directe et peuvent être difficiles à interpréter. Afin de les analyser, il faut prendre en compte cette rotation et l'heure sidérale actuelle ( $t_s$ ) afin d'obtenir des vecteurs relatifs ayant une signification physique utilisable.

### 2.3.2 Modélisation par l'approche angulaire

Selon Blakelock (1991), les équations de translation écrites dans le système de coordonnées de la trajectoire permettent d'augmenter l'efficacité des simulations en diminuant le temps de calcul. Le développement de l'approche angulaire est donc effectué dans le système de coordonnées de la trajectoire. Tout comme l'approche vectorielle, l'approche angulaire est bien documentée. Le développement présenté dans cette section est inspiré des développements de Tewari (2007) et de Zipfel (2007).

Dans un premier temps, pour obtenir la dynamique du système de coordonnées local par rapport à la Terre en rotation, il convient de diviser la vitesse du lanceur en deux composantes, une composante radiale et une seconde tangentielle :

$$\mathbf{v}_L = \dot{r}\mathbf{i}_{LL} + \boldsymbol{\omega}_L \times (r\mathbf{i}_L) \quad (2.47)$$

où  $\boldsymbol{\omega}_L = w_x\mathbf{i}_{LL} + w_y\mathbf{j}_{LL} + w_z\mathbf{k}_{LL}$  est la vitesse angulaire de rotation du système de coordonnées local ( $L$ ) par rapport au système de coordonnées terrestre ( $E$ ). Avec cette définition et en résolvant le produit vectoriel l'équation (2.47) devient :

$$\mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ rw_z \\ -rw_y \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

De par la définition du système de coordonnées sur la trajectoire, la vitesse du lanceur s'exprime également comme :

$$\mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} v \sin \gamma \\ v \cos \gamma \sin \chi \\ v \cos \gamma \cos \chi \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

La comparaison des deux équations donne :

$$\dot{r} = v \sin \gamma \quad (2.50)$$

$$w_z = \frac{v}{r} \cos \gamma \sin \chi \quad (2.51)$$

$$w_y = -\frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \quad (2.52)$$

La vitesse angulaire de rotation du système de coordonnées local par rapport au système de coordonnées terrestre ( $\boldsymbol{\omega}_L$ ) peut s'écrire comme la la sommation des vitesses angulaires de la longitude et de la latitude. L'orientation de la vitesse angulaire correspond est parallèle à l'axe autour duquel la rotation est effectuée. Comme mentionné à la section 2.1.3, la rotation de la longitude s'effectue autour de l'axe de rotation de

la Terre et celle de la latitude s'effectue autour de l'axe  $y_L$ . Ainsi, la vitesse angulaire correspondante est :

$$\mathbf{w}_L = \dot{\lambda} \frac{\boldsymbol{\omega}_{eL}}{\omega_e} - \dot{\delta} \mathbf{J}_{LL} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \sin \delta \\ -\dot{\delta} \\ \dot{\lambda} \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

où  $\frac{\boldsymbol{\omega}_{eL}}{\omega_e}$  est un vecteur unitaire dans la direction du vecteur de rotation de la Terre. Ce qui permet de réécrire les équations (2.51) et (2.52) pour exprimer les variations de la longitude et de la latitude :

$$\dot{\lambda} = \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos \delta} \quad (2.54)$$

$$\dot{\delta} = \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r} \quad (2.55)$$

Les équations (2.50), (2.54) et (2.55) correspondent aux équations modélisant la cinématique d'un système de coordonnées local en mouvement autour d'un point central en rotation. Ces équations nécessitent la connaissance de la vitesse relative qui s'obtient en développant la dynamique de translation d'un objet. Le développement des équations de la dynamique débute par l'expression de la vitesse inertielle (équation (2.40)) dans le système de coordonnées local :

$$\mathbf{v}_{iL} = \mathbf{v}_L + \boldsymbol{\omega}_{eL} \times \mathbf{r}_L \quad (2.56)$$

Le produit vectoriel modélise la vitesse supplémentaire introduite par la rotation de la Terre. Une fois développé, ce terme devient l'expression des forces fictives. L'équation suivante explicite le produit vectoriel dans l'expression de la vitesse inertielle en utilisant la définition de la vitesse de rotation de la Terre :

$$\mathbf{v}_{iL} = \mathbf{v}_L + \omega_e r \cos \delta \mathbf{J}_{LL} \quad (2.57)$$

L'accélération inertielle correspond à la dérivée temporelle de cette équation :

$$\mathbf{a}_{iL} = \frac{\partial \mathbf{v}_{iL}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}_L + \omega_e (\dot{r} - r \dot{\delta} \sin \delta) \mathbf{J}_{LL} + \omega_e r \cos \delta \frac{\partial \mathbf{J}_{LL}}{\partial t} \quad (2.58)$$

Le terme  $\dot{\mathbf{v}}_L$  s'obtient en dérivant l'équation (2.48) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_L = & \dot{r} \mathbf{v}_{LL} + \dot{r} (w_z \mathbf{J}_{LL} - w_y \mathbf{k}_{LL}) + r (\dot{w}_z \mathbf{J}_{LL} - \dot{w}_y \mathbf{k}_{LL}) \\ & + \dot{r} \frac{\partial \mathbf{v}_{LL}}{\partial t} + r w_z \frac{\partial \mathbf{J}_{LL}}{\partial t} - r w_y \frac{\partial \mathbf{k}_{LL}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Les dérivées précédentes (équations (2.58) et (2.59)) font apparaitre la dérivée tem-

portelle des vecteurs unitaire  $\mathbf{i}_L$ ,  $\mathbf{j}_L$  et  $\mathbf{k}_L$  qui valent :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_{LL}}{\partial t} = \mathbf{w}_{iL} \times \mathbf{i}_{LL} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{LL}}{\partial t} = \mathbf{w}_{iL} \times \mathbf{j}_{LL} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{LL}}{\partial t} = \mathbf{w}_{iL} \times \mathbf{k}_{LL} \quad (2.62)$$

où  $\mathbf{w}_{iL}$  est la vitesse angulaire inertielle du système de coordonnées local :

$$\mathbf{w}_{iL} = \mathbf{w}_L + \boldsymbol{\omega}_{eL} = \begin{bmatrix} (\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \delta \\ -\dot{\delta} \\ (\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Les valeurs de la dérivée temporelle des vecteurs unitaires sont donc :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_{LL}}{\partial t} = (\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \delta \mathbf{j}_{LL} + \dot{\delta} \mathbf{k}_{LL} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{LL}}{\partial t} = -(\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \delta \mathbf{i}_{LL} + (\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \delta \mathbf{k}_{LL} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{LL}}{\partial t} = -\dot{\delta} \mathbf{i}_{LL} - (\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \delta \mathbf{j}_{LL} \quad (2.66)$$

En incluant les résultats des équations (2.53) et (2.64) à (2.66), l'équation (2.59) devient :

$$\dot{\mathbf{v}}_L = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\lambda} \cos^2 \delta (\dot{\lambda} + \omega_e) + r\dot{\delta}^2 \\ r\dot{\lambda} \cos \delta + r(\ddot{\lambda} \cos \delta - \dot{\lambda}\dot{\delta} \sin \delta) + \dot{r}(\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \delta - r\dot{\delta}(\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \delta \\ \dot{r}\dot{\delta} + r\ddot{\delta} + \dot{r}\dot{\delta} + r\dot{\lambda} \cos \delta (\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \delta \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Également, en ramenant la dérivée du vecteur unitaire  $\mathbf{j}_{LL}$  (équation (2.65)) dans le dernier terme de l'équation (2.58), celui-ci s'écrit :

$$\omega_e r \cos \delta \frac{\partial \mathbf{j}_{LL}}{\partial t} = \omega_e r \cos \delta \begin{bmatrix} -(\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \delta \\ 0 \\ (\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \delta \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

L'expression complète de l'accélération inertielle du lanceur, exprimée dans le système de coordonnées local, s'obtient ainsi en introduisant les (2.67) et (2.68) dans l'équation (2.58) :

$$\mathbf{a}_{iL} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\delta}^2 - r(\dot{\lambda} + \omega_e)^2 \cos^2 \delta \\ r\ddot{\lambda} \cos \delta - 2r\dot{\delta} \sin \delta (\dot{\lambda} + \omega_e) + 2\dot{r} \cos \delta (\dot{\lambda} + \omega_e) \\ 2\dot{r}\dot{\delta} + r\ddot{\delta} + r \cos \delta \sin \delta (\dot{\lambda} + \omega_e)^2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Cette expression peut encore être simplifiée en utilisant les équations de la cinématique du système de coordonnées local (équations (2.50), (2.55) et (2.54)). Ceci permet d'exprimer l'équation (2.69) en fonction uniquement de la position et des vitesses. En explicitant les projections de l'accélération inertielle sur les différents axes du système de coordonnées local ( $a_{x_L}$ ,  $a_{y_L}$  et  $a_{z_L}$ ) cette expression devient :

$$a_{x_L} = \dot{v} \sin \gamma + v \dot{\gamma} \cos \gamma - \frac{v^2}{r} \cos^2 \gamma - 2\omega_e v \cos \gamma \sin \chi \cos \delta - \omega_e^2 r \cos^2 \delta \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} a_{y_L} = & \dot{v} \cos \gamma \sin \chi - v(\dot{\gamma} \sin \gamma \sin \chi - \dot{\chi} \cos \gamma \cos \chi) \\ & + 2v\omega_e(\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \\ & + \frac{v^2}{r} \sin \chi \cos \gamma(\sin \gamma - \cos \gamma \cos \chi \tan \delta) \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} a_{z_L} = & \dot{v} \cos \gamma \cos \chi - v(\dot{\gamma} \sin \gamma \cos \chi + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \chi) + \omega_e^2 r \cos \delta \sin \delta \\ & + 2v\omega_e \cos \gamma \sin \chi \sin \delta + \frac{v^2}{r} \cos \gamma(\sin \gamma \cos \chi - \cos \gamma \sin^2 \chi \tan \delta) \end{aligned} \quad (2.72)$$

L'accélération inertielle étant un vecteur, il est possible, en la multipliant par la matrice de rotation  $\mathbf{T}_L^T$ , de l'écrire dans le système de coordonnées de la trajectoire :

$$a_{x_T} = \dot{v} + \omega_e^2 r \cos \delta(\sin \delta \cos \chi \cos \gamma - \cos \delta \sin \gamma) \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} a_{y_T} = & v \dot{\chi} \cos \gamma + 2v\omega_e(\sin \gamma \cos \delta \cos \chi - \cos \gamma \sin \delta) \\ & - \frac{v^2}{r} \sin \chi \cos \gamma \tan \delta - \omega_e^2 r \cos \delta \sin \delta \sin \chi \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} a_{z_T} = & -v \dot{\gamma} + \frac{v^2}{r} \cos \gamma + 2v\omega_e \cos \delta \sin \chi \\ & + \omega_e^2 r \cos \delta(\cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \chi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.75)$$

À ce point, il est possible de lier l'accélération aux forces externes écrites dans le système de coordonnées de la trajectoire. L'accélération utilisée inclut la rotation de la Terre, il n'est donc pas nécessaire d'ajouter les forces fictives à la seconde loi de Newton et ce, même si le système de coordonnées utilisé n'est pas inertiel. Comme mentionné à la section 2.3.1, les forces externes sont la force gravitationnelle (équation (2.29)) et la force de poussée (équation (2.32)). Puisque la trajectoire étudiée est entièrement exo-atmosphérique, les forces aérodynamiques (section 2.2.3) sont négligées :

$$\frac{F_p \cos \vartheta \cos \varphi}{m} - g_r \sin \gamma + g_\delta \cos \chi \cos \gamma = \dot{v} + \omega_e^2 r \cos \delta(\sin \delta \cos \chi \cos \gamma - \cos \delta \sin \gamma) \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_p \cos \vartheta \sin \varphi}{m} - g_\delta \sin \chi &= v \dot{\chi} \cos \gamma - \frac{v^2}{r} \sin \chi \cos \gamma \tan \delta \\ &+ 2v\omega_e (\sin \gamma \cos \delta \cos \chi - \cos \gamma \sin \delta) \\ &- \omega_e^2 r \cos \delta \sin \delta \sin \chi \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_p \sin \vartheta}{m} + g_r \cos \gamma + g_\delta \cos \chi \sin \gamma &= -v \dot{\gamma} + \frac{v^2}{r} \cos \gamma + 2v\omega_e \cos \delta \sin \chi \\ &+ \omega_e^2 r \cos \delta (\cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \chi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Des trois dernières équations, on peut isoler les termes des dérivés  $\dot{v}$ ,  $\dot{\chi}$  et  $\dot{\gamma}$  :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{F_p \cos \vartheta \cos \varphi}{m} - g_r \sin \gamma + g_\delta \cos \chi \cos \gamma \\ &- \omega_e^2 r \cos \delta (\sin \delta \cos \chi \cos \gamma - \cos \delta \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{F_p \cos \vartheta \sin \varphi}{mv \cos \gamma} - \frac{g_\delta \sin \chi}{v \cos \gamma} - \frac{2\omega_e}{\cos \gamma} (\sin \gamma \cos \delta \cos \chi - \cos \gamma \sin \delta) \\ &+ \frac{v}{r} \sin \chi \cos \gamma \tan \delta + \frac{\omega_e^2}{v \cos \gamma} r \cos \delta \sin \delta \sin \chi \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{-F_p \sin \vartheta}{mv} - \frac{g_r}{v} \cos \gamma - \frac{g_\delta}{v} \cos \chi \sin \gamma + \frac{v}{r} \cos \gamma \\ &+ 2\omega_e \sin \chi \cos \delta + \frac{\omega_e^2 r \cos \delta}{v} (\cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \chi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.81)$$

La combinaison des équations de la cinématique d'un système de coordonnées local en mouvement autour d'un point central en rotation (équations (2.50), (2.54) et (2.55)) aux équations, écrites dans le système local, de la dynamique d'un objet (équations (2.79) à (2.81)) et à l'équation de la consommation de masse (équation (2.30)) permet d'obtenir les équations suivantes qui décrivent entièrement la dynamique de translation d'un lanceur autour de la Terre en rotation :

$$\dot{m} = \Delta_m \quad (2.82a)$$

$$\dot{r} = v \sin(\gamma) \quad (2.82b)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{F_p \cos \vartheta \cos \varphi}{m} - g_r \sin \gamma + g_\delta \cos \chi \cos \gamma \\ &- \omega_e^2 r \cos \delta (\sin \delta \cos \chi \cos \gamma - \cos \delta \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.82c)$$

$$\dot{\delta} = \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r} \quad (2.82d)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos \delta} \quad (2.82e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{F_p \cos \vartheta \sin \varphi}{mv \cos \gamma} - \frac{g_\delta \sin \chi}{v \cos \gamma} - \frac{2\omega_e}{\cos \gamma} (\sin \gamma \cos \delta \cos \chi - \cos \gamma \sin \delta) \\ & + \frac{v}{r} \sin \chi \cos \gamma \tan \delta + \frac{\omega_e^2}{v \cos \gamma} r \cos \delta \sin \delta \sin \chi \end{aligned} \quad (2.82f)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & \frac{-F_p \sin \vartheta}{mv} - \frac{g_r}{v} \cos \gamma - \frac{g_\delta}{v} \cos \chi \sin \gamma + \frac{v}{r} \cos \gamma \\ & + 2\omega_e \sin \chi \cos \delta + \frac{\omega_e^2 r \cos \delta}{v} (\cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \chi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.82g)$$

Le développement précédent est tel que l'état de l'approche angulaire est composé d'angles et des dimensions qui ont tous une signification physique. Cette approche est donc plus complexe à obtenir que l'approche vectorielle (section 2.3.1), mais est plus facilement utilisable dans l'analyse de la trajectoire obtenue. Cette simplicité d'analyse se répercute également sur l'implémentation qui consiste uniquement à retranscrire les équations (2.82), toutes les valeurs utilisées dans celles-ci étant directement disponibles lors de l'intégration.

Cette approche est cependant loin d'être idéale. Lors de son utilisation, trois discontinuités risquent de survenir : lorsque la vitesse de déplacement du lanceur est nulle ( $v = 0$ ) ; lorsque le déplacement s'effectue perpendiculairement à l'horizon local ( $\cos(\gamma = 90^\circ) = 0$ ) ; et lorsque le lanceur passe au-dessus d'un des pôles de la Terre ( $\cos(\delta = \pm 90^\circ) = 0$ ). Les deux premières se produisent uniquement au début du lancement, durant la phase endo-atmosphérique, et ne sont donc pas problématiques pour l'utilisation de cette approche dans une loi de guidage exo-atmosphérique. Cependant, la troisième discontinuité est nuisible pour certains types de lancement qui doivent circuler près des pôles terrestres lors de leur phase guidée.

### 2.3.3 Modélisation par quaternion complet

Cette section présente le développement des équations de la dynamique de translation d'un lanceur basée sur l'utilisation d'un quaternion complet. Cette approche est étudiée afin de contourner les principaux problèmes des deux modélisations précédentes. Le développement est effectué dans le système de coordonnées de la trajectoire, il est ainsi plus rapide que l'approche vectorielle développée dans le système de coordonnées J2000 (Blakelock, 1991). De plus, le quaternion, un nombre hyper-complexe permettant de représenter une rotation dans un espace quatre dimensions (Hamilton, 1866), permet d'éliminer la discontinuité provenant du passage au-dessus de pôles.

Le développement présenté dans la suite est inspiré de celui de Andreis et Canuto (2005) et débute directement par l'introduction du quaternion complet et son application. Les ouvrages de Chou (1992) et de Hamilton (1866) constituent une bonne introduction au quaternion unitaire donc les principaux éléments sont repris dans l'annexe A. Afin d'alléger l'écriture, le symbole  $\{\}$  pour noter un quaternion n'est pas utilisé. Cette omission provient du fait que l'on peut représenter un scalaire et un vecteur par un quaternion. Toutes les variables utilisées dans la modélisation sont donc des quaternions.

Le quaternion complet est un quaternion de norme non unitaire. L'utilisation de cette norme ajoute un quatrième degré au quaternion unitaire permettant de représenter le redimensionnement en plus de la rotation. Ce type de quaternion correspond ainsi à la multiplication d'un quaternion unitaire par un scalaire :

$$R_Q = |R_Q| \underline{R_Q} \quad (2.83)$$

La première étape du développement consiste à définir un quaternion unitaire représentant la rotation du système de coordonnées terrestre vers le second système de coordonnées sur la trajectoire. Ce quaternion ( $\underline{R_Q}$ ) est l'équivalent de la matrice de rotation  $\mathbf{T}_E^Q$ . Ainsi, en utilisant la définition de la rotation d'un vecteur par un quaternion, l'opération de rotation d'un vecteur est :

$$\mathbf{v}_{QQ} = \underline{R_Q} \otimes \mathbf{v}_{QE} \otimes \underline{R_Q}^* \quad (2.84)$$

Le second système de coordonnées sur la trajectoire est défini comme ayant son axe  $x_Q$  parallèle au vecteur de vitesse de déplacement du lanceur (section 2.1.5) :

$$\mathbf{v}_Q = v \mathbf{v}_{QQ} \quad (2.85)$$

Le vecteur unitaire sur l'axe  $x_Q$  peut être représenté par l'équation (2.84) qui, une fois introduite dans l'équation (2.85), permet de définir un quaternion complet  $R_Q$  qui effectue le redimensionnement et la rotation du système de coordonnées terrestre vers le second système de coordonnées sur la trajectoire (équation (2.88)) :

$$\mathbf{v}_Q = v \left( \underline{R_Q} \otimes \mathbf{v}_{QE} \otimes \underline{R_Q}^* \right) \quad (2.86)$$

$$= R_Q \otimes \mathbf{v}_{QE} \otimes R_Q^* \quad (2.87)$$

$$R_Q = \sqrt{v} \underline{R_Q} \quad (2.88)$$

Cependant, il existe plusieurs quaternions permettant de représenter cette rotation. Il est donc nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire pour rendre la rotation et

le quaternion  $R_Q$  uniques. L'équation suivante effectue la rotation simple du vecteur  $\mathbf{J}_Q$  :

$$\mathbf{J}_{Q_Q} = \underline{R_Q} \otimes \mathbf{J}_{Q_E} \otimes \underline{R_Q}^* \quad (2.89)$$

La dérivée temporelle des équations, (2.87) et (2.89) permet d'obtenir la variation de la vitesse et la variation temporelle de l'orientation du second système de coordonnées de la trajectoire :

$$\dot{\mathbf{v}}_Q = \dot{R}_Q \otimes \mathbf{v}_{Q_E} \otimes R_Q^* + R_Q \otimes \mathbf{v}_{Q_E} \otimes \dot{R}_Q^* + R_Q \otimes \dot{\mathbf{v}}_{Q_E} \otimes R_Q^* \quad (2.90)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{Q_Q} = \dot{R}_Q \otimes \mathbf{J}_{Q_E} \otimes \underline{R_Q}^* + \underline{R_Q} \otimes \mathbf{J}_{Q_E} \otimes \dot{R}_Q^* + \underline{R_Q} \otimes \dot{\mathbf{J}}_{Q_E} \otimes \underline{R_Q}^* \quad (2.91)$$

La rotation du second système de coordonnées terrestre vers le système de coordonnées sur la trajectoire étant définie comme  $\mathbf{J}_{Q_E} = \underline{R_Q}^* \otimes \mathbf{J}_{Q_Q} \otimes \underline{R_Q}$ , les équations (2.90) et (2.91) peuvent être simplifiées pour faire disparaître la dépendance vis-à-vis des vecteurs écrits dans le système de coordonnées terrestre :

$$\dot{\mathbf{v}}_Q = \dot{R}_Q \otimes R_Q^{-1} \otimes \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_Q \otimes (R_Q^*)^{-1} \otimes \dot{R}_Q^* + R_Q \otimes \dot{\mathbf{v}}_{Q_E} \otimes R_Q^* \quad (2.92)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{Q_Q} = \dot{R}_Q \otimes \underline{R_Q}^* \otimes \mathbf{J}_{Q_Q} + \mathbf{J}_{Q_Q} \otimes \underline{R_Q} \otimes \dot{R}_Q^* + \underline{R_Q} \otimes \dot{\mathbf{J}}_{Q_E} \otimes \underline{R_Q}^* \quad (2.93)$$

La définition du système de coordonnées (section 2.1.5) permet d'obtenir la valeur de deux vecteurs unitaires exprimés dans le système de coordonnées terrestre :

$$\mathbf{v}_{Q_E} = \frac{\mathbf{v}_E}{|\mathbf{v}_E|} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{J}_{Q_E} = \frac{\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E}{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} \quad (2.95)$$

La dérivée temporelle du vecteur unitaire  $\mathbf{v}_Q$  est donc :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{Q_E} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v}_E}{|\mathbf{v}_E|} \right) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{v}}_E |\mathbf{v}_E| - \mathbf{v}_E \frac{\partial}{\partial t} (|\mathbf{v}_E|)}{|\mathbf{v}_E|^2} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{v}}_E}{|\mathbf{v}_E|} - \frac{\mathbf{v}_E}{|\mathbf{v}_E|} \frac{\frac{\partial}{\partial t} (|\mathbf{v}_E|)}{|\mathbf{v}_E|} \\ &= \frac{\mathbf{F}_E}{m |\mathbf{v}_E|} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} (|\mathbf{v}_E|)}{|\mathbf{v}_E|} \mathbf{v}_{Q_E} \end{aligned} \quad (2.96)$$

et, suivant le même processus, celle du vecteur unitaire  $\mathbf{J}_Q$  est :

$$\dot{\mathbf{J}}_{Q_E} = \frac{\mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_E}{m |\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} (|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|)}{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} \mathbf{J}_{Q_E} \quad (2.97)$$

Il faut maintenant définir la dynamique du quaternion  $R_Q$ . Chou (1992) a développé cette dynamique pour un quaternion unitaire et, selon Andreis et Canuto (2004), cette définition est également valide pour un quaternion complet :

$$\dot{R}_Q = W \otimes R_Q \quad (2.98)$$

$$\underline{\dot{R}}_Q = \underline{W} \otimes \underline{R}_Q \quad (2.99)$$

où  $W$  est le quaternion de la vitesse angulaire du second système de coordonnées sur la trajectoire.

En introduisant les quatre derniers résultats, les dérivées temporelles (équations (2.96) et (2.97)) et la dynamique du quaternion (équations (2.98) et (2.99)) dans l'équation (2.92) d'évolution de la vitesse et l'équation (2.93) d'évolution de l'orientation, ces deux dernière deviennent :

$$\dot{\mathbf{v}}_Q = W_Q \otimes \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_Q \otimes W_Q^* + |\mathbf{v}_E| \left( \frac{\mathbf{F}_Q}{m |\mathbf{v}_E|} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\mathbf{v}_E|}{|\mathbf{v}_E|} \mathbf{i}_{Q_Q} \right) \right) \quad (2.100)$$

$$\dot{\mathbf{j}}_{Q_Q} = \underline{W}_Q \otimes \mathbf{j}_{Q_Q} + \mathbf{j}_{Q_Q} \otimes \underline{W}_Q^* + \frac{\mathbf{r}_Q \times \mathbf{F}_Q}{m |\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|}{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} \mathbf{j}_{Q_Q} \right) \quad (2.101)$$

Le passage à une expression matricielle permet d'expliciter les relations entre le quaternion  $W$  et les forces externes. Ce passage s'effectue à l'aide des matrices  $\mathbf{W}_Q^-$ ,  $\mathbf{W}_Q^+$ ,  $\underline{\mathbf{W}}_Q^-$ ,  $\underline{\mathbf{W}}_Q^+$  de l'annexe A. Ces matrices sont introduites dans les équations (2.100) et (2.101) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}}_Q \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_Q \end{bmatrix} - |\dot{\mathbf{v}}| \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{i}_{Q_Q} \end{bmatrix} + \left( \mathbf{W}_Q^+ + [\mathbf{W}_Q^-]^T \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_Q \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{j}}_{Q_Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{m |\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}_Q \times \mathbf{F}_Q \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|}{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{v}_E|} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{j}_{Q_Q} \end{bmatrix} + \left( \underline{\mathbf{W}}_Q^+ + [\underline{\mathbf{W}}_Q^-]^T \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{j}_{Q_Q} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

De par la définition du second système de coordonnées, les vecteurs  $\mathbf{v}_Q$  et  $\mathbf{r}_Q$  et leur dérivée sont nuls sur certains axes. En effet, à la section 2.1.5, l'axe  $x_Q$  a été défini comme étant parallèle au vecteur vitesse. Ce dernier et sa dérivée seront donc définis seulement sur cet axe :

$$\mathbf{v}_Q = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.104)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_Q = \begin{bmatrix} \dot{v} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.105)$$

Pour le rayon, en utilisant la matrice de rotation  $\mathbf{T}_E^Q$ , il est possible de remarquer que le rayon et sa dérivée sont définis seulement sur les axes  $x_Q$  et  $z_Q$  :

$$\mathbf{r}_Q = \begin{bmatrix} r_{Q_x} & 0 & r_{Q_z} \end{bmatrix}^T \quad (2.106)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_Q = \begin{bmatrix} r_{\dot{Q}_x} & 0 & r_{\dot{Q}_z} \end{bmatrix}^T \quad (2.107)$$

Ce qui permet de simplifier les équations (2.102) et (2.103) et de les réécrire sous la forme éclatée des équations (2.108) et (2.109) :

$$\dot{v} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{Q_x} \\ F_{Q_y} \\ F_{Q_z} \end{bmatrix} + 2v \begin{bmatrix} 0 \\ w_0 \\ w_3 \\ -w_2 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{mr_{Q_z}V} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_{Q_z}F_{Q_y} \\ r_{Q_z}F_{Q_x} - r_{Q_x}F_{Q_z} \\ r_{Q_x}F_{Q_y} \end{bmatrix} - \frac{r_{\dot{Q}_z}v - r_{Q_z}\dot{v}}{r_{Q_z}v} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -w_3 \\ 0 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Selon Andreis et Canuto (2004), la dérivée de la vitesse est lié au terme  $w_0$  par la relation suivante :

$$\dot{v} = 2vw_0 \quad (2.110)$$

Avec cette relation, il devient possible d'extraire, des équations (2.108) et (2.109), une relation directe entre les forces externes, exprimée dans le second système de coordonnées sur la trajectoire, et les valeurs du quaternion  $W$ . Cette relation est présentée ici sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2mv} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-r_{Q_x}}{2r_{Q_z}mv} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2mv} \\ 0 & -\frac{1}{2mv} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F}_Q \quad (2.111)$$

Pour sa part, la cinématique du point de masse est la dérivée de la position :

$$\dot{\mathbf{r}}_Q = \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{R}_Q \otimes \mathbf{r}_E \otimes \underline{R}_Q^* \right) \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} &= \underline{\dot{R}}_Q \otimes \mathbf{r}_E \otimes \underline{R}_Q^* + \underline{R}_Q \otimes \mathbf{r}_E \otimes \underline{\dot{R}}_Q^* + \underline{R}_Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_E \otimes \underline{R}_Q^* \\ &= \underline{W}_Q \otimes \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}_Q \otimes \underline{W}_Q^* + \mathbf{v}_Q \end{aligned} \quad (2.113)$$

La définition de  $\mathbf{v}_Q$ , de  $\mathbf{r}_Q$  et la forme matricielle de la multiplication de quaternion permettent de réécrire l'équation précédente sous une forme faisant apparaître les deux équations de variation du rayon :

$$r_{\dot{Q}_x} = 2w_2 r_{Q_z} + v \quad (2.114)$$

$$r_{\dot{Q}_z} = -2w_2 r_{Q_x} \quad (2.115)$$

La dynamique complète du lanceur résolue à l'aide d'un quaternion complet est obtenue en regroupant l'équation (2.98), combinée à l'équation (2.111), les équations (2.114) et (2.115) et l'équation (2.30) de consommation de masse :

$$\dot{m} = \Delta_{m_{ke}} \quad (2.116a)$$

$$\dot{r}_0 = \frac{F_{Q_x}}{2mv} r_0 + \frac{r_{Q_x} F_{Q_y}}{2r_{Q_z} mv} r_1 - \frac{F_{Q_z}}{2mv} r_2 + \frac{F_{Q_y}}{2mv} r_3 \quad (2.116b)$$

$$\dot{r}_1 = \frac{-r_{Q_x} F_{Q_y}}{2r_{Q_z} mv} r_0 + \frac{F_{Q_x}}{2mv} r_1 + \frac{F_{Q_y}}{2mv} r_2 + \frac{F_{Q_z}}{2mv} r_3 \quad (2.116c)$$

$$\dot{r}_2 = \frac{F_{Q_z}}{2mv} r_0 - \frac{F_{Q_y}}{2mv} r_1 + \frac{F_{Q_x}}{2mv} r_2 + \frac{r_{Q_x} F_{Q_y}}{2r_{Q_z} mv} r_3 \quad (2.116d)$$

$$\dot{r}_3 = \frac{-F_{Q_y}}{2mv} r_0 - \frac{F_{Q_z}}{2mv} r_1 - \frac{r_{Q_x} F_{Q_y}}{2r_{Q_z} mv} r_2 + \frac{F_{Q_x}}{2mv} r_3 \quad (2.116e)$$

$$r_{\dot{Q}_x} = \frac{r_{Q_z} F_{Q_z}}{mv} + v \quad (2.116f)$$

$$r_{\dot{Q}_z} = -\frac{r_{Q_x} F_{Q_z}}{mv} \quad (2.116g)$$

Les forces utilisées dans ces équations sont définies dans le second système de coordonnées sur la trajectoire. Ces forces sont les forces externes, à savoir la force de poussée (équation (2.32)) et la force gravitationnelle (équation (2.29)), et les forces fictives telles qu'expliquées à l'annexe B. En effet, à la différence du développement angulaire (section 2.3.2), l'utilisation du quaternion n'explique pas les forces fictives et, comme le mouvement se fait par rapport à un repère en rotation, elles doivent être ajoutées dans la sommation des forces :

$$\mathbf{F}_Q = \mathbf{T}_T^Q \mathbf{F}_{p_T} + \mathbf{T}_T^Q \mathbf{F}_{g_T} - m (2\boldsymbol{\omega}_{eQ} \times \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_{eQ} \times (\boldsymbol{\omega}_{eQ} \times \mathbf{r}_Q)) \quad (2.117)$$

où le quaternion unitaire  $R_Q$  permettra d'effectuer la rotation du vecteur de rotation de la Terre  $\boldsymbol{\omega}_e$  du système de coordonnées terrestre dans lequel il est défini vers le second système de coordonnées sur la trajectoire :

$$\boldsymbol{\omega}_{eQ} = \underline{R_Q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{eE} \otimes \underline{R_Q}^* \quad (2.118)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{T}_T^Q$  correspond à une rotation de  $180^\circ$  autour de l'axe  $x_T$  :

$$\mathbf{T}_T^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

En analysant les équations (2.116), il est possible de constater que la discontinuité au-dessus de pôles, provenant de l'angle  $\delta = \pm 90^\circ$ , est éliminée. Cependant, les discontinuités de la vitesse nulle ( $v = 0$ ) et du déplacement vertical ( $\gamma = \pm 90^\circ$ ) qui, comme mentionné à la section 2.3.2, ne sont nuisibles qu'au début du lancement lorsque la loi de guidage n'est pas active, demeurent présentes. Dans cette approche, la discontinuité provenant du déplacement vertical correspond à une composante horizontale du rayon nulle ( $r_{Q_z} = 0$ ).

Cependant, tout comme pour l'approche vectorielle, l'approche par quaternion complet nécessite l'utilisation de variables n'ayant pas de significations physiques directes pouvant être difficiles à interpréter et à utiliser. Également, des variables nécessaires à l'implémentation ne sont pas directement disponibles dans l'état de l'approche et nécessitent des opérations supplémentaires afin de les obtenir. Ces opérations supplémentaires (section 2.3.4.2) allongent le temps de calcul de l'approche (Vachon *et al.*, 2011).

### 2.3.4 Passage de l'approche angulaire vers les autres approches

Dans les trois sections précédentes, trois modélisations de la dynamique de translation d'un lanceur sont développées. Chacune des modélisations utilise un objet mathématique différent pour y parvenir rendant ainsi les comparaisons directes difficiles. De plus, l'approche vectorielle (section 2.3.1) et l'approche par quaternion (section 2.3.3) nécessitent l'utilisation de variables de l'approche angulaire (section 2.3.2). L'approche angulaire est la seule des trois dont toutes les variables ont une signification physique directe. Ainsi, autant pour l'utilisation des deux autres approches que pour la comparaison, un lien mathématique entre l'approche angulaire et les deux autres approches est nécessaire. La section 2.3.4.1 présente celui nécessaire à l'approche vectorielle alors que la section 2.3.4.2 introduit les relations entre les variables de l'approche avec quaternion et celles de l'approche angulaire.

### 2.3.4.1 Lien avec l'approche vectorielle

Le lien entre l'approche angulaire et l'approche vectorielle est entièrement basé sur les matrices de la rotation entre les systèmes de coordonnées local, terrestre et inertiel (section 2.1.10).

#### Passage de l'approche angulaire vers l'approche vectorielle

La première étape consiste à définir les vecteurs de la vitesse inertielle ( $\mathbf{v}_i$ ) et du rayon ( $\mathbf{r}$ ) à l'aide des angles utilisés dans l'approche polaire. Pour y parvenir, la définition des systèmes de coordonnées local (section 2.1.3) et terrestre (section 2.1.2) peut être utile :

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} r \cos \delta \cos \lambda \\ r \cos \delta \sin \lambda \\ r \sin \delta \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} v \sin \gamma \\ v \cos \gamma \sin \chi \\ v \cos \gamma \cos \chi \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

À l'aide des matrices de rotation  $\mathbf{T}_L^E$  et  $\mathbf{T}_E^G$  :

$$\mathbf{T}_L^E = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & -\sin \lambda & -\sin \delta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$\mathbf{T}_E^G = \begin{bmatrix} \cos \omega_e t_s & -\sin \omega_e t_s & 0 \\ \sin \omega_e t_s & \cos \omega_e t_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

ces deux vecteurs sont exprimés dans le système de coordonnées J2000 :

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{T}_E^G \mathbf{r}_E \quad (2.124)$$

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{T}_E^G \mathbf{T}_L^E \mathbf{v}_L \quad (2.125)$$

Cependant, comme mentionné à la suite de l'équation (2.40), la vitesse utilisée dans l'approche vectorielle est la vitesse inertielle. La vitesse provenant de rotation de la Terre doit être additionnée à la vitesse relative de l'équation (2.121). La vitesse inertielle utilisée dans l'approche vectorielle est donc :

$$\mathbf{v}_{iG} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}_{eG} \times \mathbf{r}_G \quad (2.126)$$

$$\mathbf{v}_{iG} = \mathbf{T}_E^G (\mathbf{T}_L^E \mathbf{v}_L + \boldsymbol{\omega}_{eE} \times \mathbf{r}_E) \quad (2.127)$$

### Passage de l'approche vectorielle vers l'approche angulaire

Le passage de l'approche vectorielle vers l'approche angulaire s'effectue en exprimant, également par l'utilisation des matrices de rotation, la vitesse inertielle dans le système de coordonnées local et le rayon dans le système de coordonnées terrestres. Cependant, elle doit s'effectuer en deux temps puisque la matrice de rotation  $\mathbf{T}_E^L$  est définie par des angles inconnus initialement. Ces angles ( $\lambda$  et  $\delta$ ) s'obtiennent en comparant la définition du vecteur rayon (équation (2.120)) aux composantes du vecteur rayon obtenu par l'approche vectorielle. Celui-ci doit préalablement être exprimé dans le système de coordonnées terrestre :

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{T}_G^E \mathbf{r}_G \quad (2.128)$$

La norme du vecteur correspond alors à la composante rayon de l'approche angulaire :

$$r = |\mathbf{r}_E| \quad (2.129)$$

Pour les angles, il faut tenir compte de l'intervalle sur lequel chacun est défini. Ainsi la longitude doit être obtenue en utilisant l'arc tangente ( $[-180^\circ, 180^\circ]$ ) alors que l'arc sinus ( $[-90^\circ, 90^\circ]$ ) est nécessaire pour la latitude :

$$\lambda = \arctan \left( \frac{r_{E_y}}{r_{E_x}} \right) \quad (2.130)$$

$$\delta = \arcsin \left( \frac{r_{E_z}}{r} \right) \quad (2.131)$$

Avec les angles de position, la matrice de rotation  $\mathbf{T}_E^L$  est définie et il devient possible d'écrire la vitesse dans le système de coordonnées local. La vitesse utilisée dans l'approche vectorielle étant la vitesse inertielle, il lui faut soustraire le terme provenant de la rotation de la Terre :

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{T}_E^L (\mathbf{T}_G^E \mathbf{v}_{iG} - \boldsymbol{\omega}_{eE} \times \mathbf{r}_E) \quad (2.132)$$

Comme pour le rayon, par l'utilisation des composantes de  $\mathbf{v}_L$ , la valeur des angles d'orientation de la vitesse ( $\gamma$  et  $\chi$ ) est obtenue en liant cette équation à sa définition (équation (2.121)). Pour cette opération, il faut également tenir compte de l'intervalle de définition des angles. Le cap appartient à tout le cercle trigonométrique alors que l'inclinaison de la trajectoire est dans  $[-90^\circ, 90^\circ]$  :

$$v = |\mathbf{v}_L| \quad (2.133)$$

$$\chi = \arctan \left( \frac{v_{L_y}}{v_{L_z}} \right) \quad (2.134)$$

$$\gamma = \arcsin \left( \frac{v_{L_x}}{v} \right) \quad (2.135)$$

### 2.3.4.2 Lien avec l'approche par quaternion complet

Le lien entre l'approche angulaire et l'approche par quaternion complet est moins directe que le précédent mais est également basé sur l'utilisation des matrices de rotation.

#### Passage de l'approche angulaire vers l'approche par quaternion complet

Dans un premier temps, le vecteur rayon est exprimé dans le second système de coordonnées sur la trajectoire par la matrice de rotation correspondante :

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{T}_L^Q \mathbf{r}_L = r \begin{bmatrix} \sin \gamma \\ 0 \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

Cette expression est mise en relation avec la définition du vecteur rayon exprimé dans le second système de coordonnées sur la trajectoire (équation (2.106)). Cela permet d'obtenir la valeur des composantes  $r_{Q_x}$  et  $r_{Q_z}$  :

$$r_{Q_x} = r \sin \gamma \quad (2.137)$$

$$r_{Q_z} = r \cos \gamma \quad (2.138)$$

Pour les quatre éléments du quaternion de rotation  $\underline{R}_Q$ , l'annexe A et, particulièrement, l'équation (A.11), sont très utiles. Cette équation lie une matrice de rotation au quaternion effectuant la même rotation. Le quaternion  $\underline{R}_Q$  effectue la rotation d'un vecteur exprimé dans le second système de coordonnées sur la trajectoire vers le système de coordonnées terrestre (équation (2.84)). Il est donc équivalent à la matrice de rotation  $\mathbf{T}_E^Q$  ( $\mathbf{T}_E^Q = \mathbf{T}_L^Q \mathbf{T}_E^L$ ). Les éléments du quaternion  $\underline{R}_Q$  s'obtiennent en comparant terme à terme cette matrice à l'équation (A.11) :

$$\underline{r}_0 = \frac{\sqrt{1 + \mathbf{T}_E^Q(1,1) + \mathbf{T}_E^Q(2,2) + \mathbf{T}_E^Q(3,3)}}{2} \quad (2.139)$$

$$\underline{r}_1 = \frac{\mathbf{T}_E^Q(3,2) - \mathbf{T}_E^Q(2,3)}{4\underline{r}_0} \quad (2.140)$$

$$\underline{r}_2 = \frac{\mathbf{T}_E^Q(1,3) - \mathbf{T}_E^Q(3,1)}{4\underline{r}_0} \quad (2.141)$$

$$\underline{r}_3 = \frac{\mathbf{T}_E^Q(2,1) - \mathbf{T}_E^Q(1,2)}{4\underline{r}_0} \quad (2.142)$$

où  $\mathbf{T}_{\mathbf{E}(n,m)}^{\mathbf{Q}}$  correspond à l'élément situé sur la  $n^{ieme}$  ligne et la  $m^{ieme}$  colonne de la matrice de rotation de E vers Q.

Par la suite, selon sa définition (équation (2.88)), pour obtenir le quaternion complet, il faut multiplier le quaternion unitaire ainsi obtenu par  $\sqrt{v}$  :

$$R_Q = \sqrt{v} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

### Passage de l'approche par quaternion complet vers l'approche angulaire

Le passage de l'approche par quaternion complet à l'approche angulaire utilise également la relation de l'équation (A.11). Premièrement, l'équation (2.136) permet d'obtenir la valeur du rayon, qui correspond à la norme du vecteur, et de l'inclinaison de la trajectoire ( $\gamma$ ), qui correspond à l'angle entre l'axe  $x_Q$  et l'horizon local :

$$r = \sqrt{r_{Q_x}^2 + r_{Q_z}^2} \quad (2.144)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{r_{Q_x}}{r_{Q_z}}\right) \quad (2.145)$$

L'utilisation de l'arc sinus est nécessaire pour obtenir l'inclinaison de la trajectoire dans l'intervalle  $[-90^\circ, 90^\circ]$

Pour obtenir la vitesse  $v$ , il suffit, selon l'équation (2.88), d'élever au carré la norme du quaternion  $R_Q$  :

$$v = |R_Q|^2 \quad (2.146)$$

L'obtention des trois paramètres restants, les angles  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $\chi$ , est moins directe et nécessite quelques manipulations mathématiques des matrices de rotation. Elle débute par l'expression de la définition de la matrice de rotation  $\mathbf{T}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{Q}}$  :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{T}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{L}} = \mathbf{T}_{\mathbf{y}}(\pi/2 - \gamma) \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(-(\pi + \chi)) \mathbf{T}_{\mathbf{y}}(-\delta) \mathbf{T}_{\mathbf{z}}(\lambda) \quad (2.147)$$

En notant  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$  la matrice de rotation  $\mathbf{T}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{Q}}$  associée, selon équation (A.11), au quaternion  $R_Q$  et en utilisant les propriétés de symétrie des fonctions trigonométriques et des matrices de rotation, l'équation précédente se réécrit comme suit :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{y}}(\pi/2 - \gamma)^T \mathbf{T}_{\mathbf{R}} = \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\pi - \chi) \mathbf{T}_{\mathbf{y}}(-\delta) \mathbf{T}_{\mathbf{z}}(\lambda) \quad (2.148)$$

L'équation (2.145) donne la valeur de l'angle  $\gamma$  et, puisque la matrice de rotation  $\mathbf{T}_R$  est composée des éléments du quaternion  $\underline{R}_Q$ , son terme de gauche de l'équation est entièrement connu. À l'opposée, le terme de droite est composé uniquement des trois angles inconnus. Une égalité terme à terme des deux côtés de l'équation permet d'obtenir la valeur de ces inconnues. Le terme de gauche est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R(1,1)} \sin \gamma + \mathbf{T}_{R(3,1)} \cos \gamma & \mathbf{T}_{R(1,2)} \sin \gamma + \mathbf{T}_{R(3,2)} \cos \gamma & \mathbf{T}_{R(1,3)} \sin \gamma + \mathbf{T}_{R(3,3)} \cos \gamma \\ \mathbf{T}_{R(2,1)} & \mathbf{T}_{R(2,2)} & \mathbf{T}_{R(2,3)} \\ -\mathbf{T}_{R(1,1)} \cos \gamma + \mathbf{T}_{R(3,1)} \sin \gamma & -\mathbf{T}_{R(1,2)} \cos \gamma + \mathbf{T}_{R(3,2)} \sin \gamma & -\mathbf{T}_{R(1,3)} \cos \gamma + \mathbf{T}_{R(3,3)} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

et celui du terme de droite :

$$\begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & \cos \delta \sin \lambda & \sin \delta \\ -\sin \chi \sin \delta \cos \lambda + \cos \chi \sin \lambda & -\sin \chi \sin \delta \sin \lambda - \cos \chi \cos \lambda & \sin \chi \cos \delta \\ \sin \chi \sin \delta \cos \lambda + \sin \chi \sin \lambda & \sin \chi \sin \delta \sin \lambda - \sin \chi \cos \chi & -\cos \chi \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

Par associations des termes, les trois angles restants sont obtenus. Comme précédemment, il faut porter attention à l'intervalle de définition de chaque angle, d'où l'utilisation de l'arc tangente pour le longitude et le cap et de l'arc sinus pour la latitude :

$$\lambda = \arctan \left( \frac{\mathbf{T}_{R(1,2)} \sin \gamma + \mathbf{T}_{R(3,2)} \cos \gamma}{\mathbf{T}_{R(1,1)} \sin \gamma + \mathbf{T}_{R(3,1)} \cos \gamma} \right) \quad (2.151)$$

$$\chi = \arctan \left( \frac{\mathbf{T}_{R(2,3)}}{\mathbf{T}_{R(1,3)} \cos \gamma - \mathbf{T}_{R(3,3)} \sin \gamma} \right) \quad (2.152)$$

$$\delta = \arcsin (\mathbf{T}_{R(1,3)} \sin \gamma + \mathbf{T}_{R(3,3)} \cos \gamma) \quad (2.153)$$

### 2.3.5 Comparaison des différentes modélisations

Les sections 2.3.1 à 2.3.4 développaient toutes les équations nécessaires à la simulation de la dynamique de translation d'un lanceur. Basée sur ces développements et sur l'application à la mission du projet, la présente section compare les trois approches. Dans un premier temps (section 2.3.5.1), les développements et les équations résultantes sont analysés afin de ressortir les principales caractéristiques des trois approches (résumées au tableau 2.1). Par la suite, à la section 2.3.5.2, les équations sont implémentées dans un simulateur Matlab<sup>®</sup> afin de comparer leur efficacité en vue de l'utilisation comme modèle dans la fonction de guidage.

#### 2.3.5.1 Analyse des équations

Le choix du système de coordonnées inertiel pour écrire les équations de translation est déterminant sur les caractéristiques de l'approche vectorielle. En effet, puisque les

composantes de l'état du système sont les composantes des vecteurs position et vitesse, cette approche est exempte de discontinuités. Cependant, ceci a également pour effet de compliquer l'utilisation de l'approche. Bien que les composantes soient des vecteurs, ceux-ci correspondent aux vecteurs inertiels qui, puisqu'il ne représentent pas le lanceur par rapport à un observateur terrestre, ont une signification physique floue complexifiant ainsi leur utilisation et leur manipulation. Également, puisque le système de coordonnées inertiel n'est pas celui dans lequel les forces externes sont définies, ces dernières doivent être ramenées, en utilisant les matrices de rotation, dans le système de coordonnées de développement. Ces matrices de rotation sont définies par des angles qui ne sont pas directement disponibles dans l'état de l'approche et qui doivent être calculés à chaque instant de simulation. L'obtention de ces angles, telle que définie à la section 2.3.4, n'est pas une opération complexe, mais allonge le calcul de l'approche vectorielle.

Le développement de l'approche angulaire est plus complexe que celui de l'approche vectorielle, mais il donne des équations et un état plus simple à utiliser. Toutes les composantes de l'état représentent une quantité physique. De plus, puisque le système de développement est un système sur la trajectoire, l'utilisation des équations se résume à les implémenter et utiliser directement la valeur des variables qui y apparaissent. À la différence des deux autres approches, les forces peuvent être utilisées directement. Il n'est pas nécessaire d'ajouter les forces fictives ou de transférer les forces externes dans un système de coordonnées différent que leur système de définition, ceci a été effectué *a priori*, dans le développement des équations. Cependant, le développement est tel que trois discontinuités sont présentes dans cette approche. Deux discontinuités (vitesse de déplacement nulle et déplacement perpendiculaire à l'horizon local) ne sont pas nuisibles pour une trajectoire exo-atmosphérique de lancement. La troisième (au-dessus des pôles) risque cependant d'être problématique pour une trajectoire circulant à des latitudes élevées.

L'approche par quaternion complet constitue un compromis entre les deux autres approches. Son développement s'effectue dans un système de coordonnées non inertiel et utilise la vitesse relative. Ainsi, à la différence des deux autres approches, les forces fictives doivent être ajoutées explicitement dans les équations. Cependant, puisque le système de coordonnées utilisé dans le développement est un système sur la trajectoire, les forces externes ne doivent pas être transférées dans un système de coordonnées inertiel. Ainsi, cette approche nécessite moins d'opérations que l'approche vectorielle et est plus rapide à calculer. De plus, le temps sidéral, apparaissant dans la matrice de rotation du système de coordonnées terrestre vers le système de coordonnées inertiel, n'est pas nécessaire. Cependant, bien qu'elles soient définies dans un système de coordonnées sur la trajectoire, les forces externes nécessitent l'utilisation d'angles qui ne sont pas directement disponibles dans l'état de l'approche. Ainsi, comme pour l'approche vecto-

rielle, certaines opérations supplémentaires sont nécessaires à l'obtention de ces angles. Bien que ces opérations ne soient pas complexes mathématiquement (section 2.3.4), elles allongent le temps de calcul. L'utilisation d'un quaternion pour modéliser la rotation élimine la discontinuité au-dessus des pôles. Les deux discontinuités liées au déplacement (vitesse nulle et déplacement perpendiculaire à l'horizon local) demeurent présentes, mais, comme mentionné précédemment, elles ne sont pas nuisibles pour l'étude de la trajectoire exo-atmosphérique.

quaternion	angulaire	vectorielle
temps de calcul long	temps de calcul court	temps de calcul long
discontinuité lors d'un déplacement vertical	discontinuité lors d'un déplacement vertical	aucune discontinuité
discontinuité avec une vitesse nulle	discontinuité avec une vitesse nulle	
	discontinuité lors du passage au-dessus des pôles	
signification physique floue	signification physique directe	signification physique directe, mais inutilisable pour l'application
calcul des forces nécessite des opérations supplémentaires	implémentation directe, aucunes opérations supplémentaires	équations nécessitent des opérations supplémentaires
		équations nécessitent le temps sidéral

TABLEAU 2.1 – Résumé des caractéristiques des trois approches

### 2.3.5.2 Analyse des implémentations

Dans la section précédente, l'analyse est basée uniquement sur l'analyse des équations et de l'implémentation des trois approches. Cependant, les commentaires sur le temps de calcul se doivent d'être vérifiés par l'implémentation des trois approches dans un simulateur. Un simulateur, basé sur les développements précédents, a été créé où l'application des forces s'effectue avec les trois approches. Les simulations sont effectuées en utilisant les résultats finaux (orientation du vecteur poussée, temps de dérive et temps de brûlage du troisième étage) du chapitre sur la définition d'une trajectoire de référence (chapitre 3). Ceci permet de s'assurer que la trajectoire est réalisable et

que l'orbite finale est viable. De plus, afin d'assurer la validité de la comparaison de la trajectoire, aucun phénomène aléatoire n'est inclus dans les trois simulations. Les comparaisons s'effectuent sur deux bases, le temps de calcul et la précision de l'approche.

Pour l'étude de la précision, les trois approches sont simulées et la soustraction de chacune d'entre elles à l'approche angulaire est tracée sur la figure 2.12.

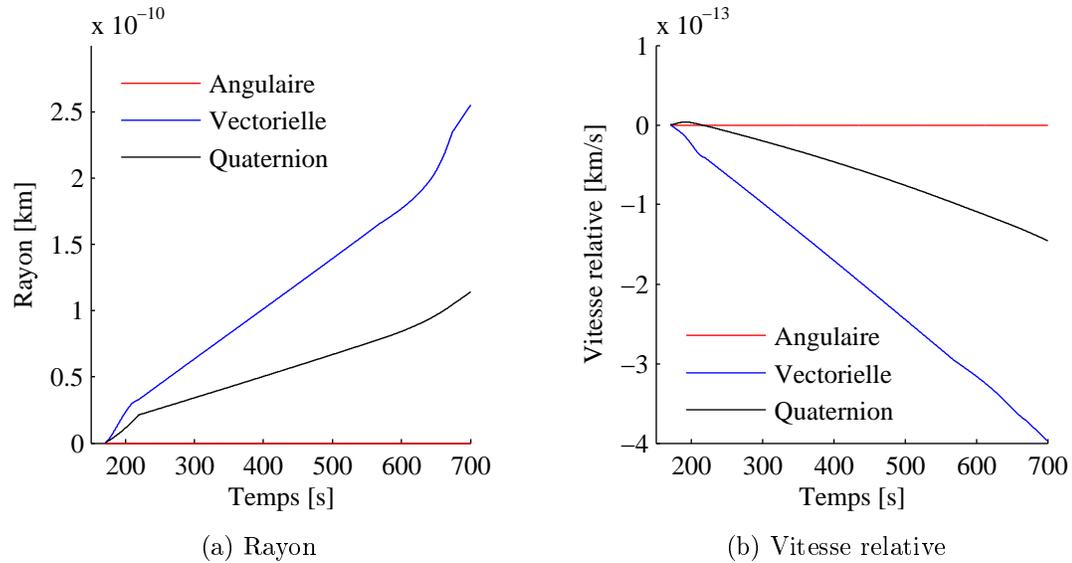


FIGURE 2.12 – Comparaison des approches

Ces figures démontrent que, bien que la différence entre les trois approches soient structurée, cette différence est négligeable, moins de  $3 \times 10^{-10}$ . Cette différence provient des opérations de conversion entre l'approche angulaire et les deux autres. En effet, les simulations sont initialisées par l'état de l'approche angulaire qui est convertie dans l'état de l'approche simulée. La moindre petite différence provenant de cette opération de conversion est amplifiée par l'intégration des équations sur les 530 s de la simulation. Dans l'ordre de grandeur obtenue, cette différence pourrait également provenir uniquement de la précision machine du logiciel utilisé pour la simulation. La source réelle de la différence n'a pas été investiguée puisque la différence entre les trois approches est négligeable.

La seconde comparaison importante pour l'utilisation temps réel de ces approches est le temps de calcul. Pour effectuer cette comparaison, les trois approches sont simulées à nouveau, mais toutes les opérations de conversion nécessaires uniquement à la comparaison sont éliminées. Cette comparaison produit la figure 2.13.

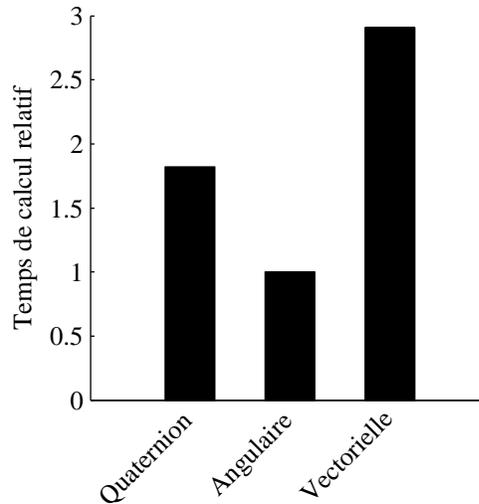


FIGURE 2.13 – Comparaison du temps de calcul

Cette figure confirme ce qui a été avancé dans la section 2.3.5.1 lors de l’analyse des équations. Ainsi, de par les opérations supplémentaires nécessaires à l’obtention des forces, les approches vectorielle et par quaternion sont plus longues que l’approche angulaire. Les opérations supplémentaires pour transférer ces forces dans le système de coordonnées inertiel rendent l’approche vectorielle plus lente que l’approche par quaternion. Ce résultat est cohérent avec ce qui est dit par Blakelock (1991) comme quoi l’écriture des équations de mouvement dans un système de coordonnées défini sur la trajectoire diminue le temps de calcul.

Ainsi, comme mentionné dans Vachon *et al.* (2011), pour le guidage d’un lanceur dans sa phase exo-atmosphérique, l’approche angulaire doit demeurer l’approche de prédilection pour la majorité des orbites. Son temps de calcul et sa simplicité d’utilisation la rendent mieux adaptée à une utilisation en temps réel. Cependant, dans le cas où l’orbite visée est une orbite presque polaire, l’approche par quaternion complet doit être considérée comme l’alternative à privilégier. Ainsi, pour ce projet, puisque l’orbite héliosynchrone étudiée ne passe pas près assez des pôles pour que la discontinuité soit problématique, l’approche angulaire est utilisée dans la suite de la thèse.

## 2.4 Paramètres orbitaux

La théorie de Kepler (Prussing et Conway, 1993) permet de définir aisément le mouvement d’un objet autour d’un corps central attractif. Le résultat le plus important de cette théorie est que le mouvement du corps orbitant forme une ellipse dont

le corps central est situé sur l'un des foyers de cette ellipse. Ce résultat découle de l'hypothèse principale de la théorie qui considère l'accélération gravitationnelle proportionnelle à l'inverse du carré du rayon. Les équations de propagation (annexe D) en utilisant les paramètres orbitaux ne peuvent être utilisées, mais les valeurs instantanées de ces paramètres orbitaux (section 2.4.1) peuvent être calculées à chaque instant (section 2.4.2) afin d'obtenir une caractérisation de l'orbite. Ces paramètres constituent ainsi une quatrième représentation de l'état d'un lanceur, les trois premières étant celles liées à chacune des approches de la section 2.3.

### 2.4.1 Définitions des paramètres orbitaux

Assumant que l'orbite est une ellipse, six paramètres sont nécessaires pour la décrire. Deux paramètres définissent la forme de l'orbite, trois définissent son orientation par rapport au système de coordonnées inertiel et le dernier positionne le lanceur sur cette orbite. Les paramètres permettant de définir la forme de l'orbite et la position du lanceur sur cette dernière sont illustrés sur la figure 2.14. Il existe deux principaux ensembles permettant de définir la forme. Le premier inclut le demi-grand axe de l'ellipse ( $a$ ) et son excentricité ( $e$ ). Le second groupe de paramètres est composé : du rayon du périégée ( $r_p$ ), distance entre le point le plus rapproché de la Terre (périégée) et celle-ci ; et du rayon de l'apogée ( $r_a$ ), distance entre le point le plus éloigné de la Terre (apogée) et cette dernière. Ce second groupe est préféré dans le cadre de cette étude puisque, ayant une valeur similaire, ces deux paramètres sont mieux conditionnés pour une utilisation dans la formulation des algorithmes de définition d'une trajectoire (section 3.2) et de guidage par commande prédictive (chapitre 5). L'anomalie vraie ( $\nu$ ) est choisie afin de représenter la position de l'objet sur son orbite, mais il existe des alternatives (anomalie excentrique et anomalie moyenne) selon l'usage envisagé. Le choix de l'anomalie vraie est basé uniquement sur la facilité d'interprétation. En comparaison avec les deux autres anomalies, l'anomalie vraie est celle dont la signification physique (angle, mesuré au foyer, entre le périégée et la position courante sur l'orbite) est la plus facile à concevoir et à obtenir à partir des variables de l'approche angulaire.

Les trois angles qui permettent d'orienter le plan orbital par rapport au système de coordonnées inertiel sont présentés sur la figure 2.15. L'inclinaison du plan orbital ( $i$ ) est l'angle entre le plan orbital et le plan équatorial. L'ascension droite du nœud ascendant ( $\Omega_o$ ) correspond à l'angle entre l'axe  $x_G$  et l'axe du nœud ascendant. Cet axe est formé par la droite liant le centre de la Terre au point de croisement de l'orbite avec le plan équatorial lorsque l'objet orbitant se déplace vers le nord, le nœud ascendant. Le dernier angle, l'argument du périégée ( $\omega_o$ ) positionne le périégée par rapport au plan équatorial. Il correspond à l'angle entre le périégée et le nœud ascendant.

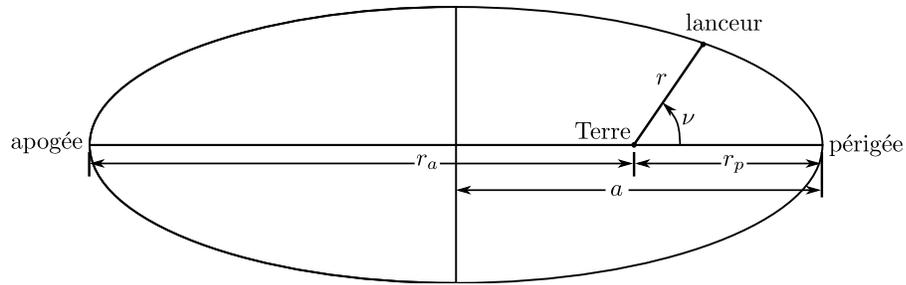


FIGURE 2.14 – Définition de la forme de l'ellipse orbitale

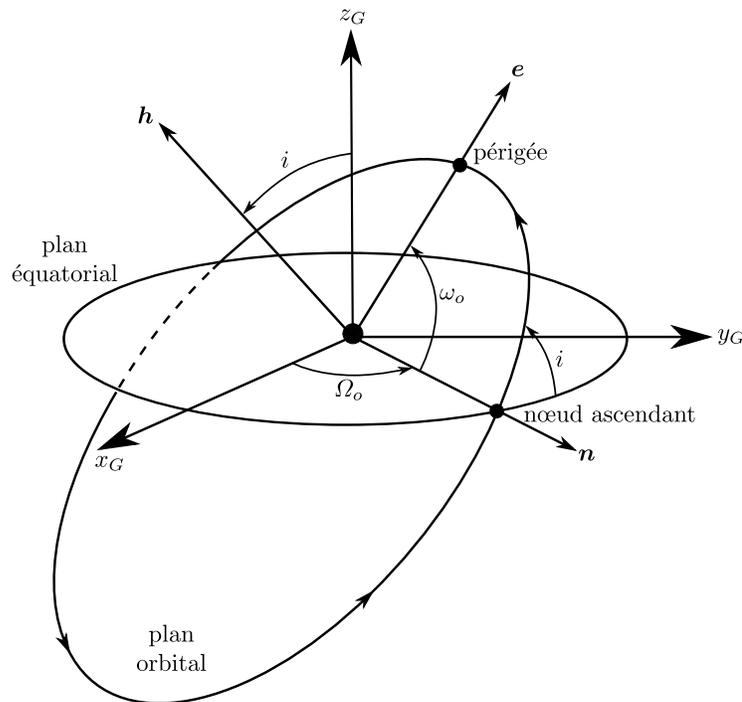


FIGURE 2.15 – Positionnement de l'ellipse orbitale

### 2.4.2 Passage de l'approche angulaire aux paramètres orbitaux

La section précédente a défini les paramètres orbitaux permettant d'obtenir une caractérisation instantanée de l'orbite sur laquelle se situe le lanceur. Dans la présente section, ces paramètres sont liés aux variables de l'approche angulaire. Il est ainsi possible, en tout temps, d'obtenir la caractérisation de l'orbite actuelle du lanceur.

Il convient d'introduire trois vecteurs d'orientation qui vont faciliter le développement. Ces vecteurs, présentés sur la figure 2.15, servent à définir le plan orbital. Le vecteur du moment angulaire spécifique ( $\mathbf{h}$ ) est normal au plan orbital. Ce dernier

correspond au moment angulaire de l'objet orbitant divisé par sa masse :

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})}{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.154)$$

Le second vecteur est le vecteur du nœud ascendant ( $\mathbf{n}$ ). Il se situe dans le plan équatorial et pointe vers le nœud ascendant. Il s'obtient en prenant le produit vectoriel des vecteurs normaux au plan équatorial et au plan orbital :

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}_G \times \mathbf{h} \quad (2.155)$$

Le troisième vecteur est le vecteur d'excentricité ( $\mathbf{e}$ ). Ce vecteur s'obtient par la résolution du problème d'attraction à deux corps. Ce problème a pour solution (Prussing et Conway, 1993) :

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu_e \mathbf{r}}{r} + \mu_e \mathbf{e} \quad (2.156)$$

Le vecteur d'excentricité vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{\mu_e} \left( \mathbf{v} \times \mathbf{h} - \frac{\mu_e \mathbf{r}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_e} \left( (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{\mu_e \mathbf{r}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_e} \left( (v^2 - \frac{\mu_e}{r}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (2.157)$$

et il pointe vers le périégée de l'orbite.

Contrairement au développement de l'approche angulaire, les paramètres orbitaux sont définis dans le système de coordonnées inertiel. Il faut donc utiliser la valeur inertielle du vecteur vitesse. Ainsi, comme il a été fait précédemment (équation (2.57)), la vitesse provenant de la rotation de la Terre est additionnée à la vitesse définie dans l'approche angulaire. L'équation suivante s'obtient en explicitant chacune de composante de vecteurs de l'équation (2.57) :

$$v_i \begin{bmatrix} \sin \gamma_i \\ \cos \gamma_i \sin \chi_i \\ \cos \gamma_i \cos \chi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \sin \gamma \\ v \cos \gamma \sin \chi + r\omega_e \cos \delta \\ v \cos \gamma \cos \chi \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

La norme des deux vecteurs doit être la même. Il est ainsi possible d'obtenir la valeur de la vitesse inertielle ( $v_i$ ) :

$$v_i = \sqrt{v^2 + r\omega_e \cos \delta (2v \cos \gamma \sin \chi + r\omega_e \cos \delta)} \quad (2.159)$$

L'égalité de chacune des composantes étant également nécessaire, l'angle  $\chi_i$  s'obtient en divisant la composante sur l'axe  $y_L$  par la composante sur l'axe  $z_L$  :

$$\tan \chi_i = \tan \chi + \frac{r\omega_e \cos \delta}{v \cos \gamma \cos \chi} \quad (2.160)$$

L'utilisation d'une division de composantes est nécessaire puisque le cap peut prendre des valeurs sur tout le cercle trigonométrique. La division permet de définir une tangente et ainsi d'éviter l'ambiguïté sur les quadrants. Ceci n'est pas nécessaire pour l'inclinaison de la trajectoire puisqu'elle ne peut prendre que des valeurs comprises dans l'intervalle  $[-90^\circ, 90^\circ]$ , l'utilisation du sinus suffit :

$$\sin \gamma_i = \frac{v \sin \gamma}{v_i} \quad (2.161)$$

### 2.4.2.1 Demi-grand axe

Le principe de conservation de l'énergie appliqué à l'énergie cinétique  $\left(\frac{mv_i^2}{2}\right)$  et l'énergie potentielle du mouvement képlérien  $\left(\frac{m\mu_e}{r-2a}\right)$  permet d'obtenir la valeur du demi-grand axe de l'orbite :

$$\begin{aligned} \frac{mv_i^2}{2} &= \frac{m\mu_e}{r-2a} \\ a &= \frac{r\mu_e}{2\mu_e - rv_i^2} \end{aligned} \quad (2.162)$$

### 2.4.2.2 Excentricité

L'équation (2.157) définit le vecteur de l'excentricité. Pour obtenir la valeur de cette dernière, il faut donc calculer la norme de ce vecteur. Les vecteurs du rayon et de la vitesse inertielle sont facilement exprimables dans le système de coordonnées local. Dans ce système de coordonnées, l'équation (2.157) s'écrit :

$$\mathbf{e}_L = \left( \frac{v_i^2}{\mu_e} - \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{rv_i \sin \gamma_i}{\mu_e} \begin{bmatrix} v_i \sin \gamma_i \\ v_i \cos \gamma_i \sin \chi_i \\ v_i \cos \gamma_i \cos \chi_i \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

La norme, la valeur de l'excentricité, est donc :

$$e = \sqrt{\left(\frac{v_i^2 r}{\mu_e}\right)^2 \cos^2 \gamma_i - 2 \frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos^2 \gamma_i + 1} \quad (2.164)$$

### 2.4.2.3 Rayons de l'apogée et du périégée

Le rayon des apsides de l'orbite est équivalent aux deux paramètres précédents. Ainsi, à partir des équations (2.162) et (2.164), il est possible d'obtenir le rayon des deux apsides avec uniquement les deux relations sur la géométrie d'une ellipse :

$$2a = r_a + r_p \quad (2.165)$$

$$2ae = r_a - r_p \quad (2.166)$$

Le lien entre les rayons des apsides et les variables de l'approche angulaire est donc :

$$r_a = a(1 + e) = \frac{r\mu_e}{2\mu_e - rv_i^2} \left( 1 + \sqrt{\left(\frac{v_i^2 r}{\mu_e}\right)^2 \cos^2 \gamma_i - 2\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos^2 \gamma_i + 1} \right) \quad (2.167)$$

$$r_p = a(1 - e) = \frac{r\mu_e}{2\mu_e - rv_i^2} \left( 1 - \sqrt{\left(\frac{v_i^2 r}{\mu_e}\right)^2 \cos^2 \gamma_i - 2\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos^2 \gamma_i + 1} \right) \quad (2.168)$$

### 2.4.2.4 Inclinaison du plan orbital

L'inclinaison du plan orbital est l'angle entre le plan orbital et le plan équatorial. L'angle entre deux plans est le même que celui entre leur vecteurs normaux. Ainsi, l'inclinaison orbitale peut être obtenue en calculant le produit scalaire entre un vecteur normal au plan orbital ( $\mathbf{h}$ ) et un vecteur normal au plan équatorial ( $\mathbf{k}_E$ ) :

$$\mathbf{h}_L \cdot \mathbf{k}_{EL} = |\mathbf{h}_L| |\mathbf{k}_{EL}| \cos i = (\mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_L) \cdot \mathbf{T}_E^L \mathbf{k}_{EE} \quad (2.169)$$

La résolution de cette équation permet de définir l'angle d'inclinaison du plan orbital :

$$\cos i = \sin \chi_i \cos \delta \quad (2.170)$$

Le produit scalaire est utilisé puisque l'inclinaison orbitale est définie sur l'intervalle  $[0^\circ, 180^\circ]$ . Il faut donc utiliser l'arc cosinus pour obtenir un angle à l'intérieur de cet intervalle.

### 2.4.2.5 Ascension droite du nœud ascendant

La ascension droite du nœud ascendant est l'angle entre l'axe  $x_G$  et le segment de droite formée par l'axe du nœud ascendant. Similairement à l'obtention de l'inclinaison

orbitale, la ascension droite du nœud ascendant s'obtient par le calcul du produit scalaire entre deux vecteurs, le vecteur du nœud ascendant ( $\mathbf{n}$ ) et le vecteur sur l'axe  $x_G$  ( $\mathbf{v}_G$ ) :

$$\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{v}_{GL} = |\mathbf{n}_L| |\mathbf{v}_{GL}| \cos \Omega_o \quad (2.171)$$

Cependant, la ascension droite du nœud ascendant est définie sur tout le cercle, il faut donc également définir le sinus de l'angle afin de lever les ambiguïtés sur le quadrant. Celui-ci s'obtient en calculant le produit vectoriel des deux mêmes vecteurs :

$$|\mathbf{n}_L \times \mathbf{v}_{GL}| = |\mathbf{n}_L| |\mathbf{v}_{GL}| \sin \Omega_o \quad (2.172)$$

La tangente de la ascension droite du nœud ascendant est obtenue par la division de l'équation (2.171) par l'équation (2.172). Il est possible de simplifier l'écriture en constatant que l'angle entre l'axe  $x_E$  et le vecteur du nœud ascendant est la ascension droite du nœud ascendant auquel on soustrait la rotation de la Terre :

$$\tan(\Omega_o - t_s \omega_e) = \frac{|(\mathbf{T}_E^L \mathbf{k}_{EE} \times (\mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_L)) \times \mathbf{T}_E^L \mathbf{v}_{EE}|}{(\mathbf{T}_E^L \mathbf{k}_{EE} \times (\mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_L)) \cdot \mathbf{T}_E^L \mathbf{v}_{EE}} \quad (2.173)$$

La résolution de cette équation donne la valeur de la ascension droite du nœud ascendant :

$$\tan(\Omega_o - t_s \omega_e) = \frac{\sin \lambda \cos \chi_i - \sin \delta \sin \chi_i \cos \lambda}{\cos \lambda \cos \chi_i + \sin \delta \sin \chi_i \sin \lambda} \quad (2.174)$$

#### 2.4.2.6 Argument du périégée

L'argument du périégée est l'angle entre le périégée de l'orbite et le plan équatorial. Le vecteur de l'excentricité, défini à l'équation (2.157), pointe vers le périégée. Il est donc possible, en prenant un approche similaire à la section précédente, d'obtenir l'angle entre le vecteur de l'excentricité et celui du nœud ascendant. L'écriture du produit scalaire (équation (2.175)) et du produit vectoriel (équation (2.176)) permet d'obtenir respectivement le cosinus et le sinus de l'argument du périégée :

$$\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{e}_L = |\mathbf{n}_L| |\mathbf{e}_L| \cos \omega_o \quad (2.175)$$

$$|\mathbf{n}_L \times \mathbf{e}_L| = |\mathbf{n}_L| |\mathbf{e}_L| \sin \omega_o \quad (2.176)$$

La division des deux équations donne la tangente de l'angle :

$$\tan \omega_o = \frac{|(\mathbf{T}_E^L \mathbf{k}_{EE} \times (\mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_{iL})) \times \left(\frac{1}{\mu_e} \left((v_i^2 - \frac{\mu_e}{r}) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_{iL}) \mathbf{v}_{iL}\right)\right)|}{(\mathbf{T}_E^L \mathbf{k}_{EE} \times (\mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_{iL})) \cdot \left(\frac{1}{\mu_e} \left((v_i^2 - \frac{\mu_e}{r}) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_{iL}) \mathbf{v}_{iL}\right)\right)} \quad (2.177)$$

Ce qui, une fois résolu, donne :

$$\tan \omega_o = \frac{\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos \chi_i \sin \gamma_i \cos \gamma_i \cos \delta + \sin \delta \left(\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos^2 \gamma_i - 1\right)}{-\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos \gamma_i \sin \gamma_i \sin \delta + \cos \chi_i \cos \delta \left(\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos^2 \gamma_i - 1\right)} \quad (2.178)$$

### 2.4.2.7 Anomalie vraie

Finalement, l'anomalie vraie définit la position du lanceur par rapport au périégée. Elle s'obtient donc en utilisant les vecteurs du rayon et de l'excentricité. Elle est également définie sur tout le cercle trigonométrique et nécessite donc l'utilisation du produit scalaire et du produit vectoriel :

$$\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{e}_L = |\mathbf{r}_L| |\mathbf{e}_L| \cos \nu \quad (2.179)$$

$$|\mathbf{r}_L \times \mathbf{e}_L| = |\mathbf{r}_L| |\mathbf{e}_L| \sin \nu \quad (2.180)$$

La tangente de l'angle est obtenue en divisant les deux équations :

$$\tan \nu = \frac{\left| \mathbf{r}_L \times \left( \frac{1}{\mu_e} \left( (v_i^2 - \frac{\mu_e}{r}) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_{iL}) \mathbf{v}_{iL} \right) \right) \right|}{\mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{1}{\mu_e} \left( (v_i^2 - \frac{\mu_e}{r}) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_{iL}) \mathbf{v}_{iL} \right) \right)} \quad (2.181)$$

et, avec l'expression de chacun des termes à l'intérieur de cette équation, la valeur de l'anomalie vraie est :

$$\tan \nu = \frac{\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \sin \gamma_i \cos \gamma_i \sqrt{1 - \cos \chi_i \sin \chi_i}}{\frac{v_i^2 r}{\mu_e} \cos^2 \gamma_i - 1} \quad (2.182)$$

## 2.5 Modèle à pseudo-cinq degrés de liberté

Depuis le début de ce chapitre, uniquement la dynamique de translation est considérée. Bien que ceci soit cohérent avec le découplage de la section 1.2, la boucle de guidage gère un système qui inclut la fonction de commande et donc la dynamique de rotation (figure 1.2). L'approximation des équations complètes d'Euler par les fonctions de transfert de la boucle de commande fermée constitue la façon la plus simple de prendre en compte la dynamique de rotation dans la fonction de guidage. L'avantage dans l'utilisation de cette approximation est qu'elle permet de prendre en compte la dynamique de rotation tout en gardant la simplicité du schéma à trois degrés de liberté. Le schéma obtenu en combinant cette approximation se nomme le modèle à pseudo-cinq degrés de liberté. L'appellation pseudo amplifie le fait que les dynamiques de rotation sont estimées par des fonctions différentielles linéaires.

Le modèle de translation est complexifié de deux pseudo degrés de liberté. Puisque le lanceur a une symétrie circulaire, pour le guidage, le roulis peut être considéré nul sans affecter la validité de la modélisation. Selon Zipfel (2007), une fonction de guidage

développée sur un modèle à pseudo-cinq degrés de liberté peut être implémentée, sans modifications, directement dans les simulations complètes à six degrés de liberté.

Dans le cadre de cette thèse, la pseudo-dynamique ajoutée correspond à l'approximation de la dynamique des angles d'orientations de la poussée. Cette dynamique peut correspondre à la dynamique du tangage et du lacet (voir section 2.1.11). Selon Baldesi (2008), un premier ordre avec une constante de temps de 1 s est, dans la partie exo-atmosphérique du lancement, une réponse réalisable et ce, pour les deux dynamiques. Ainsi, les équations modélisant ces transferts sont :

$$\dot{\vartheta} = \vartheta_{com} - \vartheta \quad (2.183a)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_{com} - \varphi \quad (2.183b)$$

où  $\vartheta_{com}$  et  $\varphi_{com}$  sont les valeurs commandées des angles d'orientation de la poussée.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la dynamique de translation d'un lanceur a été introduite et développée. Pour y parvenir, trois approches différentes ont été étudiées : une approche vectorielle, une approche angulaire et une approche par quaternion. La comparaison des trois approches a permis de conclure que l'approche angulaire est l'approche la mieux adaptée à la modélisation de la dynamique de translation dans le but d'effectuer le guidage. Cependant, il a été démontré que l'approche par quaternion est celle qui devrait être utilisée lorsque le lanceur circule près de pôles où l'approche angulaire est discontinue. Également, les équations liant les approches avec l'approche angulaire ont été introduites afin de pouvoir réaliser des comparaisons sur la précision de chacune des approches.

Par la suite, les paramètres orbitaux ont été présentés et liés aux variables de l'approche angulaire. Ces paramètres permettent une caractérisation instantanée de l'orbite sur laquelle le lanceur se situe et sur laquelle il injecte sa charge utile. Les orbites des satellites sont définies par ces paramètres orbitaux alors que le mouvement du lanceur est généralement décrit par sa vitesse et sa position. Ainsi, par l'utilisation des paramètres orbitaux, il est possible d'utiliser les spécifications de la charge utile directement dans l'algorithme de guidage du lanceur.

Troisièmement, les équations modélisant la pseudo-dynamique de rotation ont été présentées et introduites dans le modèle du système à guider. Ces équations permettent de prendre en compte la dynamique de rotation dans la modélisation de la translation

sans trop la complexifier. Dans la suite de la thèse, le modèle complet de la dynamique du système à guider est composé des équations (2.82) de l'approche angulaire pour modéliser la dynamique de translation et des équations (2.183) modélisant la pseudo-dynamique de rotation :

$$\dot{m} = \Delta_m \quad (2.184a)$$

$$\dot{r} = v \sin(\gamma) \quad (2.184b)$$

$$\dot{v} = \frac{F_p \cos \vartheta \cos \varphi}{m} - g_r \sin \gamma + g_\delta \cos \chi \cos \gamma - \omega_e^2 r \cos \delta (\sin \delta \cos \chi \cos \gamma - \cos \delta \sin \gamma) \quad (2.184c)$$

$$\dot{\delta} = \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r} \quad (2.184d)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos \delta} \quad (2.184e)$$

$$\dot{\chi} = \frac{F_p \cos \vartheta \sin \varphi}{mv \cos \gamma} - \frac{g_\delta \sin \chi}{v \cos \gamma} - \frac{2\omega_e}{\cos \gamma} (\sin \gamma \cos \delta \cos \chi - \cos \gamma \sin \delta) + \frac{v}{r} \sin \chi \cos \gamma \tan \delta + \frac{\omega_e^2}{v \cos \gamma} r \cos \delta \sin \delta \sin \chi \quad (2.184f)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{-F_p \sin \vartheta}{mv} - \frac{g_r}{v} \cos \gamma - \frac{g_\delta}{v} \cos \chi \sin \gamma + \frac{v}{r} \cos \gamma + 2\omega_e \sin \chi \cos \delta + \frac{\omega_e^2 r \cos \delta}{v} (\cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \chi \sin \gamma) \quad (2.184g)$$

$$\dot{\vartheta} = \vartheta_{com} - \vartheta \quad (2.184h)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_{com} - \varphi \quad (2.184i)$$

# Chapitre 3

## Définition d'une trajectoire de lancement par méthode directe

La modélisation du chapitre 2 fournit le modèle fiable et réaliste nécessaire à la définition d'une trajectoire de référence. Ce modèle permet de prédire le mouvement du lanceur selon l'orientation donnée à la poussée. Il est ainsi possible d'obtenir une caractérisation instantanée de l'orbite actuelle du lanceur et de celle sur laquelle il injectera sa charge utile.

Comme mentionné à la section 1.3.3, la définition d'une trajectoire d'un lanceur est un problème complexe. Elle se doit de tenir compte de tous les changements dans la dynamique du lanceur et dans le milieu ambiant. La séparation en partie atmosphérique et exo-atmosphérique introduite au chapitre 1 est utilisée sur plusieurs lanceurs modernes (Su, 2008) et également dans ce projet. À la suite de cette séparation, le problème de définition d'une trajectoire de lancement devient alors la définition d'une trajectoire exo-atmosphérique suite à un choix, non arbitraire, du point de sortie de l'atmosphère. La partie endo-atmosphérique est brièvement introduite et discutée à la section 3.1, mais n'est pas étudiée dans ce projet qui se concentre sur la résolution du problème aux deux bouts posé par la trajectoire exo-atmosphérique.

Les méthodes pour résoudre le problème aux deux bouts se divisent en deux catégories (von Stryk et Bulirsch, 1992) : les méthodes indirectes et les méthodes directes. Depuis l'ère des missions Apollo, leurs applications à la définition d'une trajectoire de lancement ont été largement étudiées (Chandler et Smith, 1967).

Les méthodes indirectes utilisent la théorie de la commande optimale (Bryson et Ho, 1969). L'utilisation de l'Hamiltonien et des paramètres de Kuhn-Tucker permet la

conversion d'un problème de minimisation contraint en un second système d'équations différentielles, le système adjoint, où les contraintes sont converties en conditions finales sur ce second système. Le problème devient alors une propagation, en sens direct, du système d'état et, en sens inverse, du système adjoint. Cependant, la résolution simultanée de ces deux propagations n'est possible que pour des cas simplifiés. Le principal avantage de ce type de méthode, en comparaison avec les méthodes directes, est que sa vitesse de convergence est meilleure lorsque la solution initiale est près de l'optimum. Cependant, l'obtention de cette solution initiale, principalement pour l'état du système adjoint, est une tâche ardue qui nécessite beaucoup de connaissances *a priori* de la trajectoire recherchée.

Des hypothèses très simplificatrices sont effectuées afin de permettre la résolution du problème aux deux bouts. Notamment Brown *et al.* (1969), Gath et Calise (2001), Dukeman (2005), Lu *et al.* (2008) et Su (2008) utilisent une approximation de la gravité proportionnelle à l'altitude. Cette approximation est réaliste sur de courts intervalles de temps, comme lors d'une résolution en boucle fermée, mais est loin d'être idéale pour la définition d'une trajectoire en boucle ouverte. Elle permet cependant l'obtention d'une solution analytique pour la propagation du système adjoint. Su (2008) approfondit la méthode en incluant les événements discrets dans la routine d'optimisation. Brown *et al.* (1969), Dukeman (2005) et Lu *et al.* (2008) ont plutôt étudié l'ajout d'étages supplémentaires. Pour définir une trajectoire endo-atmosphérique, Gath et Calise (2001) utilisent plutôt des termes d'homotopie sur les paramètres atmosphériques. D'autres auteurs, Bruschi (1974), Leung et Calise (1990) et Sinha et Shrivastava (1990), utilisent plutôt une gravité uniforme leur permettant d'obtenir une solution semi-analytique de la propagation directe du système d'état. Les trois travaux précédents se distinguent uniquement dans l'algorithme utilisé pour trouver le minimum du problème semi-analytique. Ainsi, puisqu'elles sont basées sur des simplifications, les méthodes indirectes produisent une trajectoire moins précise, mais elles se résolvent facilement et le passage vers une fonction de guidage en temps réel est presque immédiat. Ce type de méthode est d'ailleurs très similaire aux méthodes d'adaptation itérative utilisées pour effectuer le guidage en temps réel (chapitre 5). À l'opposé, plutôt que de simplifier le problème, Wirtham et Park (1995) profitent de la capacité de calcul et des possibilités de parallélisme disponible au sol pour résoudre le problème autour d'une Terre avec une gravité proportionnelle à l'inverse du carré de l'altitude.

Pour leur part, les méthodes directes sont basées sur la résolution du problème d'optimisation contraint. Pour y parvenir, les entrées du système et/ou ses états sont discrétisés et deviennent les inconnues du problème d'optimisation. Ce type de méthode a deux avantages majeurs sur le précédent. Il permet une résolution directe du système non-linéaire complet ne nécessitant aucune simplification. La validité de la solution

initiale est moins importante puisque la région d'attraction de ce type de méthode est plus large (Betts, 1998). Ceci diminue le besoin en connaissances *a priori* de la trajectoire. Cependant, lorsque les deux types de méthode convergent, cette dernière est plus lente que les méthodes indirectes. De plus, de par leur complexité algorithmique, ces méthodes peuvent difficilement être extrapolées vers une résolution en boucle fermée et en temps réel du problème.

La complexité permise par la résolution par méthode directe est utilisée à bon escient par la majorité des auteurs utilisant ce type de méthode. En effet, à l'exception de Estep *et al.* (2001) qui utilisent une gravité uniforme, plusieurs auteurs (Shaver et Hull, 1990; Roh et Kim, 2002; Karsli et Tekinalp, 2005; Chenglong *et al.*, 2008; Suresh *et al.*, 2009; Alonso Zotes et Santos Peñas, 2010) utilisent une modélisation plus précise de la gravité, par une approximation proportionnelle à l'inverse du carré de l'altitude. Adimurthy (1987) utilise même une approximation par l'harmonique zonal J2, modélisant l'aplatissement de la Terre. Outre Chenglong *et al.* (2008) qui utilisent une approximation constante entre les points de la discrétisation, tous les auteurs précédents utilisent une approximation linéaire entre les points de discrétisation. La différence majeure entre chacun des écrits réside dans la méthode d'optimisation, soit une méthode par éléments finis (Estep *et al.*, 2001), des algorithmes génétiques (Karsli et Tekinalp, 2005; Chenglong *et al.*, 2008; Suresh *et al.*, 2009; Alonso Zotes et Santos Peñas, 2010) ou des méthodes plus classiques de programmation séquentielle (Roh et Kim, 2002) ou de multiplicateurs de Lagrange (Adimurthy, 1987). Bien qu'elles ne soient pas directement utilisées dans le guidage d'un lanceur, les méthodes directes de définition de trajectoire sont un type de méthode à considérer dans les études pré-lancement. En effet, elles nécessitent moins de simplifications et de connaissances que les méthodes indirectes en plus de produire une trajectoire plus précise. Ainsi, la trajectoire obtenue suite à l'utilisation de ces méthodes est assez précise pour servir de base pour le développement des algorithmes de commande séquencés et pour servir de trajectoire de référence dans une fonction de guidage basée sur les techniques de suivi de trajectoire (chapitre 5).

Les écrits mentionnés précédemment, bien que différents sur la méthode, se rejoignent tous sur le critère à minimiser : la masse consommée. De plus, à l'exception de Adimurthy (1987), aucun ne tient compte de l'aplatissement de la Terre dans sa modélisation de la gravité. Pour la mission étudiée, dont la base de lancement est située à une latitude élevée, l'aplatissement aux pôles est significatif (Vachon *et al.*, 2011). Un second point faible commun à tous les écrits concerne le modèle utilisé. Tous, autant les méthodes directes que indirectes, utilisent la modélisation à trois degrés de liberté. Selon Zipfel (2007), la validation des algorithmes sur cette modélisation ne permet pas de les considérer valides sur le modèle réel à six degrés de liberté. L'utilisation du modèle à pseudo-5ddl présenté à la section 2.5 le permet cependant.

La solution proposée dans cette thèse est ainsi une méthode directe avec interpolation constante entre les instants de discrétisation. Le choix d'une méthode directe est majoritairement dicté par le peu de connaissance *a priori* de la trajectoire visée. Ainsi, la largeur de la zone d'attraction a prédominance sur la rapidité de convergence des méthodes indirectes. De plus, l'algorithme envisagé pour effectuer le guidage est un algorithme de suivi de trajectoire. La trajectoire à suivre se doit donc d'être précise. L'interpolation constante est choisie afin de pouvoir être importée directement dans la fonction de guidage basée sur la commande prédictive développée aux chapitres 5 et 7.

La suite de ce chapitre est divisée en trois parties. La section 3.1 est l'aparté sur le guidage endo-atmosphérique où la génération du point de sortie utilisée est rapidement présentée. La section 3.2 décrit la formulation du problème de définition de la phase exo-atmosphérique d'une trajectoire de lancement. La section 3.3 présente les résultats obtenus lorsque cette méthode est appliquée à la mission étudiée par ce projet (section 1.3).

## 3.1 Commentaires sur la partie endo-atmosphérique

La partie atmosphérique de la trajectoire d'un lanceur de satellite est traditionnellement effectuée en boucle ouverte par la manœuvre d'inclinaison gravitationnelle (Su, 2008). Cette manœuvre consiste à garder les angles aérodynamiques à  $0^\circ$  pour la majorité de la phase endo-atmosphérique. Elle minimise ainsi les contraintes sur le véhicule (flexion, aérodynamique). Cependant, l'utilisation d'un guidage en boucle ouverte ne permet pas de contrer les perturbations extérieures qui doivent alors être gérées dans la partie exo-atmosphérique guidée. L'utilisation d'un guidage en boucle fermée dans la phase atmosphérique n'apporte pas un gain significatif en performance (masse amenée en orbite) en comparaison avec un guidage en boucle ouverte dont l'attitude est optimisée pour tenir compte des contraintes (Hanson *et al.*, 1995). Ainsi, actuellement, dans le projet, le guidage en boucle ouverte est effectué en utilisant la technique de Di Sotto et Teofilatto (2002) décrite dans la prochaine section, mais l'étude de l'optimisation de la trajectoire endo-atmosphérique afin de tenir compte des contraintes de la trajectoire devrait permettre d'améliorer légèrement la masse mise en orbite.

### 3.1.1 Manœuvre d'inclinaison gravitationnelle

Cette manœuvre consiste à utiliser l'accélération gravitationnelle de la Terre pour diminuer l'inclinaison du vecteur vitesse (figure 3.1). Pour permettre cette diminution

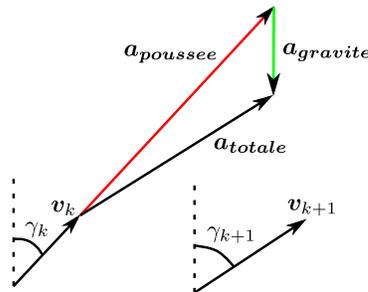


FIGURE 3.1 – Schématisation de la manœuvre d'inclinaison gravitationnelle

de l'inclinaison, le vecteur vitesse ne doit pas être vertical. L'inclinaison gravitationnelle est donc précédée d'une phase de courte durée où la poussée du lanceur est orientée afin d'incliner le lanceur. L'angle maximal donné au lanceur durant cette pré-manœuvre est très déterminant sur les paramètres orbitaux obtenus à la fin de la manœuvre d'inclinaison gravitationnelle. Une variation de quelques centièmes de degrés entraîne une différence de centaines de kilomètres sur le péri-gée de l'orbite au début de la phase exo-atmosphérique (Di Sotto et Teofilatto, 2002). Ainsi, la définition de cet angle devient prépondérante dans la définition de la trajectoire endo-atmosphérique et même dans l'orbite finale atteignable. Dans le cadre de ce projet, la méthode analytique proposée par Di Sotto et Teofilatto (2002) est utilisée sur le simulateur du RDDC afin de générer la trajectoire endo-atmosphérique (Duplain, 2012). L'application n'est pas présentée ici puisqu'elle a été effectuée et présentée dans Duplain (2012). Uniquement le point de sortie de l'atmosphère est repris. Ce point correspond à celui présenté au tableau 1.3.

La manœuvre d'inclinaison gravitationnelle est une manœuvre qui s'effectue uniquement dans le plan orbital. Celui-ci se doit donc d'être défini préalablement au lancement. Pour y parvenir, la trigonométrie sphérique du triangle de lancement (Sellers, 2005) permet d'obtenir une relation analytique, liant les paramètres orbitaux désirés au temps et au cap de lancement.

Cette manœuvre d'inclinaison gravitationnelle implantée pour générer le point de sortie ne tient pas compte de l'aplatissement de la Terre. Ainsi, bien qu'il soit connu (Sellers, 2005) que les manœuvres hors plan orbital sont coûteuses et diminuent de beaucoup la capacité du lanceur, le point de sortie obtenu précédemment nécessite des angles hors plan non nuls. L'algorithme de définition de trajectoire se doit ainsi d'être également en mesure de fonctionner lorsque le point de sortie ne se situe pas sur le plan orbital.

Ce chapitre présente donc l'algorithme nominal, sans manœuvre hors plan, et, à la section 3.2.2, un ajout est fait afin d'inclure le plan orbital. Ultimement, l'algorithme de définition de trajectoire complet, qui combinera cet algorithme avec une optimisation de la trajectoire endo-atmosphérique, devra prendre en compte l'aplatissement de la Terre dans l'atmosphère pour éliminer ces manœuvres hors plan.

Cette optimisation complète n'a pas été étudiée dans ce projet puisque, comme mentionné précédemment, elle nécessite l'utilisation d'un modèle de simulation plus complet que celui utilisé pour cette thèse. De plus, il semblait plus intéressant, pour le projet dans son ensemble, de développer un algorithme de guidage pouvant fonctionner en ligne plutôt que de se concentrer sur des études hors-ligne. Ainsi, à la fin de cette thèse, le projet de lanceur canadien disposera d'algorithmes de définition de trajectoire et de guidage pour la phase exo-atmosphérique plutôt qu'avoir uniquement un algorithme de définition de trajectoire sur toute la trajectoire. De plus, Duplain (2012) a effectué une partie de l'étude visant à trouver les orbites atteignables avec la configuration actuelle. Il suffirait donc de combiner ses travaux avec ceux-ci pour former une version complète d'un algorithme d'optimisation de la trajectoire de lancement.

## 3.2 Formulation du problème d'optimisation

Le problème de définition de la partie exo-atmosphérique d'une trajectoire de lancement consiste donc à calculer l'orientation du vecteur de poussée afin que le lanceur puisse atteindre l'orbite désirée tout en maximisant la capacité d'emport du lanceur. Il a déjà été mentionné au début de ce chapitre que, de par le peu de connaissances *a priori* disponibles sur la trajectoire recherchée et sur la configuration utilisée, une approche directe est à préconiser. De plus, cette approche permet l'utilisation d'une modélisation complexe permettant de générer une trajectoire plus précise et mieux adaptée à une technique de guidage basée sur le suivi de trajectoire (chapitres 5 et 7).

La précision d'une trajectoire de référence est majoritairement dictée par le niveau de représentativité du modèle servant à la générer. Dans le cas de la translation d'un lanceur, le chapitre 2 introduit la modélisation à pseudo-5ddl de la translation d'un lanceur autour d'une Terre en rotation dont l'approximation de son accélération gravitationnelle permet d'inclure les termes liés à son aplatissement. Ce modèle est, selon Zipfel (2007), assez précis pour valider une fonction de guidage. Le modèle servant à calculer la trajectoire est donc l'intégration numérique, par la méthode de Heun (Runge-Kutta d'ordre 2) (Moin, 2010) des équations (2.184).

Une approche directe est caractérisée par l'optimisation des valeurs, aux instants de discrétisation, de l'état et/ou de l'entrée du système. Dans la formulation développée pour ce projet, l'entrée du système, à savoir les angles d'orientation de la poussée commandés, est discrétisée et sa valeur à chaque instant de discrétisation devient donc les inconnues du problème d'optimisation résultant. Afin de pouvoir utiliser les résultats pour initialiser la fonction de guidage par commande prédictive développée plus tard, un bloqueur d'ordre zéro (interpolation constante) est choisi comme fonction d'interpolation entre les instants de discrétisation. Les angles d'orientation commandés peuvent ainsi être exprimés comme des fonctions temporelles en escalier :

$$\vartheta_{com}(t) = \begin{cases} \vartheta_{com_1} & t \in [t_{burn_0}, t_{burn_1}] \\ \vartheta_{com_2} & t \in ]t_{burn_1}, t_{burn_2}] \\ \vdots & \\ \vartheta_{com_n} & t \in ]t_{burn_{n-1}}, t_{burn_n}] \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\varphi_{com}(t) = \begin{cases} \varphi_{com_1} & t \in [t_{burn_0}, t_{burn_1}] \\ \varphi_{com_2} & t \in ]t_{burn_1}, t_{burn_2}] \\ \vdots & \\ \varphi_{com_n} & t \in ]t_{burn_{n-1}}, t_{burn_n}] \end{cases} \quad (3.2)$$

Cependant, pour la définition d'une trajectoire, si la latitude de lancement est inférieure à l'inclinaison orbitale visée, l'orientation du plan orbital s'obtient en sélectionnant le cap de lancement et en gardant les angles hors plan ( $\varphi_{com}$ ) nuls pour toute la durée du lancement (Sellers, 2005). Ceci est cohérent avec le fait que, pour minimiser la consommation de carburant, les manœuvres hors plan doivent être minimisées. Ainsi, pour la définition de trajectoire nominale, ces angles sont fixés à  $0^\circ$  et sont donc retirés des inconnues du problème.

### 3.2.1 Manœuvres dans le plan orbital

L'utilisation d'une méthode directe nécessite également la définition d'un critère d'optimisation utilisant les entrées du système et certains de ses paramètres. Le critère utilisé par la majorité des travaux cités précédemment consiste en une minimisation de la consommation de masse.

Le critère proposé dans cette thèse reprend le critère de minimisation de la consommation et ajoute des termes supplémentaires afin d'aider à la convergence de l'algo-

rithme et la validité des résultats :

$$\begin{aligned}
 J = & \zeta_1 \left( \sum_{l=1}^n (\vartheta_{com_l} - \vartheta_{com_{l+1}})^2 \right) \\
 & + \zeta_2 \left( \sum_{l=1}^n \Delta_m (t_{burn_{l+1}} - t_{burn_l}) \right) \\
 & + \zeta_3 \left( \sum_{l=2}^{n-1} \left( \frac{\tan(\gamma_{l+1} + \vartheta_{l+1}) - 2 \tan(\gamma_l + \vartheta_l) + \tan(\gamma_{l-1} + \vartheta_{l-1})}{(t_{burn_l} - t_{burn_{l+1}})^2} \right)^2 \right) \\
 & + \zeta_4 \left( \epsilon_a + \epsilon_p + \zeta_n \epsilon_i \right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où les variables  $\zeta$  sont des variables de pondération et les variables  $\epsilon$  sont les variables d'écart (Baldick, 2006).

Le premier terme du critère consiste à minimiser la différence entre la valeur de l'orientation de la poussée à deux instants successifs de discrétisation. Ce terme permet de lisser la courbe des entrées du système et, par le fait même, de lisser la trajectoire obtenue. Le lissage de la courbe des entrées diminue les manœuvres brusques minimisant l'effort des actionneurs des tuyères

Le second terme correspond au terme classique de minimisation de la masse consommée. Ce terme permet de maximiser la masse de la charge utile et donc la rentabilité du lanceur. En effet, la trajectoire obtenue est valide pour une masse maximale au lancement. Ainsi, toute diminution du carburant consommée peut être transférée sur la masse de la charge utile.

Lorsque la Terre est considérée plate et avec une accélération gravitationnelle uniforme, la tangente de l'angle de tangage optimal, celui utilisant le moins de carburant, est linéaire (voir la preuve à l'annexe F). La dérivée seconde d'une droite est nulle. Le troisième terme de l'équation (3.3) correspond à cette connaissance *a priori* sur l'orientation optimale recherchée. Il est l'approximation discrète de la seconde dérivée de la tangente de l'angle de tangage. Lorsque les angles hors plan sont nuls, l'angle de tangage est l'addition de l'inclinaison de la trajectoire avec l'angle d'orientation de la poussée dans le plan orbital (section 2.1.11). Avec le modèle proposé qui inclut l'aplatissement de la Terre, ce terme n'est pas nul, mais il permet d'orienter l'algorithme d'optimisation. Son effet est discuté plus en détail à la section des résultats (section 3.3).

Le quatrième terme est un terme classique en optimisation sous contraintes, il correspond aux variables d'écart (Baldick, 2006). Ce terme seul n'a pas de signification, il doit être utilisé en combinaison avec des contraintes. Une variable d'écart permet

de convertir une contrainte d'inégalité en la combinaison d'une contrainte d'égalité et d'une contrainte de non-négativité. Les variables d'écart deviennent alors la valeur satisfaisant la contrainte d'inégalité de base. Si le problème incluant une variable d'écart possède un minimum, ce minimum est également le minimum du problème initial (Baldick, 2006), à condition que la variable de pondération liée à la variable d'écart ( $\zeta_4$ ) soit assez élevée (Mukai et Polak, 1978). La variable d'écart peut également être vue comme un moyen de convertir une contrainte d'égalité stricte en une contrainte d'égalité relaxée qui peut être modifiée afin de résoudre le problème. Dans ce cas, la valeur de la variable d'écart correspond à la violation de la contrainte initiale. Cependant, comme mentionné précédemment, si le problème initial a une solution, le problème augmenté donnera la même solution, la variable d'écart sera ainsi nulle.

Dans le présent travail, cette deuxième utilisation est celle employée. Les contraintes d'égalité stricte sur l'orbite atteinte :

$$r_{ad} - r_{af} = 0 \quad (3.4)$$

$$r_{pd} - r_{pf} = 0 \quad (3.5)$$

$$i_d - i_f = 0 \quad (3.6)$$

peuvent être converties en contraintes d'inégalités :

$$0 \leq r_{ad} - r_{af} \leq 0 \quad (3.7)$$

$$0 \leq r_{pd} - r_{pf} \leq 0 \quad (3.8)$$

$$0 \leq i_d - i_f \leq 0 \quad (3.9)$$

Et, en utilisant les variables d'écart, ces équations sont reconverties en équations d'égalité relaxée :

$$\epsilon_a - (r_{ad} - r_{af}) = 0 \quad (3.10a)$$

$$(r_{ad} - r_{af}) - \epsilon_a = 0 \quad (3.10b)$$

$$\epsilon_a \geq 0 \quad (3.10c)$$

$$\epsilon_p - (r_{pd} - r_{pf}) = 0 \quad (3.10d)$$

$$(r_{pd} - r_{pf}) - \epsilon_p = 0 \quad (3.10e)$$

$$\epsilon_p \geq 0 \quad (3.10f)$$

$$\epsilon_i - (i_d - i_f) = 0 \quad (3.10g)$$

$$(i_d - i_f) - \epsilon_i = 0 \quad (3.10h)$$

$$\epsilon_i \geq 0 \quad (3.10i)$$

L'indice  $_d$  signifie que le paramètre orbital auquel il est lié est le paramètre désiré alors que l'indice  $_f$  est utilisé pour le paramètre orbital obtenu à la fin de l'intégration

numérique. Le rayon des apsides et de l'inclinaison sont dans des ordres de grandeur différents. Pour des raisons de stabilité numérique de l'algorithme d'optimisation, un facteur de normalisation peut être nécessaire pour uniformiser les ordres de grandeurs. Les équations (3.10) sont les contraintes finales du problème d'optimisation permettant de définir une trajectoire de lancement.

Les variables de pondération présentes dans le critère ont deux utilités. Premièrement, leur unité implicite permet la sommation des termes en uniformisant les unités de chacun. Cette utilité est purement conceptuelle, mais il convient de la mentionner notamment puisque ces unités implicites permettent de déterminer l'ordre de grandeur nominal de la valeur des variables. Dans le critère de l'équation (3.3), l'unité de la variable de pondération liée à la consommation de masse ( $\zeta_2$ ) est des  $kg^{-1}$  en comparaison avec les  $^{\circ-2}$  de la variable de pondération liée aux incréments de commandes ( $\zeta_1$ ) et les  $s^4$  de celle liée aux connaissances *a priori* ( $\zeta_3$ ). Ainsi, la valeur du terme multiplié par  $\zeta_2$  sera plus élevée que celle des autres termes et, afin de ne pas donner plus d'importance à la consommation, la variable de pondération  $\zeta_2$  doit être faible, en comparaison aux autres. Cette première utilité permet donc d'obtenir un ordre de grandeur nominal des variables de pondération. Par la suite, ces variables pourront être ajustées pour définir l'importance relative qui doit être accordée à chacun des termes. Notamment, les connaissances *a priori* n'ont pas de signification réelle dans le modèle de l'accélération gravitationnelle utilisée dans les équations du modèle. Elles servent uniquement à orienter l'optimisation (section 3.3) dans la bonne direction. La valeur de la variable de pondération  $\zeta_3$  se doit donc d'être petite pour diminuer l'importance de ce terme dans la solution. De plus, la variable de pondération liée aux variables d'écart ( $\zeta_4$ ), dont l'unité est des  $km^{-1}$ , doit être élevée afin de pénaliser les variations des variables d'écart et que l'orbite atteinte soit l'orbite désirée. Ceci est également cohérent avec l'énoncé que, pour assurer que les deux minimums soient les mêmes, cette pondération doit être élevée (Mukai et Polak, 1978).

La variable de conversion d'unité  $\zeta_n$  a la même utilité que les variables de pondération, mais limitée à l'intérieur du terme sur les variables d'écart. Elle permet de convertir l'unité d'angle en unité de distance, son unité implicite est donc des  $km/^{\circ}$ . Cependant, les variables d'écart doivent être du même ordre grandeur et avoir la même importance. Cette variable de conversion d'unité est donc uniquement conceptuelle, puisqu'elle prend une valeur unitaire.

Les deux précédents paragraphes discutant des valeurs de variables de pondération ne font que donner des idées pour orienter la recherche. Pour chaque configuration de lancement (point de sortie et orbite visée), la valeur de ces pondérations doit être étudiée puisqu'elles peuvent avoir des effets différents sur différentes trajectoires .

### 3.2.2 Manœuvres hors plan orbital

Dans la section précédente, les angles hors plan sont retirés des inconnues du problème en les forçant à être nuls sur toute la trajectoire. Bien que ceci soit optimal, une modification à l'algorithme de définition de trajectoire doit être effectuée pour que celui-ci puisse converger lorsque le point de sortie n'est pas optimal et que des manœuvres hors plan sont nécessaires pour rejoindre l'orbite. Principalement, dans le cas d'une fonction de guidage basée sur une technique de suivi de trajectoire, des trajectoires doivent être disponibles lorsque la phase atmosphérique a été perturbée et que le lanceur est sorti à un point différent de celui prédit. La présente section introduit ces quelques modifications permettant de rendre l'algorithme plus générique.

La première modification à effectuer dans la formulation du problème est de réintroduire les angles hors plan dans les variables à optimiser pour permettre que celles-ci ne soient pas nulles. La seconde modification concerne le critère à minimiser. Puisque des variables supplémentaires viennent d'être ajoutées aux variables d'optimisation, le critère doit être modifié pour tenir compte de ces dernières. Ces variables sont des angles discrétisés, comme les angles dans le plan, et dont des connaissances à priori existent. Ainsi, le critère de l'équation (3.3) est modifié pour introduire un terme sur les connaissances à priori et pour limiter les incréments de commande des angles hors plan commandés ( $\varphi_{com}$ ) :

$$\begin{aligned}
 J = & \zeta_1 \left( \sum_{l=1}^n (\vartheta_{com_l} - \vartheta_{com_{l+1}})^2 \right) \\
 & + \zeta_2 \left( \sum_{l=1}^n \Delta_m (t_{burn_{l+1}} - t_{burn_l}) \right) \\
 & + \zeta_3 \left( \sum_{l=2}^{n-1} \left( \frac{\tan(\theta_{l+1}) - 2 \tan(\theta_l) + \tan(\theta_{l-1}))}{(t_{burn_l} - t_{burn_{l+1}})^2} \right)^2 \right) \\
 & + \zeta_5 \left( \sum_{l=1}^n (\varphi_{com_l} - \varphi_{com_{l+1}})^2 \right) \\
 & + \zeta_6 \left( \sum_{l=1}^n (\varphi_{com_l} - 0)^2 \right) \\
 & + \zeta_4 \left( \epsilon_a + \epsilon_p + \zeta_n \epsilon_i \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Il a été admis que la trajectoire nominale optimale s'obtenait lorsque ces derniers étaient nuls. Ceci a été introduit dans les connaissances *a priori* des angles hors plan

(terme multiplié par  $\zeta_6$ ). Ce terme cherche donc à maintenir les angles hors plan le plus près possible de  $0^\circ$ .

Le terme sur les connaissances *a priori* des angles dans le plan doit également être modifié. Avec des angles hors plan possiblement non nuls, l'angle de tangage ne correspond pas uniquement à l'addition, comme précédemment des deux angles, mais l'équation (2.14) doit être utilisée.

Comme précédemment, la valeur des variables de pondération est définie en étudiant l'importance relative du terme multiplié et les unités implicites des variables. La variable  $\zeta_6$  liée aux connaissances *a priori* des angles hors plan, dont son unité implicite est  $^\circ^{-2}$ , doit être faible pour que ce terme serve uniquement à orienter l'optimisation. La variable de pondération  $\zeta_5$ , également en  $^\circ^{-2}$ , est similaire à la variable des incréments de commande des angles dans le plan. Cependant, une valeur légèrement plus élevée peut être utilisée afin de pénaliser plus fortement les variations et limiter les manœuvres hors plan.

Pour leur part, les contraintes ne sont pas modifiées puisque la version nominale inclut déjà l'inclinaison orbitale. L'inclinaison orbitale est incluse dans la version nominale afin de gérer l'aplatissement de la Terre. En effet, son inclusion dans la modélisation est tel que la durée du lancement et la valeur des angles dans le plan modifient la valeur de l'inclinaison orbitale.

### 3.3 Analyse de la formulation

La section précédente présentait deux formulations pour la définition d'une trajectoire de référence pour un lanceur de satellites. La première formulation (section 3.2.1) est valide uniquement lorsque l'inclinaison orbitale à l'éjection de la coiffe de protection thermique est telle que les manœuvres hors plan ne sont pas nécessaires, ce qui est le cas d'une trajectoire optimale. Cependant, pour les besoins de l'étude et pour des fins de généralités, la seconde formulation (section 3.2.2) inclut les manœuvres permettant de modifier le plan orbital. Cette inclusion est nécessaire puisque le point de sortie de l'atmosphère présenté dans le tableau 1.3 se situe sur une orbite légèrement moins inclinée que celle désirée. Cependant, afin de valider la formulation initiale, un point de sortie se situant sur le plan orbital désiré est nécessaire. Pour obtenir ce point, le logiciel commercial ASTOS<sup>®</sup> (Well *et al.*, 2008) est utilisé sur la configuration étudiée. Puisque ce logiciel avait déjà été utilisé pour valider la configuration, le point de sortie modifié était donc disponible. Ce point est présenté, en parallèle avec le point nominal,

dans le tableau 3.1.

paramètre	valeur modifiée	valeur nominale
temps [s]	170,8	170,8
masse [kg]	4854,2	4854,2
rayon [km]	6470,3	6474,6
vitesse [km/s]	2,47	2,75
inclinaison de la trajectoire [°]	33,28	28,48
cap [°]	-17,55	-17,11
latitude géocentrique [°]	59,8	59,71
longitude [°]	-94,4	-94,5

TABLEAU 3.1 – Modifications au point de sortie de l'atmosphère

Deux séries d'optimisation seront ainsi effectuées. La première (section 3.3.1) utilise le point de sortie modifié et évalue les performances de la formulation sans angle hors plan. Dans cette série d'optimisation, la formulation proposée est étudiée afin de valider son optimalité et, principalement, d'étudier l'effet de chacun des ajouts au critère à minimiser. La seconde série d'optimisation (section 3.3.2) utilise le point de sortie initial, celui nécessitant des angles hors plan. Cette formulation n'étant qu'une extension de la formulation précédente et dont l'utilité est moindre, les essais effectués se limitent à une vérification de la convergence et des résultats obtenus avec la formulation complète. D'autant que les termes ajoutés à la formulation ont un équivalent ayant la même utilité dans la formulation de base.

### 3.3.1 Résultats sans manœuvres hors plan orbital

Dans un premier temps, la valeur optimale des variables de pondération doit être obtenue. Pour y parvenir, des essais préliminaires ont été effectués en modifiant légèrement la valeur de chacune des variables autour de leur valeur initiale. Ces valeurs initiales sont obtenues en utilisant les énoncés de la section 3.2.1 où les unités implicites de chaque variable et les importances relatives des termes du critère sont discutées. Ces discussions permettent de donner l'ordre de grandeur des variables de pondération qui servent de valeurs initiales aux essais préliminaires. Ainsi, dans les analyses suivantes, les variables de pondération valent  $\zeta_1 = 7 \times 10^2$ ,  $\zeta_2 = 1 \times 10^{-2}$ ,  $\zeta_3 = 1 \times 10^1$  et  $\zeta_4 = 1 \times 10^5$ . Parmi les essais précédents, ces valeurs sont celles qui donnent les meilleurs résultats et qui serviront de base dans les analyses suivantes.

Un second paramètre important dans la formulation est la durée des paliers dans la discrétisation des angles d'orientations (équations (3.1) et (3.2)). Pour restreindre le nombre de possibilités et puisque son effet est faible sur la trajectoire (section 3.3.1.2), la durée de chaque intervalle est identique. Le nombre de paliers et donc le nombre d'inconnues du problème sont ainsi directement proportionnels à cette durée. Dans le cas de base, la durée des intervalles est de 4 s. Ce choix est celui qui (section 3.3.1.2) présente le meilleur compromis entre les performances et les propriétés de convergence de l'optimisation.

Le troisième paramètre définissant la formulation est le nombre de degrés de liberté du modèle des équations de translation. Son étude est effectuée à la section 3.3.1.3. Le cas de base est celui proposé par la formulation, à savoir l'utilisation du modèle à pseudo-5ddl.

Les formulations précédentes définissent un problème d'optimisation non-linéaire contraint. Les algorithmes et programmes permettant de résoudre ce type de problème sont nombreux et le choix de l'algorithme peut influencer le résultat obtenu, principalement lorsque le problème contient des minimums locaux et des contraintes non-linéaires. Pour la définition d'une trajectoire de référence, le logiciel choisi pour résoudre le problème d'optimisation est SNOPT<sup>®</sup> (Gill *et al.*, 1997). Ce logiciel d'optimisation s'interface facilement avec Matlab<sup>®</sup> qui est utilisé pour écrire le problème d'optimisation formulé à la section 3.2. De plus, l'algorithme d'optimisation implémenté dans ce logiciel permet de résoudre des problèmes à plusieurs inconnues et, principalement, il est très efficace pour des problèmes dont la variation du critère et des contraintes est monotone. Il semble donc, à première vue, être bien adapté à la formulation précédente.

### 3.3.1.1 Analyse des termes du critère

La première analyse effectuée sur la formulation concerne l'étude des termes du critère. Pour effectuer cette étude, chacun des trois termes est successivement éliminé du critère et une optimisation est effectuée. L'élimination d'un terme du critère s'effectue en annulant la variable de pondération qui lui est associée et en gardant toutes les autres à leur valeur de base. Les résultats de cette optimisation sont ensuite comparés à ceux du cas de base.

Ainsi, pour analyser l'effet du terme sur les incréments de commande, le terme  $\zeta_1$  est mis à 0 et les autres paramètres sont maintenus à leur valeur de base. La figure 3.2 présente l'angle dans le plan de l'orientation de la poussée obtenu pour chacun des paliers dans le cas de base et dans le cas où les incréments de commande sont enlevés

du critère d'optimisation.

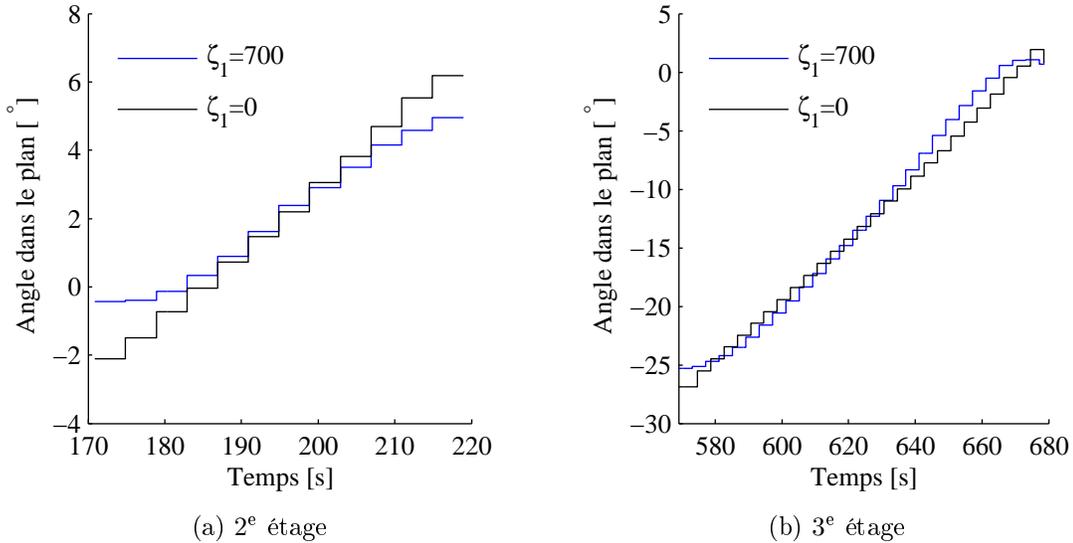


FIGURE 3.2 – Effet des incréments de commande

Ces deux optimisations convergent à l'orbite désirée. Cependant, le cas où la variable de pondération liée aux incréments de commande est nulle produit des angles d'orientation de la poussée plus actifs que le cas de base. Cette variation supplémentaire dans la valeur des angles se transforme en une trajectoire (vitesse et position) également plus variées et donc plus difficile à reproduire et à suivre.

Le second terme à étudier est le terme sur les connaissances *a priori*. Avec la modélisation utilisée pour l'accélération gravitationnelle, ce terme n'a pas de signification et d'effet directs sur les résultats finaux, il modifie plutôt le Jacobien et donc les propriétés de convergence de l'optimisation. En utilisant une approximation de la solution optimale, il permet d'orienter l'optimisation durant les premières itérations. Pour vérifier cet effet, la variable de pondération  $\zeta_3$  est annulée et deux optimisations sont effectuées. La première débute avec une supposition initiale près de la solution initiale et, dans la seconde, la supposition initiale est choisie loin de la solution optimale. Dans le cas où la supposition initiale est bonne, le terme de connaissances *a priori* accélère légèrement l'optimisation. Le temps de calcul de l'optimisation sans ce terme est 1,291 fois plus long que le cas de base. Lorsque l'estimation initiale de la solution est mauvaise, ce terme a un effet plus marqué. Il améliore la précision de l'orbite finale (tableau 3.2).

L'optimisation où l'estimation de la solution initiale est mauvaise permet également d'analyser l'effet des variables d'écart. Pour ce faire, la variable de pondération  $\zeta_4$  est annulée. L'élimination des variables d'écart du critère ne les élimine pas des contraintes,

mais fixe plutôt la largeur de la zone terminale autour de l'orbite désirée à la valeur donnée aux variables d'écart. Dans le cas étudié, la valeur des trois variables d'écart est fixée à  $1 \times 10^{-2}$ . Cette valeur permet d'avoir des contraintes d'inégalités, nécessaires à l'algorithme d'optimisation utilisé, mais dont la largeur est plus faible que ce qui est nécessaire pour considérer l'orbite atteinte.

Dans le cas où les variables d'écart et les connaissances *a priori* sont désactivées, l'optimisation diverge alors que les trois autres cas convergent sur des orbites de moindre précision. Il est ainsi possible d'affirmer que le terme sur les connaissances *a priori* améliore la convergence de la formulation. L'effet des variables d'écart s'étudie par deux comparaisons : la comparaison du cas de base avec le cas où uniquement les variables d'écart sont désactivées ; et la comparaison du cas où les variables d'écart et les connaissances *a priori* sont désactivées avec le cas où uniquement les connaissances *a priori* le sont. Dans les deux comparaisons, l'optimisation où les variables d'écart sont présentes donne une orbite plus près de celle recherchée que l'autre cas. Le cas où uniquement les connaissances *a priori* sont annulées montre aussi que, lorsque le problème est infaisable ou difficilement faisable, les variables d'écart prennent une valeur plus élevée pour assurer la convergence de l'optimisation. Dans ce cas, l'orbite obtenue n'est pas celle désirée, mais l'analyse des résultats permet d'effectuer, à partir d'une meilleure supposition initiale, une seconde optimisation et de possiblement obtenir l'orbite désirée à la suite de cette seconde optimisation.

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]
cas de base	6871,002	6870,998
$\zeta_3 = 0$ et $\zeta_4 = 1 \times 10^5$	6881,432	6851,663
$\zeta_3 = 1 \times 10^1$ et $\zeta_4 = 0$	6871,010	6870,990
$\zeta_3 = 0$ et $\zeta_4 = 0$	diverge	diverge

TABLEAU 3.2 – Orbites obtenues, à partir d'une mauvaise supposition initiale

Cette série d'optimisations permet de conclure que les termes ajoutés à la minimisation de la consommation améliorent les propriétés de convergence de l'algorithme d'optimisation et la précision de l'orbite obtenue. Le critère de l'optimisation tel que formulé dans l'équation (3.3) doit donc être considéré lors de la définition d'une trajectoire de lancement exo-atmosphérique.

### 3.3.1.2 Étude de la durée des paliers

La seconde analyse effectuée sur la formulation de la section 3.2.1 concerne la durée des paliers dans la discrétisation des angles d'orientation. Afin de limiter les possibilités, la durée de chaque palier est identique. Ainsi, en ayant la même durée et en utilisant une interpolation constante entre les instants de discrétisation, les orientations obtenues pourront ainsi servir de supposition initiale à la fonction de guidage basée sur la commande prédictive (chapitres 5 et 7). De plus, la durée des intervalles est inversement proportionnelle aux nombres d'inconnues du problème d'optimisation et à la fréquence de la loi de guidage. Par exemple, pour une durée de 10 s, les 48,2 s de la phase guidée du second étage sont séparées en 5 intervalles. Cependant, la durée de brûlage du troisième étage est optimisée. Ainsi, sa durée maximale (109,5 s) sert à définir le nombre de paliers, soit 11 paliers de 10 s. Advenant le cas où la durée optimale serait de moins que 100 s, la valeur du 11<sup>e</sup> palier n'influencerait pas les contraintes, mais uniquement le critère. Elle sera ainsi choisie, par l'algorithme d'optimisation, uniquement sur la base de la minimisation de la valeur du critère. L'analyse des résultats permettra de constater ce fait et d'éliminer le dernier palier des résultats présentés et utilisés dans la trajectoire. Pour les paliers de 10 s, l'optimisation aura donc 21 inconnues : les 5 valeurs de l'orientation de la poussée du second étage, l'orientation de la poussée pour les 11 paliers du troisième étage, la longueur de brûlage du troisième étage, la durée de la phase de dérive et les 3 variables d'écart. Le tableau 3.3 présente l'orbite atteinte et la masse de la charge utile obtenue pour quatre différentes durées des paliers.

Durée [s]	Nombre d'inconnues [—]	Rayon de l'apogée [km]	Rayon du périgée [km]	Masse de la charge utile [kg]
10	21	6871,001	6870,999	150,19
5	37	6871,004	6870,996	150,68
4	45	6871,002	6870,998	150,51
2	85	6871,002	6870,960	150,74

TABLEAU 3.3 – Résultats des optimisations avec différentes durées pour les paliers

Les résultats du tableau 3.3 démontrent que la diminution de la durée des paliers n'apporte que peu de gain dans les performances. Les différences dans la charge utile et de l'orbite atteintes sont négligeables. De plus, des problèmes de convergence peuvent survenir lorsque la durée des paliers est trop petite. Notamment, dans le cas présent, une durée de 1 s donne des variables d'écart supérieures à 0,5 et les durées inférieures ne convergent pas : les variables d'écart étaient supérieures à 1. Ces problèmes de convergence pourraient possiblement être résolus en utilisant un algorithme d'optimi-

sation différent. Malgré tout, puisque le gain en performance n'est pas significatif, ce changement d'algorithme n'est pas étudié.

La figure 3.3, présentant les angles d'orientation de la poussée, montre que la diminution de la durée des paliers présente un certain avantage. La variation des angles diminue avec la diminution de la durée des paliers. Cependant, la différence entre les cas n'est pas assez importante pour générer une trajectoire significativement différente. En effet, la figure 3.4 présente la différence entre la trajectoire à 4 s et les trois autres cas. Il est possible de constater que les différences sur la trajectoire sont faibles. Des variations brusques sont cependant présentes dans les courbes de 5 s et 10 s de la figure 3.4b. Ces variations s'expliquent par le fait que la durée des paliers n'est pas un multiple de celle du cas de base. Ainsi, les changements dans les angles commandés ne se produisent pas au même instant. Ces variations ne sont cependant visibles que sur la soustraction des courbes, la vitesse de déplacement des quatre cas est monotone et ne contient pas ces changements brusques.

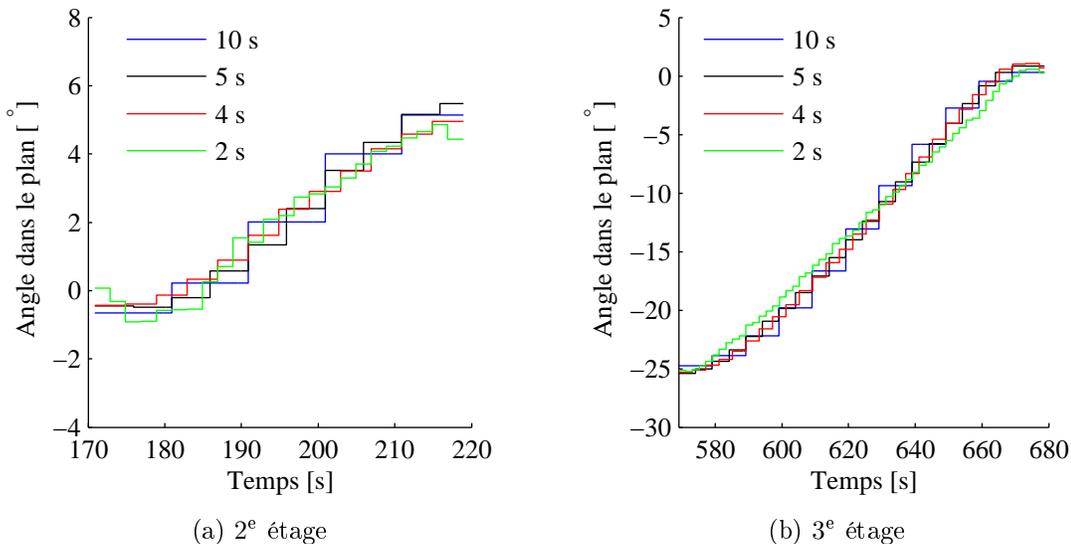


FIGURE 3.3 – Résultats des optimisations avec différentes durées pour les paliers

Ainsi, le choix d'utiliser une durée de 4 s dans le cas de base est justifié puisque le gain en performance provenant de la complexification du problème n'est pas significatif et que des problèmes de convergence peuvent survenir pour des durées plus faibles. En effet, la variable d'écart lié au rayon du périégée du cas à 2 s est de 0,04 (tableau 3.3). Cette valeur suggère que des problèmes de convergence commencent à survenir et que les résultats obtenus doivent être utilisés avec précautions.

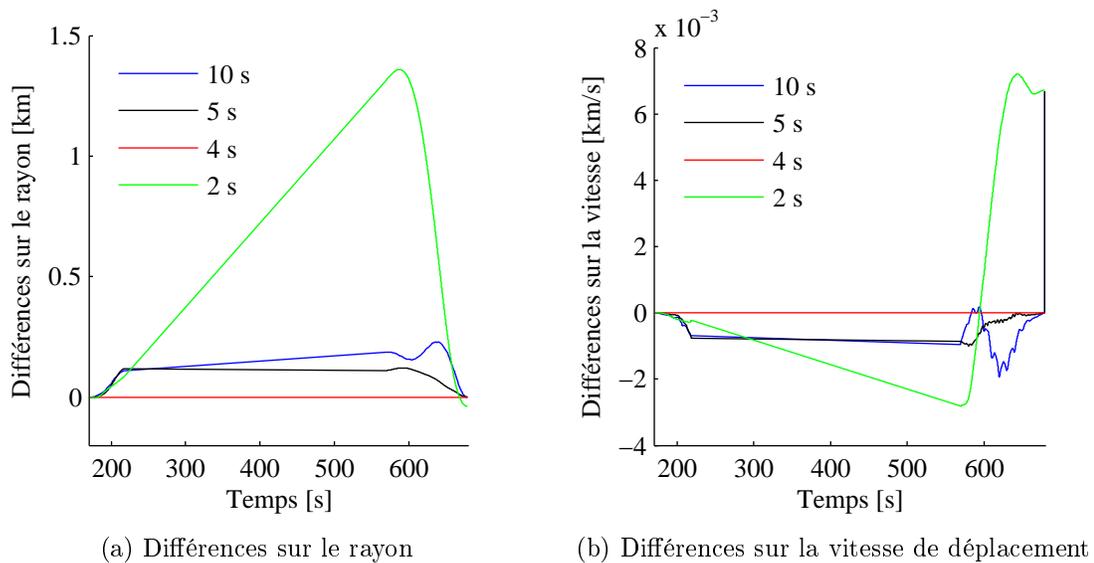


FIGURE 3.4 – Différences entre la trajectoire à 4 s et les trois autres

### 3.3.1.3 Effet du modèle à pseudo-5 degrés de liberté

Le dernier point à étudier dans la formulation concerne le modèle d'intégration numérique et, principalement, la nécessité d'utiliser un modèle à pseudo-5ddl. Pour effectuer cette vérification, une optimisation supplémentaire est effectuée. Cette optimisation a les mêmes paramètres que le cas de base, à la différence que le modèle utilisé dans l'intégration numérique est un modèle à 3ddl (équations (2.82)) plutôt que le modèle à pseudo-5ddl utilisé dans les essais précédents. Par la suite, les deux résultats obtenus, celui du cas de base à pseudo-5ddl et celui à 3ddl, sont introduits dans une simulation de lancement non perturbé où la fonction de guidage est en boucle ouverte. Ces simulations utilisent le modèle le plus précis disponible, à savoir le modèle à pseudo-5ddl avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (Moin, 2010) pour effectuer l'intégration numérique et une approximation de la gravité utilisant les harmoniques zonaux et tesseraux jusqu'au cinquième ordre. Le tableau 3.4 montre que, dans ce cas, l'orbite atteinte est significativement différente et que les résultats provenant du modèle à 3ddl donnent une orbite différente de celle désirée. Le demi-grand axe de cette orbite est similaire à celui désiré, mais l'excentricité de l'orbite est très différente, ceci est visible par la grande différence entre le rayon de l'apogée et celui du périégée.

Le modèle à pseudo-5ddl présente ainsi un intérêt non négligeable puisqu'il permet de mieux représenter la dynamique à 6ddl du lanceur sans réellement complexifier l'optimisation. Il permet d'inclure la dynamique de rotation dans le modèle de translation sans nécessiter le développement d'une fonction de commande et des équations de la dy-

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]
modèle à pseudo-5ddl	6871,111	6870,997
modèle à 3ddl	6892,189	6831,776

TABLEAU 3.4 – Comparaison des orbites en fonctions du modèle d'optimisation

namique de rotation. En effet, puisque le lanceur est un procédé instable (section 1.2), la définition d'une trajectoire utilisant le modèle complet à 6ddl nécessite une fonction de commande valide sur toute cette trajectoire, ce qui nécessite une certaine connaissance de la trajectoire. L'utilisation du pseudo-5ddl permet donc de générer une trajectoire utile à la création de la fonction de commande. Cette trajectoire pourra, si cela s'avère nécessaire, être recalculée en utilisant un modèle complet à 6ddl incluant la fonction de commande développée. L'optimisation de la phase atmosphérique, qui n'est pas traitée dans cette thèse, pourrait également s'effectuer à ce moment.

#### 3.3.1.4 Trajectoire de référence sans manœuvres hors plan

Dans les précédentes sections, la formulation du problème d'optimisation a été étudiée afin de mieux comprendre l'effet de chacun des paramètres et de définir la valeur à utiliser pour chacun de ceux-ci. Il s'avère que le cas de base choisi pour effectuer les comparaisons est celui dont la valeur des paramètres produit la meilleure trajectoire. Cette trajectoire est présentée à la figure 3.5 et correspond à la meilleure trajectoire obtenue pour le point de sortie modifié.

### 3.3.2 Résultats avec les manœuvres hors plan orbital

Pour les essais de la section 3.3.1, le point de sortie se trouve sur le plan orbital. Afin de pouvoir définir une trajectoire dans le cas où le point de sortie ne se situe pas sur le plan orbital, le critère de l'équation (3.11) doit être utilisé. Ceci est notamment le cas de cette étude où le point nominal, celui obtenu sur le simulateur du RDDC - Valcartier, est sur une orbite légèrement plus inclinée que celle désirée. Cependant, l'utilité de cette formulation n'est pas de définir la trajectoire de référence nominale, mais plutôt d'obtenir une banque de trajectoires de référence pour différents points de sortie se situant autour du point de sortie optimal, qui lui est dans plan orbital.

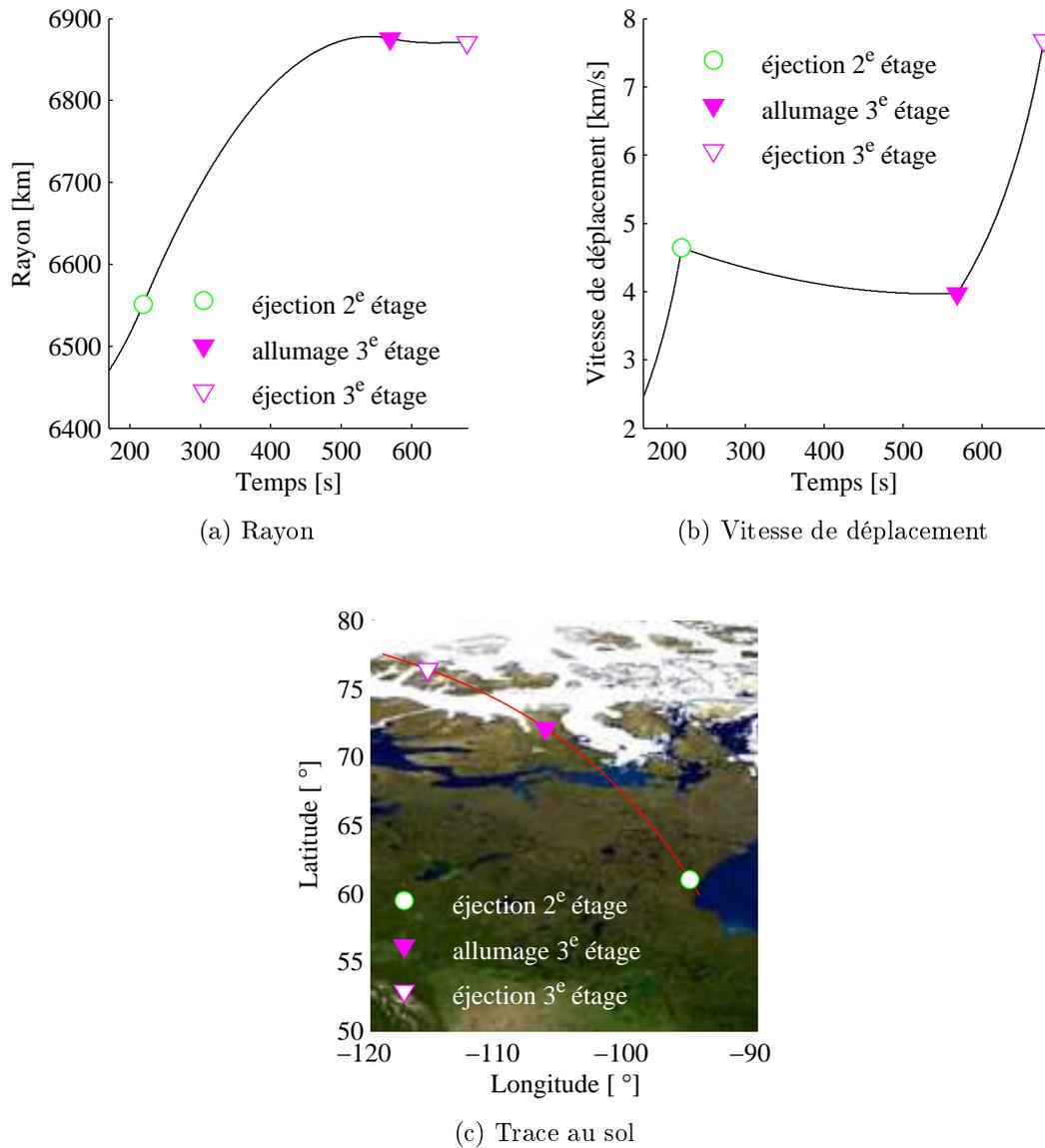


FIGURE 3.5 – Trajectoire de référence sans manœuvres hors plan orbital

La formulation incluant les manœuvres hors plan orbital n'étant qu'une extension de la formulation précédente, l'étude approfondie des paramètres, comme celle de la section 3.3.1, n'est pas nécessaire. Les résultats seraient identiques à ceux de cette dernière. De plus, les deux termes supplémentaires de la nouvelle formulation sont similaires à des termes de la formulation initiale dont l'effet a été étudié à la section 3.3.1.1. Le terme lié à la variable de pondération  $\zeta_5$  est un terme sur les incréments de commande. Son effet est donc identique à celui multiplié par la variable de pondération  $\zeta_1$ , à savoir une diminution de la variations des angles commandés calculés. De même, le terme sur les connaissances *a priori* hors plan, celui multiplié par  $\zeta_6$ , a le même effet, amélioration

des propriétés de convergence, que celui sur les connaissances *a priori* de l'angle dans le plan .

Cette section se résume donc à la présentation de la trajectoire de référence pour le point de sortie nominal (figure 3.6), à savoir celle qui sera utilisée dans les essais des fonctions de guidage. Le point de sortie utilisé pour générer cette trajectoire est sur une orbite de plus haute énergie que celui de la section précédente. La durée du brûlage du troisième étage de cette trajectoire est donc plus courte. Cette diminution de la durée se traduit par une augmentation de la charge utile qui peut peser jusqu'à 187,5 *kg* plutôt que 150 *kg* comme la configuration de base.

Les essais des fonctions de guidage s'effectueront à partir de ce point de sortie et utiliseront donc cette trajectoire comme trajectoire de référence. L'utilisation d'un point de sortie situé hors du plan orbital dans les essais des fonctions de guidage permet de tester directement la formulation complète des algorithmes. En effet, à la différence de l'algorithme de ce chapitre, les fonctions de guidage fonctionnent durant le lancement où les perturbations feront en sorte que le lanceur ne se retrouvera pas sur le plan orbital. La fonction de guidage nominale doit donc inclure, à la différence de l'algorithme de définition d'une trajectoire de référence, les manœuvres hors plan orbital.

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre a introduit deux formulations pour la définition d'une trajectoire exo-atmosphérique d'un lanceur de satellites. La première formulation concerne uniquement le problème lorsque le point de sortie se situe dans le plan orbital. Cette formulation a été décortiquée et l'effet de chacun des termes analysé. Ces analyses permettent notamment de montrer que les deux termes que cette formulation ajoute au critère classique de minimisation de la consommation, les incréments de commande et les connaissances *a priori*, permettent d'améliorer les propriétés de convergence de l'optimisation et de diminuer la variation dans les angles d'orientation de la poussée. De plus, l'utilisation des variables d'écart pour assouplir les contraintes permet d'améliorer la convergence de l'optimisation. Certes, avec les variables d'écart, l'orbite atteinte peut différer de l'orbite désirée, mais celle-ci demeure plus informative qu'une divergence de l'optimisation. Le troisième point que cette formulation introduit dans le calcul d'une trajectoire de lancement est l'utilisation d'un modèle à pseudo-5ddl qui, sans complexifier l'optimisation, permet d'améliorer significativement la validité du modèle.

La seconde formulation est l'extension de la précédente pour lui permettre de traiter

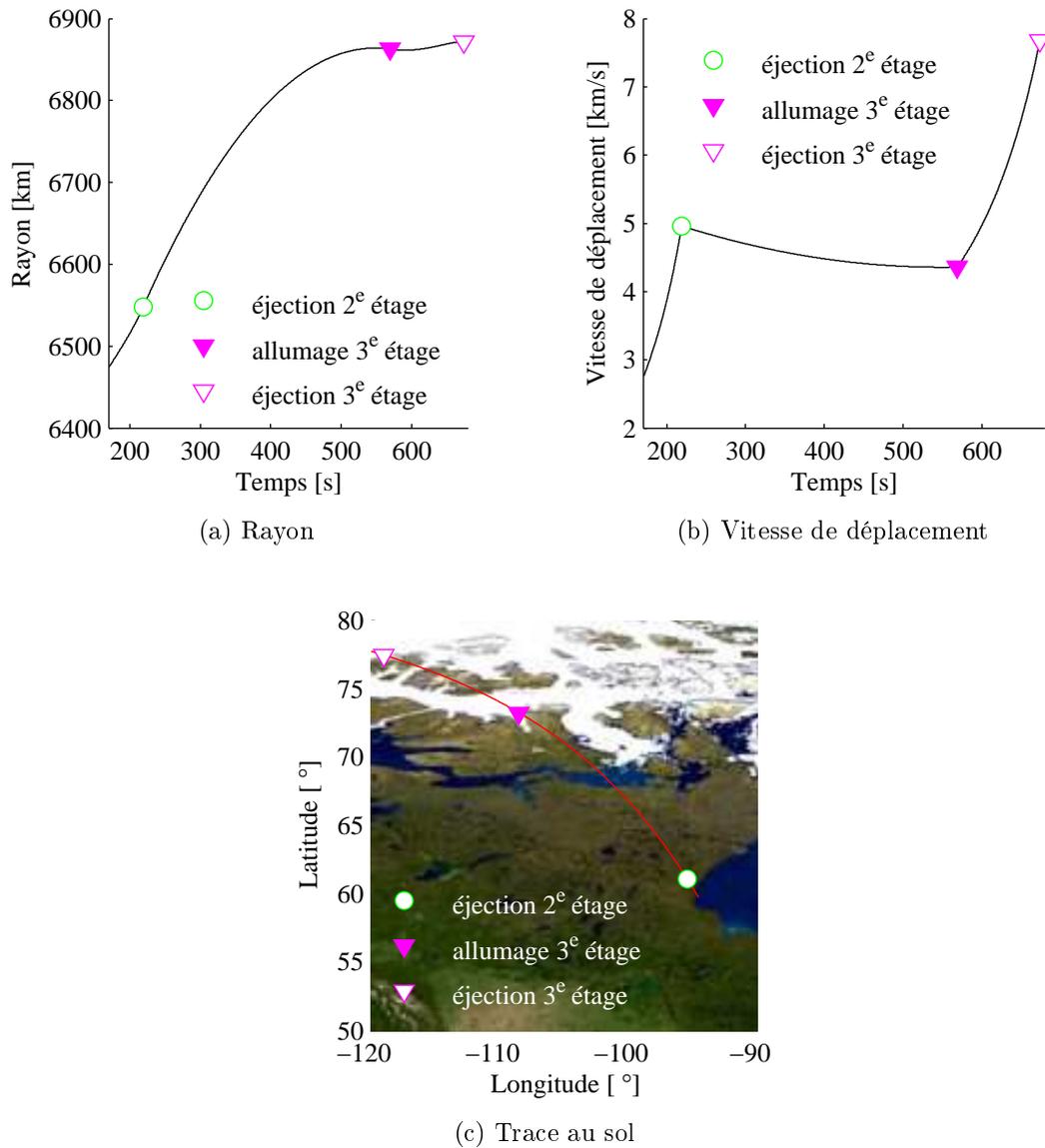


FIGURE 3.6 – Trajectoire de référence avec manœuvres hors plan orbital

le cas où le point de sortie ne se situe pas dans le plan orbital désiré. Cette extension se réalise par l'ajout, dans le critère, de deux termes pour gérer les angles d'orientation de la poussée hors plan orbital. Ces termes, similaires aux termes de la formulation de base, ont les mêmes effets sur les propriétés de convergence que ces derniers. Il convient cependant de mentionner que cette version modifiée sert à définir une banque de trajectoires dont les points de sortie diffèrent et se situent autour du point de sortie nominal. Dans la suite de cette thèse, la trajectoire obtenue à la section 3.3.2 sera utilisée comme trajectoire de référence dans les fonctions de guidage développées.

Tous les essais présentés dans ce chapitre sont effectués avec l'algorithme d'optimisation SNOPT<sup>®</sup>. Des essais avec la fonction *fmincon* de Matlab<sup>®</sup> ont aussi été réalisés puisque celle-ci est disponible à la fois à l'université et dans le milieu pratique, ce qui n'est pas le cas de SNOPT<sup>®</sup>. Cependant, le choix de ces algorithmes d'optimisation est principalement motivé par la facilité d'accès et d'utilisation de ceux-ci et non par leurs propriétés de convergence, bien que, selon Gill *et al.* (1997), l'algorithme dans le logiciel SNOPT<sup>®</sup> semble intéressant sur ce point également. Cependant, avant d'utiliser ces résultats, une étude approfondie portant sur l'algorithme en soi doit être effectuée afin de valider les résultats d'optimisation et de trouver l'algorithme d'optimisation le mieux adapté à la résolution de cette formulation. Ceci permettra notamment d'améliorer les propriétés de convergence et, possiblement, les résultats de la formulation.

# Chapitre 4

## Commande prédictive

Dans le chapitre précédent, la formulation d'un problème d'optimisation permettant d'obtenir une trajectoire de référence optimale est introduite. Cette trajectoire permet notamment d'orienter le développement des boucles de GNC du lanceur en fournissant des connaissances sur les points d'opération et sur les différents événements se produisant durant le lancement. Pour la fonction de guidage, elle définit une trajectoire de référence pour un guidage par suivi de trajectoire ou, pour une fonction de guidage basée sur la commande optimale, elle permet d'obtenir une bonne estimation initiale du vecteur adjoint. Comme mentionné au chapitre 1, ce projet utilise un guidage par suivi de trajectoire basé sur la commande prédictive. Ce choix est justifié au début du chapitre 5 alors que cette technique est comparée aux autres techniques présentes dans la littérature.

Le présent chapitre se veut une introduction à la théorie de la commande prédictive, largement couverte dans la littérature. Parmi les ouvrages traitant de ce sujet, ceux de Maciejowski (2002), de Kwon et Han (2005) et de Grüne et Pannek (2011) sont parmi les plus intéressants. Le premier, de par son approche pédagogique, permet de se familiariser avec la théorie et les concepts de ce type de commande. Le second, plus théorique et plus aride, contient les compléments mathématiques nécessaires à l'approfondissement de la méthodologie et à l'élaboration des preuves mathématiques de stabilité de l'algorithme. Le dernier traite uniquement de la commande prédictive non-linéaire (NMPC) qui, avec l'augmentation des capacités de calcul en-ligne, présente une voie intéressante pour la commande future de procédés non-linéaires.

En plus de ces livres, des publications scientifiques traitant de multiples sujets liés à la commande prédictive montrent la grande adaptabilité de ce type de commande. La commande de systèmes sous-actionnés (Pong *et al.*, 2011), la commande de système dont

le temps d'échantillonnage diffère entre les mesures (Cao *et al.*, 2000) ou la commande de système non-linéaire par un modèle à paramètres variants (Xu *et al.*, 2009) sont quelques exemples de ce large éventail. De plus, le champ d'application de cette commande est également très large. Principalement développée et utilisée dans l'industrie pétrochimique (Garcia *et al.*, 1989), elle est également utilisée en robotique (Caldeira et Fontes, 2007), en guidage de bateaux (Oh et Sun, 2010) et sous-marins (Caldwell *et al.*, 2006), pour le contrôle de l'attitude d'un satellite (Wen *et al.*, 1997) et pour le guidage, dans le plan orbital, d'un lanceur de satellite (Lu, 1996).

La section 4.1 présente les fondements théoriques et les principes de base de la commande prédictive. La formulation du problème d'optimisation résultant de l'application de cette méthode y est présentée. Puisque la stabilité d'une loi de commande est un point critique dans l'étude d'une méthode, la section 4.2 est spécifiquement dédiée à cette étude.

## 4.1 Fondements et principes

La commande prédictive est un mélange entre la commande et l'optimisation. Un problème d'optimisation est posé afin que le modèle de prédiction respecte les spécifications de commande. Le problème d'optimisation permet à la sortie prédite ( $\tilde{\mathbf{y}}$ ) de rejoindre la consigne ( $\mathbf{d}$ ) ou, du moins, à minimiser la différence entre les deux. La durée de la prédiction est de  $h_p$  pas de temps. La variable  $h_p$  est donc l'horizon de prédiction. Pour y parvenir, l'algorithme d'optimisation modifie la valeur des composantes du vecteur d'entrée du système ( $\mathbf{u}$ ) sur les  $h_c$  premiers pas de temps. Après ceux-ci, l'entrée demeure constante, d'où l'appellation horizon de commande pour la variable  $h_c$ . Dans un problème mono-entrée, le problème d'optimisation est composé de  $h_c$  inconnues.

Le problème est résolu en utilisant les mesures actuelles pour obtenir l'état initial du système. La première valeur du vecteur d'entrée optimal, celui correspondant à la solution de l'optimisation, est appliquée au système. Au pas de temps suivant, la réponse du système réel à cette entrée est mesurée et devient le nouvel état initial du modèle de prédiction et l'optimisation recommence. Ce procédé itératif, combiné à la stationnarité de l'horizon de prédiction, est tel que la fin de la prédiction se décale dans le temps (figure 4.1). Ce décalage explique le deuxième nom donné à la commande prédictive, à savoir la commande par horizon fuyant. Puisque, comme l'horizon terrestre, même en se déplaçant vers celui-ci, il demeure à la même distance.

Dans le cas d'un système et d'un modèle parfaits (aucunes perturbations externes

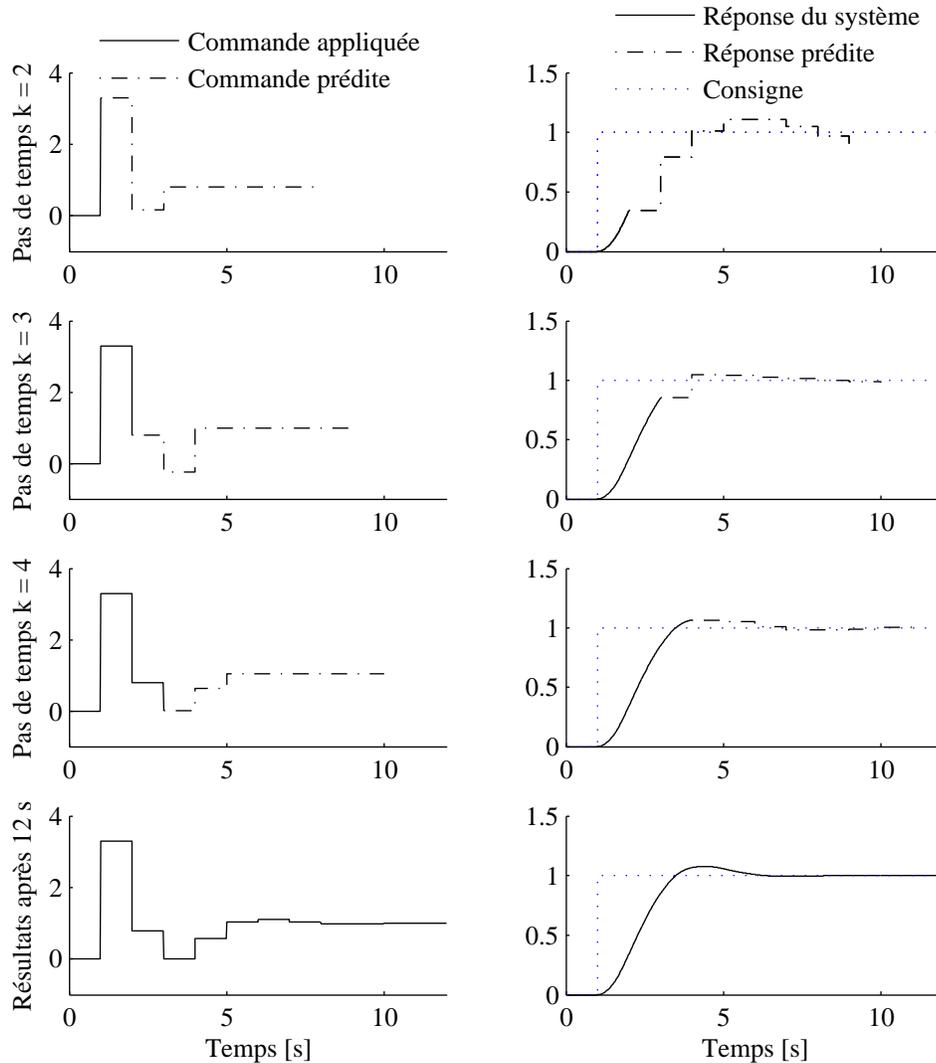


FIGURE 4.1 – Principe de l’horizon fuyant

ou erreurs de modélisation) et d’horizons infinis, il n’y a pas de différences entre la prédiction et le comportement réel du système (Morari et Lee, 1999). En opération réelle, la présence de perturbations externes et d’erreurs de modèle justifie la nécessité d’effectuer l’optimisation à chaque pas de temps afin d’éliminer leurs effets sur la sortie du système.

L’intérêt principal de la commande prédictive est probablement sa facilité d’utilisation pour des novices en commande. Les paramètres de réglage utilisent des concepts intuitifs facilement utilisables par un ingénieur n’ayant que peu de connaissances en commande pour rapidement obtenir un contrôleur de son procédé. Mais, à l’opposé, puisqu’elle aboutit à un problème d’optimisation, la commande prédictive permet de

complexifier la définition du contrôleur pour optimiser le fonctionnement du système. Notamment, elle prend en compte des contraintes dans la conception permettant ainsi d'opérer un système plus près de ses performances optimales (Maciejowski, 2002). De plus, lorsque les consignes futures sont connues, elles peuvent être incluses dans le contrôleur. Également, du point de vue d'un ingénieur en commande, un autre attrait majeur de la commande prédictive est la possibilité de facilement obtenir un contrôleur pour un système multivariable et non-linéaire. Cependant, l'attrait majeur de ce type de commande est la prise en compte de contraintes directement dans la conception du contrôleur. Ceci est possible puisqu'il s'obtient par la résolution d'un problème d'optimisation.

À l'opposé, la facilité d'adaptation de la commande prédictive à une multitude de cas est également son plus grand défaut. Pour pouvoir obtenir un contrôleur dans ces cas complexes, il faut résoudre un problème d'optimisation non-linéaire contraint à chaque pas de temps. La charge de calcul nécessaire est donc beaucoup plus importante que pour un contrôleur statique. Encore pire, l'optimisation peut ne pas converger vers la solution et donner un contrôleur sous-optimal voir même de diverger et ne pas donner de contrôleur. Ceci explique que la commande prédictive soit plus utilisée dans le contrôle de procédés que dans le contrôle de véhicules qui ont un temps de réponse beaucoup plus court (Maciejowski, 2002). De plus, dans ce type de commande, le modèle de la dynamique du système à contrôler est utilisé en ligne et non pas en uniquement en conception comme pour des commandes statiques. Finalement, bien que certaines garanties de robustesse (Park et Rhee, 2001) et preuves de stabilité (section 4.2) existent, celles-ci sont plus théoriques qu'applicables, complexifiant la certification d'un contrôleur MPC.

### 4.1.1 Formulation du problème de base

Comme mentionné précédemment, l'obtention d'un contrôleur basé sur la commande prédictive passe par la résolution d'un problème d'optimisation. La commande prédictive, de par sa formulation, est mieux adaptée à la commande de système discret bien que la commande de système continu soit également possible. C'est d'ailleurs une commande de ce type que Lu (1996) utilise pour effectuer le guidage d'un lanceur. Cependant, la formulation continue nécessite l'utilisation d'une intégrale et limite les possibilités puisqu'il faut simplifier le problème pour pouvoir le résoudre. Notamment, l'auteur précédent doit se restreindre à étudier le guidage dans le plan orbital.

Dans le présent projet, bien que le système et la modélisation (chapitre 2) soient continus, une formulation discrète est utilisée. Ainsi, la suite de ce chapitre se concentre

sur la présentation de cette formulation. De plus, en prenant un pas d'intégration suffisamment court, un système continu (équations (4.1) et (4.2)) peut être modélisé par un système discret.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (4.1)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{o}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) \quad (4.2)$$

En utilisant une méthode d'intégration numérique d'ordre 1 (de type Euler), les équations continues peuvent être modélisée par les équations discrètes suivantes :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{x}}_k + \Delta t \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) \quad (4.3)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{o}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (4.4)$$

Dans sa formulation de base, le problème d'optimisation de la commande prédictive minimise le carré de la différence entre les sorties prédites par le modèle et les consignes correspondantes. Un terme supplémentaire pondérant le carré des incréments de commande ( $\Delta \mathbf{u}_{k+l} = \mathbf{u}_{k+l} - \mathbf{u}_{k+l-1}$ ) est également présent dans le critère à minimiser. Ces deux termes sont respectivement pondérés par les matrices de pondérations  $\mathbf{Q}_l$  et  $\mathbf{R}_l$ . Le critère est ainsi :

$$J = \sum_{l=1}^{h_p} (\mathbf{d}_{k+l} - \tilde{\mathbf{y}}_{k+l})^T \mathbf{Q}_l (\mathbf{d}_{k+l} - \tilde{\mathbf{y}}_{k+l}) + \sum_{l=1}^{h_c} \Delta \mathbf{u}_{k+l-1}^T \mathbf{R}_l \Delta \mathbf{u}_{k+l-1} \quad (4.5)$$

Le problème d'optimisation de base contient également des contraintes sur les valeurs de l'état et de la commande :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{min} &\leq \tilde{\mathbf{x}}_{k+l} \leq \tilde{\mathbf{x}}_{max} && \forall l \in [1, h_p] \\ \mathbf{u}_{min} &\leq \mathbf{u}_{k+l} \leq \mathbf{u}_{max} && \forall l \in [1, h_c] \\ \Delta \mathbf{u}_{k+l} &= 0 && \forall l \in [h_c, h_p] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le problème d'optimisation défini par les équations (4.5) et (4.6) est un problème de base qui peut être modifié selon le procédé et les spécifications recherchées. Cette modification du problème peut prendre la forme de contraintes terminales, de contraintes supplémentaires sur le vecteur sortie ou sur les incréments de commande pour donner une forme prédéfinie à la commande. La modification peut également affecter le critère par exemple, en ajoutant la différence entre une commande de référence et la commande calculée ou des variables d'écart.

Le problème d'optimisation ainsi défini, un algorithme d'optimisation le résout à tous les pas de temps. Les mesures courantes permettent d'obtenir l'état initial du système qui est propagé, selon l'équation (4.3), et qui permet l'estimation de la sortie

(équation (4.4)). Avec cette estimation, l'algorithme calcule le critère et recherche, en modifiant la valeur des composantes du vecteur d'entrée, l'optimum du critère. Cet optimum trouvé, la première valeur du vecteur d'entrée ( $\hat{\mathbf{u}}_{k+1}$ ) est appliquée au système réel. Avec les prochaines mesures, le processus d'optimisation recommence. Ce processus itératif permet de commander le système en lui fournissant des commandes différentes selon la consigne appliquée.

Les mesures de l'état initial peuvent provenir de capteurs présents sur le système ou, lorsqu'un capteur n'est pas disponible, un observateur peut être implémenté afin d'obtenir la valeur de l'état. Le principe de séparation (Kuo et Golnaraghi, 2003) est alors applicable et le contrôleur peut être défini indépendamment de l'observateur.

## 4.2 Étude de la stabilité de la commande prédictive

Un système en boucle fermée est dit stable à un point si, lorsqu'il débute loin de ce point, il est possible de faire en sorte que le système revienne près de ce point pour toujours (Kwon et Han, 2005). Dans le cas d'une commande prédictive, cette stabilité passe par la monotonie du critère et par la faisabilité du problème d'optimisation (Kwon et Han, 2005).

Dans la littérature, il existe essentiellement trois formulations permettant d'assurer la monotonie du critère d'un problème par commande prédictive avec contraintes. La première formulation consiste à ajouter une contrainte terminale d'égalité qui force le dernier élément de la prédiction à se situer à la consigne (Keerthi et Gilbert, 1988). Cependant, l'ajout de contraintes d'égalité assure la non-croissance du critère, mais nuit à la deuxième condition de stabilité, à savoir la faisabilité du problème. En effet, les contraintes d'égalité, dans le cas non-linéaire principalement, sont difficiles à satisfaire. C'est de ce constat que la seconde formulation est née. Cette dernière consiste à diviser la zone d'opération en deux régions, d'où son nom de mode duel. Dans la première, loin du point de stabilité recherché, le contrôleur par commande prédictive est utilisé et, lorsque le système est suffisamment près du point de stabilité, un contrôleur statique ( $\mathbf{u}_k = \mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{y}_k)$ ) est utilisé. Cette deuxième zone est définie par un ensemble de contraintes terminales (Michalska et Mayne, 1993). Le troisième type de formulation est basé sensiblement sur le principe d'ajout d'un contrôleur statique lorsque le système entre dans une certaine zone autour du point recherché. Cependant, cette formulation, de par l'ajout d'un terme de pondération terminale dans le critère, rend ce contrôleur statique virtuel (jamais réellement implanté) et fait tendre le problème d'horizon de prédiction fini vers un problème à horizon infini. L'idée de faire tendre l'horizon

de prédiction vers l'infini est qu'il existe toujours un horizon fini pour lequel la commande prédictive stabilise le système non-linéaire et ce, sans l'ajout de contraintes ou de pondérations (Jadbabaie et Hauser, 2005).

La formulation utilisée dans les fonctions de guidage développées dans les chapitres 5 et 7 utilisent la formulation par mode duel. Ainsi, uniquement la preuve de la stabilité de cette formulation est présentée. De plus, aux fin de simplicité, uniquement la représentation discrète linéaire est utilisée. Les preuves pour les autres formulations et représentations, notamment le cas non-linéaire discret des chapitres suivants, se retrouvent dans Kwon et Han (2005), Bouchard (2007) et Grüne et Pannek (2011). Ces preuves sont basées sur un principe identique à la section 4.2.1, mais, puisqu'elles traitent de problèmes non-linéaires et continus, elles utilisent des notions mathématiques différentes qui complexifient la compréhension et alourdissent la présentation. Cette section étant un ajout permettant de mieux comprendre la théorie, la présentation de la preuve pour le cas linéaire discret est la mieux adaptée.

Les formulations précédentes assurant la monotonie du critère nuisent cependant à la seconde condition nécessaire pour assurer la stabilité. Cette condition est la faisabilité du problème d'optimisation résultant. L'ajout de contraintes sur l'état terminal et, de par l'utilisation d'horizons finis, la nécessité de devoir respecter ces contraintes dans une durée restreinte rendent les propriétés de convergence de l'optimisation plus difficiles à prouver (Pong *et al.*, 2011). Des preuves sur la convergence des algorithmes d'optimisation existent (Hillier et Lieberman, 2010), mais puisqu'elles concernent majoritairement des problèmes d'optimisation quadratiques ou convexes, elles se situent à l'extérieur du champ d'intérêt de ce projet. Dans la suite, les discussions sur la stabilité de la commande prédictive assument donc la convergence de l'optimisation.

### 4.2.1 Preuve de la stabilité du mode duel

Cette section présente la preuve de la stabilité de la commande prédictive par mode duel. Cette preuve est divisée en deux parties. La première partie traite du contrôleur statique linéaire et la seconde de la partie prédictive de la formulation. Cette preuve est basée sur l'hypothèse que le modèle linéaire utilisé dans la conception représente parfaitement le système et sur le fait que le problème d'optimisation résultant est faisable.

### Stabilité du contrôleur local

Le but est de développer un contrôleur statique qui permet à l'état du système en boucle fermée de demeurer à l'intérieur de l'ellipsoïde  $\Lambda$  définissant la zone terminale :

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{x} \in \Re \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \leq \iota \right\} \quad (4.7)$$

Comme mentionné précédemment, un contrôleur statique du type  $\mathbf{u}_k = \mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{y}_k)$  est utilisé. Dans la suite de la preuve, pour fin de lisibilité, le point d'équilibre ( $x_e$ ) utilisé sera l'origine, la consigne sera nulle et tous les états mesurés.

**Théorème 1.** (Marquez (2003) (théorème 4.11, p. 132)) Pour un système à temps discret, si, dans le voisinage du point d'équilibre  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , il existe une fonction  $V(x_k, k)$  tel que :

1.  $V(x_k, k)$  est définie positive et décroissante ;
2.  $V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k)$  est définie négative.

Le point d'équilibre est uniformément asymptotiquement stable, au sens de Lyapunov.

*Démonstration.* Pour prouver la stabilité, il faut donc trouver une fonction  $V(x_k, k)$  qui permet de respecter ces deux conditions. Un choix intéressant de fonction est la norme 2 pondérée de l'état :

$$V(x_k, k) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x} \quad (4.8)$$

Pour être définie positive, une fonction doit être nulle lorsqu'évaluée au point d'équilibre et doit être bornée inférieurement par une fonction  $V_l$ , indépendante du temps, définie positive. Et, pour être décroissante, une fonction doit être bornée supérieurement par une fonction  $V_u$ , indépendante du temps, définie positive. C'est donc dire que la fonction (4.8) doit être nulle pour  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et respecter les inégalités :

$$V_l(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x} \leq V_u(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

L'équation (4.8) est bien définie positive et croissante. Lorsqu'évaluée à  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , elle est nulle. Étant une fonction quadratique, elle est toujours supérieure ou égale à 0 et, de par la définition de l'ellipsoïde  $\Lambda$  (équation (4.7)), elle est toujours inférieure à  $\iota$ .

Il faut maintenant démontrer que cette fonction respecte la seconde condition, à savoir que son taux de variation est défini négatif. Pour être défini négatif, il faut que le taux de variation soit nul lorsqu'évalué à  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et borné supérieurement par une fonction  $V_u$ , indépendante du temps, définie négative. Le taux de variation est :

$$V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k) = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_k \quad (4.10)$$

L'équation d'évolution de l'état d'un système discret commandé par le contrôleur statique linéaire  $\mathbf{K}$  vaut :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}_k) \quad (4.11)$$

L'équation (4.10) devient donc :

$$V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k) = (\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_k \quad (4.12)$$

$$= \mathbf{x}_k^T \left( (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) - \mathbf{Q}_f \right) \mathbf{x}_k \quad (4.13)$$

Ceci est la norme 2 pondérée de  $\mathbf{x}_k$ . Si la pondération est toujours négative, la fonction constante nulle est une borne supérieure :

$$\mathbf{x}_k^T \left( (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) - \mathbf{Q}_f \right) \mathbf{x}_k \leq 0 \quad (4.14)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) - \mathbf{Q}_f \leq 0 \quad (4.15)$$

Ainsi, le contrôleur  $\mathbf{K}$  doit être choisi afin de respecter cette inégalité pour que le système soit stable en boucle fermée à l'intérieur de la région définie par l'équation (4.7). Ceci est équivalent à choisir le contrôleur tel que les valeurs propres du système en boucle fermée soient à l'intérieur du cercle unitaire. Ceci correspond à la condition de stabilité d'un système discret (Kuo et Golnaraghi, 2003). Avec un choix cohérent du contrôleur  $\mathbf{K}$ , le taux de variation de l'équation (4.8) est défini négatif.  $\square$

### Monotonicité du critère

La deuxième partie de la preuve consiste à démontrer que le critère n'augmente pas avec le temps. Le problème d'optimisation étant faisable, une solution au temps  $k-1$  existe. Cette solution est composée de la matrice des vecteurs d'entrée  $\mathbf{U}_{k-1} = \left[ \hat{\mathbf{u}}_{k-1|k-1} \quad \hat{\mathbf{u}}_{k|k-1} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{u}}_{h_{p_{k-1}}-1|k-1} \right]^T$  et de l'horizon de prédiction  $h_{p_{k-1}}$ . Au temps  $k$ , si l'état actuel n'est pas dans la zone terminale, l'optimisation est calculée et le critère de la solution obtenue ( $\mathbf{U}_k, h_{p_k}$ ) sera au pire égal à celui qui serait obtenu en utilisant les résultats du pas de temps précédent :

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) \leq J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_{k|k-1}, h_{p_{k-1}} - 1) \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{U}_{k|k-1}$  est contient les éléments de la matrice  $\mathbf{U}_{k-1}$  utilisés après  $k$  soit  $\mathbf{U}_{k|k-1} = \left[ \hat{\mathbf{u}}_{k|k-1} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{u}}_{h_{p_{k-1}}-1|k-1} \right]^T$ . Cette inégalité est valide puisque, l'étude se limite au cas nominal. Le modèle de prédiction représente donc parfaitement le système réel ( $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{x}_k$ ).

**Théorème 2.** (Kwon et Han (2005) (théorème 6.5, p. 276)) *En supposant le système linéaire discret stabilisable, alors, pour un horizon de prédiction plus long que un, il existe une solution  $\mathbf{U}_k$  et  $h_{p_k}$  tel que l'inégalité suivante est respectée :*

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) \leq J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_{k|k-1}, h_{p_{k-1}} - 1) \quad (4.17)$$

et il existe une constante  $0 < \rho < \infty$  qui satisfait :

$$J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1}, h_{p_{k+1}}) \leq J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) - \rho \quad (4.18)$$

pour tous les  $k$  tel que  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{x}_{k+1}$  sont à l'intérieur de  $\Lambda$ .

*Démonstration.* La première condition est identique à l'équation (4.16). Ainsi, la trajectoire de  $k+1$  à  $h_{p_k}$  obtenue lorsque  $\mathbf{U}_k$  est appliquée est la même que lorsque l'on applique  $\mathbf{U}_{k+1}$ . La différence entre le critère obtenu lors de l'optimisation à  $k$  et celui obtenu lorsque l'on applique  $\mathbf{U}_{k+1|k}$  à  $k-1$  est donc la prédiction au temps  $k+1$  et la commande au temps  $k$ .

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) - J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1|k}, h_{p_{k+1}}) = \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} + \hat{u}_k^T \mathbf{R} \hat{u}_k \quad (4.19)$$

Le terme sur la commande au temps  $k$  étant positif et le modèle de prédiction parfait, l'équation précédente est transformé en l'inégalité :

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) - J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1|k}, h_{p_{k+1}}) \geq \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+1} \quad (4.20)$$

Le terme de droite de cette équation peut être explicité comme étant :

$$\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1} \quad (4.21)$$

Puisqu'elle correspond au gain minimal de la matrice, la valeur singulière minimale de la matrice de pondération  $\mathbf{Q}$  ( $\sigma_{\min}(\mathbf{Q})$ ) permet de borner le terme de prédiction au temps  $k+1$  (Bouchard, 2007) :

$$\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+1} \geq \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1} \sigma_{\min}(\mathbf{Q}) \quad (4.22)$$

De même, la valeur singulière maximale de  $\mathbf{Q}_f$  permet également de borner la valeur maximale de  $\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1}$ . De plus, selon la définition de l'ellipsoïde  $\Lambda$  (équation (4.7)), cette valeur maximale de  $\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1}$  est  $\iota$ . Ainsi :

$$\iota \leq \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1} \sigma_{\max}(\mathbf{Q}_f) \quad (4.23)$$

Cette dernière relation peut se réécrire :

$$\frac{\iota}{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1} \sigma_{\max}(\mathbf{Q}_f)} \leq 1 = \frac{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{k+1}} \quad (4.24)$$

En introduisant ces trois derniers résultats (équations (4.21), (4.22) et (4.24)) dans l'inégalité (4.20), celle-ci devient :

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) - J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1|k}, h_{p_{k+1}}) \geq \frac{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1} \sigma_{\min}(\mathbf{Q})}{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1} \sigma_{\max}(\mathbf{Q}_f)} \iota \quad (4.25)$$

$$= \frac{\sigma_{\min}(\mathbf{Q})}{\sigma_{\max}(\mathbf{Q}_f)} \iota = \rho \quad (4.26)$$

Ainsi, pour tout  $k$  tel que  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{x}_{k+1}$  sont à l'intérieur de  $\Lambda$  :

$$J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1}, h_{p_{k+1}}) \leq J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) - \rho \quad (4.27)$$

□

Il reste maintenant à prouver le théorème qui définit la stabilité asymptotique de la commande prédictive par mode duel.

**Théorème 3.** (*Kwon et Han (2005) (théorème 6.6, p. 277)*) *La commande prédictive par mode duel est asymptotiquement stabilisante, avec une région d'attraction  $\Lambda_p$ . Pour tout  $\mathbf{x}_0 \in \Lambda_p$ , il existe un temps fini  $\hat{h}_p$  tel que  $\mathbf{x}_{\hat{h}_p} \in \Lambda$*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème s'obtient par un raisonnement par l'absurde. Celui-ci est basé sur la situation inverse, c'est-à-dire où il n'y aurait pas de temps  $k$  tel que l'état est à l'intérieur de l'ellipsoïde ( $\mathbf{x}_k \in \Lambda$ ), que l'état ne s'en approche pas :

$$J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1}, h_{p_{k+1}}) \geq J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) \quad (4.28)$$

De plus, de par le théorème 2, il existe une constante  $0 < \rho < \infty$  tel que :

$$J(\mathbf{x}_{k+1}, k+1, \mathbf{U}_{k+1}, h_{p_{k+1}}) \leq J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) - \rho \quad (4.29)$$

Pour respecter ces deux conditions, il faudrait que :

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) < 0 \quad (4.30)$$

pour certains  $k$ . Ce qui contredit le fait que le critère est toujours positif :

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) \geq 0 \quad (4.31)$$

Ainsi, il doit exister un temps fini  $k$  tel que  $\mathbf{x}_k \in \Lambda$ . Cette condition vérifiée, l'état approche l'équilibre par l'utilisation du contrôleur statique linéaire  $\mathbf{K}$  de la partie précédente. □

L'hypothèse fondamentale sur laquelle repose la preuve précédente est que le modèle utilisé représente parfaitement le système réel. Pour des applications réelles, cette hypothèse n'est cependant jamais rencontrée. La vérification de la stabilité d'une commande prédictive peut alors s'effectuer par des simulations et étude de type Monte-Carlo. Dans ce cas, le réglage des paramètres de la commande prédictive devient plus important. Il doit être effectué afin de respecter les spécifications recherchées. Ce réglage consiste à

définir le problème d'optimisation à résoudre à chaque pas de temps. Ce problème peut être aussi simple que le problème de base de la section 4.1.1, mais il peut également être beaucoup plus complexe où à la fois le critère et les contraintes sont modifiés afin de mieux répondre au cahier des charges, notamment par l'ajout d'une action intégrale dans le contrôleur. Dans les deux cas, après avoir défini le problème d'optimisation, les performances et la robustesse désirées s'obtiennent par le réglage des horizons et des matrices de pondération. Il n'existe malheureusement pas de relation directe entre la valeur des paramètres et les performances obtenues. L'obtention des meilleurs paramètres de réglage passe par l'expérience et le savoir-faire de l'ingénieur et par des itérations d'essais-erreurs. Certaines règles de bases et analyses de l'influence des paramètres peuvent cependant donner une idée de ces valeurs optimales (Desbiens *et al.*, 2000).

### 4.3 Conclusion

Ce court chapitre a présenté une introduction à la théorie de la commande prédictive. La formulation de base de la commande prédictive, qui fonctionne très bien dans la majorité des cas, est introduite. Par la suite, une discussion sur une modification de cette formulation pour assurer la stabilité de la boucle fermée est présentée. Cette modification consiste à diviser la zone d'opération en deux régions bornées par un ellipsoïde autour du point d'équilibre. Lorsque l'état actuel est à l'extérieur de l'ellipsoïde, la commande prédictive est utilisée et, lorsque l'état est dans la région autour du point d'équilibre, un contrôleur statique est utilisé. La preuve de la stabilité présentée dans ce chapitre repose sur la démonstration que le contrôleur stabilise le système à l'intérieur de l'ellipsoïde et que, de par l'ajout de contraintes faisables, la commande prédictive assure que l'état se rende, en un temps fini, dans cette région où la stabilité est assurée. Dans les prochains chapitres, une loi de guidage basée sur le suivi de trajectoire par commande prédictive est développée. Cette loi de guidage utilise le principe de commande prédictive non-linéaire par mode duel.

Bien que la suite du travail utilise un modèle non-linéaire, ce chapitre s'est concentré sur la formulation discrète linéaire de la commande prédictive. Principalement, car cette formulation est plus concise et simple à écrire et à comprendre que la formulation non-linéaire. Cette dernière est très analogue, l'unique différence se situe dans le modèle de prédiction qui devient non-linéaire. Le livre de Grüne et Pannek (2011) est entièrement consacré à la commande prédictive non-linéaire.

Parmi les limitations à l'application de la commande prédictive, le temps de calcul

nécessaire à l'obtention d'une solution est certainement la plus contraignante. Ceci est particulièrement vrai pour l'application de la commande prédictive non-linéaire sur un système à dynamique rapide comme le guidage d'un lanceur. Ainsi, dans la suite de ce projet, le temps de calcul doit être étudié. Cependant, puisque la fonction *fmincon* de Matlab<sup>®</sup> est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation, le temps de calcul réel sur le calculateur embarqué ne pourra être étudié. Advenant le cas où la commande prédictive est implémentée sur le calculateur embarqué, une étude plus approfondie de l'algorithme d'optimisation et de l'implémentation devra être entreprise afin de limiter le risque de dépassement du temps octroyé à la résolution de la fonction de guidage.

# Chapitre 5

## Guidage basé sur la commande prédictive non-linéaire

Dans l'étude de la trajectographie d'un lanceur, la suite à l'obtention d'une trajectoire de référence (chapitre 3) est le passage vers une résolution boucle fermée et en temps réel du problème de définition de trajectoire. La fonction de guidage (section 1.2) développée dans ce chapitre doit être en mesure de corriger les perturbations qui surviennent lors du lancement assurant ainsi l'injection sur l'orbite désirée. L'algorithme doit également être assez rapide et léger pour s'insérer dans la capacité de calcul embarqué du lanceur.

Pour réaliser un tel algorithme, il existe deux stratégies principales. La première consiste à utiliser une trajectoire de référence, comme celle obtenue au chapitre 3, et s'assurer que le lanceur suive cette trajectoire (figure 5.1a). La seconde stratégie consiste à recalculer une nouvelle trajectoire à chaque itération (figure 5.1b).

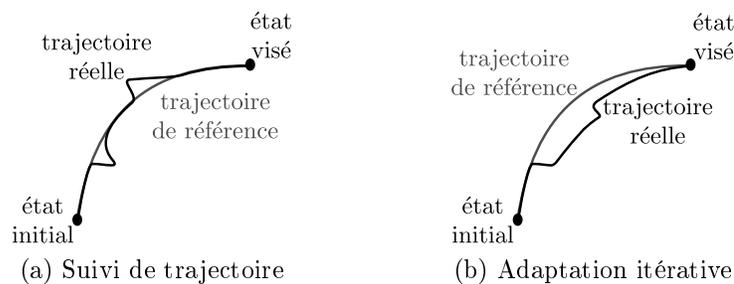


FIGURE 5.1 – Stratégies de guidage

Dans la stratégie de suivi d'une trajectoire, la fonction de guidage modifie l'orientation du vecteur de poussée afin que le lanceur rejoigne la consigne (la trajectoire

de référence) que les connaissances *a priori* lui fournissent. Pour sa part, la stratégie d'adaptation itérative s'apparente plutôt à la définition d'une trajectoire de référence où l'algorithme résout un problème aux deux bouts sur un modèle simple.

Il convient de mentionner que, comme pour la définition d'une trajectoire de référence, uniquement la trajectoire exo-atmosphérique est étudiée dans ce projet. Selon Dukeman (2005), l'indisponibilité d'algorithmes complexes incluant les forces aérodynamiques dans la partie atmosphérique et la limitation des capacités de calcul du calculateur embarqué font que les lanceurs ne sont pas guidés dans la partie atmosphérique de leur vol. Hanson *et al.* (1995) abordent dans le même sens en mentionnant que le guidage en boucle ouverte dans la partie atmosphérique suivi d'un passage en guidage en boucle fermée tôt dans la phase exo-atmosphérique assure une précision suffisante pour la totalité des lanceurs actuels.

Le guidage par la stratégie d'adaptation itérative (figure 5.1b) se divise en deux groupes selon l'hypothèse simplificatrice utilisée pour la modélisation de la gravité. La première hypothèse consiste à utiliser une gravité uniforme au-dessus d'une Terre plate. La validité de cette hypothèse augmente lorsque le temps avant l'injection diminue. En effet, la trajectoire de lancement est telle que, près de l'injection, l'hypothèse Terre plate à gravité uniforme est valide. Puisque la fonction de guidage opère en boucle fermée, elle peut commettre des erreurs au début du lancement en sachant que ces dernières seront corrigées plus tard, lorsque la validité de l'hypothèse augmente. En partant de cette hypothèse, plusieurs auteurs (Bittner, 1976; Sinha et Shrivastava, 1989; Vittal et Bhat, 1991; Feeley et Speyer, 1994; Leung et Calise, 1994; Teofilatto et De Pasquale, 1998; Circi, 2004; Marrdonny et Mobed, 2009) ont développé leur fonction de guidage.

Pour rendre la modélisation de la gravité plus représentative, les auteurs suggèrent différentes modifications permettant d'améliorer la précision. Bittner (1976) utilise une valeur constante moyenne qui inclut l'accélération centrifuge. Sinha et Shrivastava (1989) et Vittal et Bhat (1991) utilisent un développement qui leur permet d'isoler l'intégrale de la gravité. Cette isolation crée cependant une boucle où les inconnues dépendent de l'intégrale qui, elle-même, dépend des inconnues. Pour éliminer cette boucle, ils proposent l'utilisation de la méthode de Encke pour la première approximation de l'intégrale de la gravité. Ce développement leur permet d'introduire des termes perturbateurs modélisant la sphéricité (Sinha et Shrivastava, 1989) ou l'aplatissement (Vittal et Bhat, 1991). Teofilatto et De Pasquale (1998) et Marrdonny et Mobed (2009) admettent et utilisent directement les résultats finaux analytiques diminuant ainsi le nombre d'inconnues du programme d'optimisation, mais ne permettant pas de complexifier la modélisation de la gravité. La résolution est cependant beaucoup plus rapide. Feeley et Speyer (1994) et Leung et Calise (1994) utilisent une méthode des perturba-

tions basée sur une approximation de Taylor qui leur permet d'obtenir la gravité autour d'une Terre sphérique. Circi (2004) utilise une approche légèrement différente basée sur le principe d'approximation de la vitesse à gagner plutôt que la résolution du problème aux deux bouts. Cette méthode correspond à une méthode à énergie lui permettant un ajout de perturbations pour modéliser l'accélération gravitationnelle provenant de la sphéricité de la Terre.

Le second groupe de la méthode d'adaptation itérative utilise plutôt une gravité linéaire en fonction de l'altitude au-dessus d'une Terre sphérique. Cette hypothèse représente moins bien la norme du vecteur de l'accélération gravitationnelle que la précédente. Cependant, par l'utilisation d'une Terre sphérique, il conserve la direction de celle-ci. Selon (Lu *et al.*, 2003), ceci est plus important pour l'obtention de la trajectoire de montée d'un lanceur. Ce qui explique son utilisation par plusieurs auteurs (Jezewski, 1971; Jagers, 1974; Lu *et al.*, 2003, 2008; Pan et Lu, 2010; Lu et Pan, 2010). Le résultat de ces deux groupes est l'obtention d'une solution semi-analytique du problème aux deux bouts. Le problème devient alors une résolution d'un système d'équations carré. Cette série d'écrits, basée sur les développements de Jezewski (1971) et Jagers (1974), ne présente que peu de différences entre les différents écrits. Son avantage principal est qu'elle est extrapolable au guidage atmosphérique (Lu *et al.*, 2003; Pan et Lu, 2010; Lu et Pan, 2010). De plus, elle gère facilement les trajectoires avec plusieurs phases de dérive (Lu *et al.*, 2008).

L'application de la stratégie de guidage par suivi de trajectoire (figure 5.1a) aux lanceurs de satellite a, elle aussi, été étudiée. Elle est cependant beaucoup moins avancée que la précédente. Cette méthode permet l'utilisation d'un modèle complexe non-linéaire de la dynamique de translation du lanceur. Puisqu'elle s'apparente à la commande, les techniques de commandes non-linéaires peuvent être appliquées à cette problématique. Johnson *et al.* (2001) utilisent une stratégie de suivi et d'adaptation basée sur les réseaux de neurones qui permet de mieux s'adapter à un dysfonctionnement d'un élément propulsif du lanceur. Tournes et Shtessel (2006) utilisent plutôt une méthode basée sur la technique de mode glissant. Lu (1996) et Brinda et Dasgupta (2006) utilisent la commande prédictive non-linéaire. De plus, de par la possibilité d'utiliser un modèle complexe, cette méthode peut être appliquée au guidage en boucle fermée dans la partie atmosphérique. C'est d'ailleurs ce problème que Lu (1996) et Brinda et Dasgupta (2006) ont étudié. Ils ont tous deux restreint leur étude à un lancement sur une orbite très basse, moins de 150 km où la densité de l'air n'est pas négligeable.

La méthode d'adaptation itérative est préférable lorsque le milieu et le modèle sont perturbés puisqu'elle est plus robuste à un grand écart entre la position réelle et la trajectoire de référence (Teofilatto et De Pasquale, 1998). La méthode de suivi de tra-

jectoire de référence est plutôt préférable lorsque le milieu est dangereux et que la trajectoire doit être suivie avec précision. De plus, lorsque la trajectoire réellement suivie est près de la trajectoire de référence, la méthode de suivi de trajectoire est plus simple et rapide, car la complexité algorithmique de cette dernière est moindre. Cependant, les corrections successives requises par celle-ci sont plus énergivores que les corrections calculées par la méthode d'adaptation itérative (Teofilatto et De Pasquale, 1998). Les lanceurs ayant une limite importante sur le carburant disponible, cette limitation dans la consommation explique la prédominance de la stratégie d'adaptation itérative dans le guidage de lanceurs (Su, 2008). De plus, le coût élevé d'un lancement requiert une méthode robuste qui assure la réussite du lancement malgré les défaillances du lanceur. Ainsi, la robustesse des méthodes d'adaptation itérative est la raison principale pour leur prédominance dans les fonctions de guidage. Cependant, puisque l'environnement du lanceur est presque exempt de perturbations, la trajectoire réelle sera très près de la trajectoire optimale de référence. Ainsi, les méthodes par suivi de trajectoire qui, dans des conditions nominales, produisent une trajectoire plus près de la trajectoire optimale que les méthodes par adaptation itérative (Shrivastava *et al.*, 1986), doivent être considérées, principalement, pour un lanceur dont la fiabilité de ses différentes composantes est prouvée et garantie (Shrivastava *et al.*, 1986).

Dans ce projet, une méthode par suivi de trajectoire basée sur la commande prédictive (chapitre 4) est utilisée. La préférence pour la stratégie de suivi de trajectoire réside dans le fait que, avec un modèle précis de la dynamique, la partie exo-atmosphérique de la trajectoire de lancement est bien modélisée et peu perturbée. Les corrections effectuées afin de suivre la trajectoire de référence sont donc faibles et, dans ce cas, la complexité algorithmique et le temps de calcul sont moindres que pour les méthodes d'adaptation itérative. En plus, la trajectoire obtenue est près de la trajectoire optimale de référence. L'utilisation de la commande prédictive sous contraintes permet d'introduire des contraintes sur l'orbite à l'injection. Le respect des contraintes étant prédominant sur le suivi de la trajectoire, l'algorithme de suivi de trajectoire basé sur la commande prédictive a des similitudes avec les algorithmes d'adaptation itérative.

Le choix de la commande prédictive provient de la possibilité d'inclure des contraintes explicitement dans la définition du contrôleur. De plus, puisque le contrôleur utilise une prédiction du mouvement du lanceur, il est possible d'estimer la consommation d'énergie et, avec les contraintes, d'assurer une consommation moindre que l'énergie disponible. De plus, de par l'utilisation de contraintes, il est possible de peaufiner la définition du problème afin de se concentrer sur certains problèmes des fonctions de guidage. Notamment, par une étude consacrée exclusivement aux derniers instants du lancement, Vittal et Bhat (1993) constatent que les algorithmes de guidage demandant une précision absolue sur l'orbite risquent de causer une instabilité dans la fonction de

guidage. Ces algorithmes demandent des manœuvres de grandes amplitudes en peu de temps. Les contraintes peuvent accepter une légère erreur sur l'orbite finale afin d'éviter ce problème d'instabilité près de l'injection.

Comme mentionné précédemment, le suivi de trajectoire basé sur la commande prédictive a déjà été étudié (Lu, 1996; Brinda et Dasgupta, 2006). Cependant, ces travaux utilisent une formulation continue de la commande prédictive. Ils doivent ainsi opter pour un développement de Taylor au deuxième ordre de la prédiction se limitant à une trajectoire dans le plan autour d'une Terre sphérique. L'utilisation de la commande prédictive discrète permet d'utiliser un critère plus complexe, d'inclure les contraintes sur l'orbite désirée et, surtout, d'utiliser un modèle plus complexe de la Terre pour inclure son aplatissement et le problème hors-plan.

La suite de ce chapitre présente la définition du problème permettant d'effectuer le suivi d'une trajectoire exo-atmosphérique de lancement par la commande prédictive discrète non-linéaire. La section 5.1 introduit le modèle de prédiction qui inclut l'aplatissement de la Terre. La seconde section (section 5.2) introduit le critère à minimiser par l'algorithme d'optimisation. Cette section présente également les contraintes permettant de gérer la précision sur l'orbite désirée et d'améliorer les performances de la fonction de guidage. La section 5.3 reprend le critère et les contraintes pour formuler le problème complet d'optimisation utilisant le modèle de prédiction. La section 5.4 applique cette formulation au suivi de la trajectoire de référence calculée précédemment (chapitre 3). De plus, cette section étudie l'effet de certains ajouts à la formulation de base afin d'améliorer la spécificité de la fonction de guidage.

## 5.1 Choix du modèle

La première étape dans la définition de la commande prédictive consiste à obtenir un modèle du système à commander. Ce modèle prédit le comportement futur du système selon les entrées qui sont appliquées. Avec le comportement dynamique de l'état du système, le modèle décrit également les variations des sorties en fonction de la valeur de l'état. Ces sorties représentent le comportement final du système et permettent de définir la précision dans le suivi de la trajectoire désirée.

Dans ce projet, l'état du système correspond à celui de l'approche angulaire à pseudo-5ddl et les sorties sont les paramètres orbitaux étudiés. La section 5.1.1 présente les équations du modèle à pseudo-5ddl et leur utilisation pour la prédiction discrète de la dynamique de translation du lanceur. La section 5.1.2 introduit les équations per-

mettant de calculer les paramètres orbitaux à partir des composantes de l'approche angulaire à pseudo-5ddl. La section 5.1.3 regroupe ces deux séries d'équations pour former le modèle non-linéaire complet nécessaire au guidage d'un lanceur.

### 5.1.1 Équations d'état

Au chapitre 2, les équations décrivant la dynamique de translation du lanceur ont été développées. Ce chapitre conclut que les équations angulaires sont les mieux adaptées à la modélisation du mouvement du lanceur lorsque celui-ci ne circule pas au-dessus des pôles terrestres. De plus, afin de tenir compte de la dynamique de rotation dans la modélisation, deux pseudo-degrés de liberté ont été ajoutés. La combinaison de ces deux équations avec la modélisation angulaire donne le modèle à pseudo-5ddl suivant permettant de prédire la dynamique de translation dans le lanceur :

$$\dot{\tilde{m}} = \Delta_m \quad (5.1a)$$

$$\dot{\tilde{r}} = \tilde{v} \sin(\tilde{\gamma}) \quad (5.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}} = & \frac{F_p \cos \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\varphi}}{\tilde{m}} - g_r \sin \tilde{\gamma} + g_\delta \cos \tilde{\chi} \cos \tilde{\gamma} \\ & - \omega_e^2 \tilde{r} \cos \tilde{\delta} \left( \sin \tilde{\delta} \cos \tilde{\chi} \cos \tilde{\gamma} - \cos \tilde{\delta} \sin \tilde{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (5.1c)$$

$$\dot{\tilde{\delta}} = \frac{\tilde{v} \cos \tilde{\gamma} \cos \tilde{\chi}}{\tilde{r}} \quad (5.1d)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \frac{\tilde{v} \cos \tilde{\gamma} \sin \tilde{\chi}}{\tilde{r} \cos \tilde{\delta}} \quad (5.1e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}} = & \frac{F_p \cos \tilde{\vartheta} \sin \tilde{\varphi}}{\tilde{m} \tilde{v} \cos \tilde{\gamma}} - \frac{g_\delta \sin \tilde{\chi}}{\tilde{v} \cos \tilde{\gamma}} - \frac{2\omega_e}{\cos \tilde{\gamma}} \left( \sin \tilde{\gamma} \cos \tilde{\delta} \cos \tilde{\chi} - \cos \tilde{\gamma} \sin \tilde{\delta} \right) \\ & + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \sin \tilde{\chi} \cos \tilde{\gamma} \tan \tilde{\delta} + \frac{\omega_e^2}{\tilde{v} \cos \tilde{\gamma}} \tilde{r} \cos \tilde{\delta} \sin \tilde{\delta} \sin \tilde{\chi} \end{aligned} \quad (5.1f)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}} = & \frac{-F_p \sin \tilde{\vartheta}}{\tilde{m} \tilde{v}} - \frac{g_r}{\tilde{v}} \cos \tilde{\gamma} - \frac{g_\delta}{\tilde{v}} \cos \tilde{\chi} \sin \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \cos \tilde{\gamma} \\ & + 2\omega_e \sin \tilde{\chi} \cos \tilde{\delta} + \frac{\omega_e^2 \tilde{r} \cos \tilde{\delta}}{\tilde{v}} \left( \cos \tilde{\gamma} \cos \tilde{\delta} + \sin \tilde{\delta} \cos \tilde{\chi} \sin \tilde{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (5.1g)$$

$$\dot{\tilde{\vartheta}} = \vartheta_{com} - \tilde{\vartheta} \quad (5.1h)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \varphi_{com} - \tilde{\varphi} \quad (5.1i)$$

Ces équations représentent un modèle continu de la dynamique alors qu'une commande prédictive discrète est envisagée. Pour discrétiser ce modèle, un schéma de Euler

est utilisé. Avec un pas de temps plus faible que la dynamique du système, cette approximation est valide. Ainsi, le modèle de prédiction de la dynamique utilisée dans la fonction de guidage est :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{x}}_k + \Delta_t \mathbf{f}_t(\tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{u} = [\vartheta_{com} \ \varphi_{com}]^T$  et  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{m} \ \tilde{r} \ \tilde{v} \ \tilde{\delta} \ \tilde{\lambda} \ \tilde{\chi} \ \tilde{\gamma} \ \tilde{\vartheta} \ \tilde{\varphi}]^T$  et  $\Delta_t$  est le pas d'intégration choisi, pour ce projet, à 0,1 s. Les fonctions  $\mathbf{f}_t$  sont les équations de la dynamique étudiée, à savoir les équations (5.1).

L'utilisation de la commande prédictive discrète permet d'éliminer les limitations dans la complexité du modèle inhérentes à l'utilisation d'un modèle continu. En effet, comme mentionné précédemment, les travaux effectuant le suivi de trajectoire de lancement par commande prédictive continue (Lu, 1996; Brinda et Dasgupta, 2006) sont limités à l'étude du mouvement dans le plan orbital et autour d'une terre sphérique. Cette limitation provient du fait que, pour obtenir une solution au problème d'optimisation la dynamique du système doit avoir une forme spéciale :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (5.3a)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{f}_u(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (5.3b)$$

Pour sa part, la commande prédictive discrète ne requiert pas que les équations de la dynamique soient écrites dans une forme particulière pour obtenir une solution au problème d'optimisation. Contrairement à la commande prédictive continue, la formulation discrète a un nombre fini d'inconnues. Ainsi, s'il n'existe pas de solution analytique, comme dans la majorité des problèmes non-linéaires contraints, un algorithme d'optimisation peut alors être utilisé pour trouver la valeur optimale de chacune des inconnues.

### 5.1.2 Équations de sortie

Le second ensemble d'équations du modèle modélise les équations de sortie. Cette thèse suggère d'effectuer le suivi de trajectoire basé sur les paramètres orbitaux plutôt que sur les vecteurs vitesse et position. Les six paramètres orbitaux correspondent aux six composantes des vecteurs rayon et vitesse de l'approche vectorielle. Cependant, lorsqu'uniquement certains paramètres sont fixés, il est impossible de définir toutes les composantes des vecteurs. Ainsi, puisque l'étude ne considère pas l'ascension droite du nœud ascendant, l'anomalie vraie et l'argument du périégée, l'utilisation des paramètres

orbitaux comme sortie du modèle de guidage est choisie. Dans le cas où la sortie aurait été les composantes des vecteurs rayon et vitesse, comme dans les fonctions de guidage par suivi de trajectoire utilisant la commande prédictive (Lu, 1996; Brinda et Dasgupta, 2006), les six paramètres auraient dû être fixés alors que seulement trois de ceux-ci sont étudiés. La principale raison pour utiliser les paramètres orbitaux plutôt que les vecteurs est qu'il ainsi devient possible de suivre une trajectoire qui n'est que partiellement définie. Ceci permet de simplifier légèrement le problème puisque plusieurs combinaisons (position et vitesse) peuvent donner la même valeur aux trois paramètres étudiés. De plus, si la mission le requiert comme, par exemple, pour l'injection sur une orbite elliptique où l'argument du périégée devient important, l'unique modification à effectuer à la formulation de l'algorithme de guidage est d'ajouter une équation aux équations de sortie.

Les équations non-linéaires de sortie sont donc les équations permettant de passer de l'approche angulaire vers les paramètres orbitaux étudiés. Le développement de ces équations est effectué à la section 2.4.2. Dans la suite du projet uniquement le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison orbitale sont étudiés :

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{r}\mu_e}{2\mu_e - \tilde{r}\tilde{v}_i^2} \quad (5.4a)$$

$$\tilde{e} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{v}_i^2 \tilde{r}}{\mu_e}\right)^2 \cos^2 \tilde{\gamma}_i - 2\frac{\tilde{v}_i^2 \tilde{r}}{\mu_e} \cos^2 \tilde{\gamma}_i + 1} \quad (5.4b)$$

$$\tilde{i} = \arccos\left(\sin \tilde{\chi}_i \cos \tilde{\delta}\right) \quad (5.4c)$$

### 5.1.3 Modèle complet

Le modèle non-linéaire complet correspond à la combinaison des équations d'évolution temporelle de l'état du système et des équations de sortie. Dans le cas étudié, l'état du système est les composantes de la modélisation angulaire :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[ \tilde{m} \tilde{r} \tilde{v} \tilde{\delta} \tilde{\lambda} \tilde{\chi} \tilde{\gamma} \tilde{\vartheta} \tilde{\varphi} \right]^T \quad (5.5)$$

Cet état permet de calculer le vecteur de sortie :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \left[ \tilde{a} \tilde{e} \tilde{i} \right]^T \quad (5.6)$$

Pour modifier la valeur des sorties, la fonction de guidage modifie la valeur des composantes du vecteur d'entrée :

$$\mathbf{u} = [\vartheta_{com} \varphi_{com}]^T \quad (5.7)$$

Les équations modélisant l'évolution temporelle de l'état sont l'équation (5.2), correspondant à la discrétisation des équations (5.1) :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) = \tilde{\mathbf{x}}_k + \Delta_t \mathbf{f}_t(\tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) \quad (5.8)$$

Pour leur part, les équations de sortie sont :

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (5.9)$$

où les fonctions  $\mathbf{g}$  sont les équations (5.4).

Ce modèle est sous-actionné, la dimension du vecteur de sortie étant plus élevée que celle du vecteur d'entrée. Cependant, selon Chemori et Alamir (2004), la commande prédictive permet de commander un système sous-actionné et/ou non holonomique. Ceci provient du fait que la commande prédictive peut produire une combinaison d'entrées, séparées dans le temps, qui produit un mouvement qui est irréalisable instantanément (Pong *et al.*, 2011). La différence entre la non-holonomie et le sous-actionnement d'un système n'est pas entièrement comprise dans la littérature (Kolmanovsky et McClamroch, 1995) et les deux sont souvent confondus. Conceptuellement, un système sous-actionné est un système dont la dimension de son espace de configuration est plus élevée que celle de son espace de contrôle alors qu'un système non holonome est un système dont son mouvement est contraint par au moins une contrainte non intégrable (Oriolo et Nakamura, 1991). Selon Murray *et al.* (1994), les contraintes de non-glissement d'une roue en rotation et celles de conservation du moment angulaire d'un système multi-corps sont les deux types de contraintes non intégrables possibles sur un système physique. Cependant, au point de vue de la commande, les deux types de système posent la même problématique, certains mouvements sont instantanément irréalisables. Cette similitude dans la commande amplifie la confusion entre les deux types.

## 5.2 Définition du critère et des contraintes

Suite à la définition du modèle permettant d'effectuer la prédiction de l'orbite future du lanceur, la prochaine étape consiste à définir un problème d'optimisation utilisant ces prédictions afin d'amener la charge utile sur l'orbite désirée. La formulation de base du problème a été introduite à la section 4.1.1. Pour la fonction de guidage basée sur la commande prédictive non-linéaire, le critère de cette formulation est utilisé (section 5.2.1) en association avec les contraintes de la formulation par mode duel pour assurer la stabilité de la boucle fermée (section 5.2.2). Cette section présente comment la commande prédictive et le modèle de la section 5.1 se combine pour former une fonction de guidage.

### 5.2.1 Formulation du critère

Comme mentionné, le critère de base de la commande prédictive est utilisé dans la fonction de guidage développé. Ce critère correspond à l'addition de la différence entre la trajectoire prédite et la trajectoire réelle aux incréments de commande. Les deux éléments de la sommation sont pondérés selon l'importance à donner au suivi de trajectoire et à la variation de la commande :

$$J = \sum_{l=1}^{h_p} (\mathbf{d}_{k+l} - \tilde{\mathbf{y}}_{k+l})^T \mathbf{Q}_l (\mathbf{d}_{k+l} - \tilde{\mathbf{y}}_{k+l}) + \sum_{l=1}^{h_c} \Delta \mathbf{u}_{k+l-1}^T \mathbf{R}_l \Delta \mathbf{u}_{k+l-1} \quad (5.10)$$

Dans cette équation, la sortie prédite ( $\tilde{\mathbf{y}}$ ) est composée des paramètres orbitaux étudiés (équation (5.6)) et les incréments de commande ( $\Delta \mathbf{u}$ ) sont obtenus sur l'entrée du système (équation (5.7)). Les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont les matrices de pondération. Dans cette formulation, puisque le but est de suivre une trajectoire définie par ses paramètres orbitaux, la consigne ( $\mathbf{d}$ ) correspond aux paramètres orbitaux de la trajectoire de référence à chaque pas de temps. Cette trajectoire est la trajectoire finale de la section 3.3.2.

### 5.2.2 Formulation des contraintes

La stabilité du mode duel est basée sur la définition d'une zone terminale à l'intérieur de laquelle le contrôleur statique est utilisé. Dans le cas du lanceur, cette zone terminale peut facilement être vue comme la région autour de l'orbite désirée à l'injection permettant de considérer le lancement comme une réussite. Tout comme au chapitre 3, pour assurer un meilleur conditionnement numérique, le rayon des apsides est utilisé dans le vecteur de sortie pour définir la dimension de l'orbite :

$$-\boldsymbol{\varepsilon} \leq \begin{bmatrix} \tilde{r}_{ak+h_p} \\ \tilde{r}_{pk+h_p} \\ \tilde{i}_{k+h_p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{ad} \\ r_{pd} \\ i_d \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.11)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  correspond à la précision minimale sur les paramètres orbitaux pour considérer le lancement comme réussi. Ce vecteur est composé des éléments  $\varepsilon_a$  (précision sur le rayon de l'apogée),  $\varepsilon_p$  (précision sur le rayon du périégée) et  $\varepsilon_i$  (précision sur l'inclinaison orbitale). En prenant un horizon de prédiction suffisamment long pour toujours inclure l'instant d'injection, cette zone terminale, définie par ses paramètres orbitaux, est invariante. À la différence des vecteurs du rayon et de la vitesse, les paramètres orbitaux sont constants durant une phase non propulsée, d'où l'invariance de la zone après l'injection. Ceci constitue une raison supplémentaire favorisant l'utilisation des paramètres comme sortie du système.

En plus des contraintes sur la zone terminale, la commande prédictive peut inclure des contraintes sur l'état, l'entrée et la sortie en tout point de la trajectoire. Pour le lanceur, afin d'aider la convergence de l'algorithme d'optimisation, l'orientation du vecteur de poussée (l'entrée du système) est contrainte à demeurer à l'intérieur d'une limite prédéfinie. Le lanceur utilisé est défini spécifiquement pour la mission étudiée, ce qui signifie que les manœuvres nécessaires sont de faibles amplitudes. Il est ainsi possible de contraindre les angles dans le plan à être à l'intérieur de l'intervalle  $[-45^\circ, 45^\circ]$  et les angles hors plan à se retrouver à l'intérieur de  $[-5^\circ, 5^\circ]$ . Ceci donne deux nouveaux ensembles de contraintes :

$$-\begin{bmatrix} 45 \\ 5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \vartheta_{k+l} \\ \varphi_{k+l} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 45 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \forall l \in [1, h_c] \quad (5.12)$$

L'intervalle moins large des angles hors plan provient du fait que les manœuvres hors plan orbital consomment plus de carburant que les manœuvres dans le plan (Sellers, 2005).

En plus d'être utilisées pour assurer la stabilité et pour gérer des limitations physiques du modèle, les contraintes peuvent être utilisées pour traiter des problématiques spécifiques. Des contraintes sur les incréments peuvent, par exemple, être utilisées dans des systèmes à plusieurs temps d'échantillonnage (Halldorsson *et al.*, 2002). Dans ces travaux, ce type de contraintes est plutôt utilisé pour diminuer le nombre d'inconnues et le temps de calcul de l'optimisation. Elles sont des contraintes d'égalité sur certains incréments de commande. Notamment, en les contraignant à être nuls, il est possible d'allonger les paliers de certains instants de la prédiction.

Dans la suite des travaux, ces contraintes seront imposées sur les derniers instants du lancement afin que quatre valeurs successives de l'orientation soient identiques. Ainsi, pour un algorithme de guidage fonctionnant à  $1 \text{ Hz}$ , au début de la prédiction, où l'effet des modifications est plus important sur l'orbite finale, l'algorithme fonctionne avec des paliers de  $1 \text{ s}$  et, à la fin de la prédiction, les paliers sont de  $4 \text{ s}$ . Comme la section sur la définition de la trajectoire le démontre, l'utilisation de paliers plus longs ne pose pas de problèmes dans les propriétés de convergence. Le lanceur demeure en mesure d'atteindre l'orbite désirée. L'avantage dans l'utilisation de paliers plus courts est la faible différence entre deux valeurs successives de l'orientation. À la différence de l'utilisation hors-ligne, cette monotonie importe puisque l'orientation calculée est donnée en consigne à la fonction de commande. La commande prédictive étant un processus itératif où uniquement la première orientation est utilisée, l'utilisation de longs paliers à la fin de la prédiction ne nuit pas à la monotonie de la commande et permet de diminuer le nombre d'inconnues du problème. En fait, le nombre d'inconnues demeure le même puisque l'horizon de contrôle n'est pas modifié, mais, de par l'utilisation de

contraintes d'égalité, la valeur des inconnues est fixée :

$$\Delta \mathbf{u}_{k+l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I} \quad (5.13)$$

Dans cette relation, l'ensemble  $\mathcal{I}$  correspond aux instants où l'orientation est fixée pour être égale à l'orientation précédente.

L'utilisation de courts paliers au début de la prédiction et de paliers plus longs à la fin de la prédiction laisse assez de liberté à l'algorithme pour corriger les écarts avec la trajectoire de référence et accélère, en comparaison au cas sans contraintes, l'obtention des résultats. L'étude d'un cas particulier de ce type de contraintes est présentée à la section 5.4.

### 5.3 Formulation du problème

La combinaison du modèle de la section 5.1 avec le critère et les contraintes de la section 5.2 produit l'algorithme de guidage d'un lanceur de satellites par suivi de trajectoire basé sur la commande prédictive. La présente section résume l'algorithme et modifie certains paramètres afin d'améliorer ses performances.

Ainsi, l'algorithme de suivi de trajectoire est basé sur la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire contraint. Le critère à minimiser est l'équation (5.10) où les sorties sont calculées par une intégration numérique de Euler, avec un pas de temps de 0,1 s, du modèle à pseudo-5ddl (équations (5.8) et (5.9)). La fréquence d'intégration de l'état est donc différente de la fréquence de la commande qui est de 1 Hz. Cependant, cette différence ne cause aucun problème puisque la différence peut être vue comme des contraintes d'égalité sur les incréments de commande où la même valeur de la commande est utilisée pour 10 instants d'intégration de l'état successifs. La différence dans les fréquences revient donc à l'ajout de contraintes de formage de l'entrée, similaires à celle de l'équation (5.13). La sortie varie avec le temps et correspond aux paramètres orbitaux de la trajectoire obtenue par la résolution du problème de définition d'une trajectoire de lancement (chapitre 3).

En ce qui concerne les contraintes de précision, l'équation 5.11 doit être légèrement modifiée pour aider à la résolution. En effet, le rayon des apsides et l'inclinaison orbitale ont des ordres de grandeur très différents, la normalisation permet de limiter les problèmes numériques pouvant survenir par l'utilisation de valeurs très différentes. Cette

équation devient :

$$- \begin{bmatrix} \varepsilon_a \times (1 \times 10^{-3}) \\ \varepsilon_p \times (1 \times 10^{-3}) \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} (\tilde{r}_{ak+h_p} - r_{ad}) \times (1 \times 10^{-3}) \\ (\tilde{r}_{pk+h_p} - r_{pd}) \times (1 \times 10^{-3}) \\ \tilde{i}_{k+h_p} - i_d \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_a \times (1 \times 10^{-3}) \\ \varepsilon_p \times (1 \times 10^{-3}) \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Dans le critère, cette normalisation, qui est effectuée par les éléments des matrices de pondération  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ , est détaillée dans la section 5.4 où l'étude de la valeur des pondérations du critère est effectuée. Il convient de mentionner que, malgré cette modification, la formulation demeure dans le canevas de la commande prédictive par mode duel.

En plus de ces modifications au problème d'optimisation, la formulation pour le guidage d'un lanceur peut profiter de la forme spécifique de la trajectoire pour simplifier la résolution. En effet, la séparation en étage du lanceur et, plus particulièrement, la trajectoire incluant une phase de dérive non propulsée entre la fin du brûlage du second étage et l'allumage du troisième étage permettent de diviser le guidage du lanceur en deux parties distinctes. Durant la première partie, la fonction de guidage tente d'amener le troisième étage et la charge utile sur l'orbite de dérive calculée hors-ligne. Ainsi, durant cette phase, la zone terminale n'est plus définie autour de l'orbite visée pour le satellite mais autour des paramètres orbitaux de l'orbite de dérive. Durant la seconde partie de la trajectoire guidée, la fonction de guidage vise à injecter la charge utile sur son orbite. Ainsi, lorsque le lanceur est dans le brûlage de son second étage, avant la phase de dérive, il se trouve dans la première partie et, lorsque son troisième étage est actif, il se retrouve dans sa seconde partie, après la phase de dérive (figure 5.2). Cette division en deux sous-problèmes sert principalement à diminuer l'horizon de prédiction. En effet, puisque la zone terminale est définie à la fin de l'horizon de prédiction, l'horizon doit permettre de prédire l'orbite à l'injection (équations (5.14)). Ainsi, en rapprochant ce point, l'horizon diminue. De plus, durant la phase de dérive, la boucle de guidage n'a pas d'effet sur les paramètres orbitaux. Le lanceur n'étant pas propulsé, la valeur donnée à l'orientation de la poussée n'influence pas les paramètres orbitaux. Cette division ne nuit pas à la formulation du problème puisque les deux parties demeurent dans la forme de commande prédictive par mode duel.

Un dernier point important à mentionner sur la formulation est la disponibilité de l'état pour effectuer la prédiction. Dans l'implémentation effectuée pour les essais de la section 5.4, l'état est assumé entièrement mesuré. En opération réelle, dans la boucle de GNC, la fonction de guidage se situe en aval de la fonction de navigation (section 1.2). La fonction de navigation doit, notamment, estimer la vitesse et la position à partir des mesures des capteurs. Ce faisant, elle estime l'état nécessaire à la fonction de guidage où il est alors possible de considérer celui-ci comme entièrement disponible. De plus, la fonction de navigation permet d'éliminer le biais de la position et de la vitesse (Shi

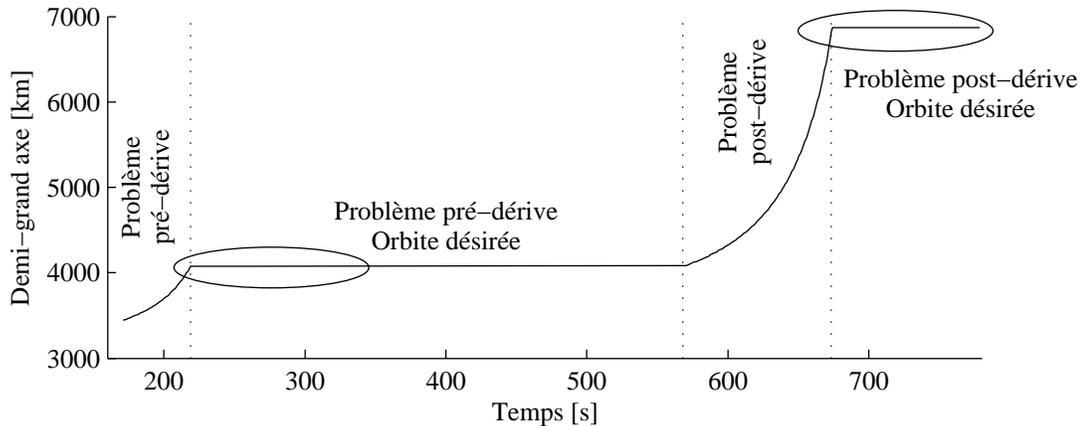


FIGURE 5.2 – Séparation en problèmes distincts consécutifs

*et al.*, 2005). Ainsi, la boucle complète de guidage est en mesure d'éliminer l'erreur statique.

Comme pour la résolution d'un problème de définition d'une trajectoire de référence, la fonction de guidage nécessite la résolution d'un problème d'optimisation. Cet algorithme se doit d'être opérable à la fois à partir du simulateur Matlab<sup>®</sup> développé pour le chapitre 2 et à partir du simulateur Simulink<sup>®</sup> du RDDC-Valcartier. De plus, dans l'étude d'un algorithme de guidage, le temps de calcul est un paramètre qui doit être étudié afin qu'il puisse s'intégrer dans les faibles capacités de calcul embarqué dans le lanceur (Su, 2008). Ainsi, l'algorithme d'optimisation doit être performant sans être trop lent. Le choix final d'algorithme d'optimisation n'est pas effectué dans cette thèse, mais le choix de l'algorithme est dicté par cette optique. Au chapitre 3, deux algorithmes ont été envisagés, *fmincon* et SNOPT<sup>®</sup>. Les communications entre le logiciel de simulation et la fonction d'optimisation sont moindres dans le premier cas, diminuant le temps de calcul. De plus, l'utilisation de la fonction *fmincon* est plus simple et ses paramètres de convergence sont plus facilement modifiables, ce qui permet également d'améliorer le temps de calcul. SNOPT<sup>®</sup> est plus performant lorsque l'estimation initiale de la solution est éloignée de la solution réelle. Dans une fonction de guidage, cette estimation est bonne puisqu'elle provient de la solution de l'itération précédente. Ainsi, pour la formulation précédente, les deux algorithmes devraient avoir de performances similaires, la facilité d'utilisation et la rapidité de *fmincon* prévalent cependant sur la robustesse de SNOPT<sup>®</sup>.

## 5.4 Analyse de l'algorithme

Comme pour le chapitre sur la définition d'une trajectoire de lancement, la section sur l'analyse de la formulation est orientée vers une analyse comparative des résultats obtenus en modifiant certains paramètres de l'algorithme. Ces résultats sont obtenus en simulant un lancement, sur le simulateur à pseudo-5ddl (chapitre 2), avec une boucle de guidage fonctionnant à 1  $Hz$ . Le but est d'atteindre l'orbite circulaire héliosynchrone de 6871  $km$  de demi-grand axe en suivant la trajectoire calculée par l'algorithme du chapitre 3. Afin de simuler une opération réelle, un bruit est ajouté sur l'état utilisé par la fonction de guidage. Ce bruit correspond à la précision attendue sur la sortie de la fonction de navigation. Les paramètres du bruit sont ainsi choisis pour être représentatifs de cette précision. Selon Maki (1990), un bruit blanc avec une déviation standard de 35  $m$  sur la position et de 0,1  $m/s$  sur la vitesse est une estimation raisonnable de la précision atteignable pour une fonction de navigation intégrée, basée sur une centrale inertielle (INS) et un système de géolocalisation par satellites (GPS). Dans ce chapitre, afin d'étudier l'effet de certains paramètres, des perturbations externes en échelon sont également appliquées au lanceur. Ces perturbations surviennent à 182 et 609  $s$  après le décollage. Elles peuvent être assimilées à des perturbations extérieures affectant instantanément la vitesse et la position. Dans la phase exo-atmosphérique du lancement, ce n'est pas un type de perturbations qui risque d'être rencontré, mais il permet de mieux analyser les caractéristiques de la fonction de guidage. C'est d'ailleurs pour cette raison que les essais finaux des lois de guidage (section 7.3) n'utilisent pas ce type de perturbations.

La fréquence d'échantillonnage de l'algorithme de commande prédictive est choisie égale à la fréquence de la fonction de guidage. Ce qui signifie que la durée des paliers est de 1  $s$ . Avec la séparation en deux sous-problèmes, les horizons de prédiction sont donc, au minimum, de 49 et 105 pour permettre de couvrir les 48,2  $s$  de brûlage du second étage et les 104,4  $s$  du troisième étage. Sans cette séparation en deux sous-problèmes, l'algorithme doit prédire 508,2  $s$  où, durant plus de 350  $s$  de cette prédiction, les sorties ne sont pas commandable. Durant la phase de dérive et la phase orbitale, les paramètres orbitaux sont constants et ne peuvent être modifiés. Il devient ainsi inutile de prédire après l'injection, d'où l'utilisation de 49 pour le problème avant la phase de dérive et de 105 pour celui après la phase de dérive.

L'orientation de la poussée dans le troisième étage étant importante pour la circularisation de l'orbite, dans la formulation non séparée, il faudrait que l'horizon de contrôle soit assez long pour inclure le brûlage après la dérive. Le nombre d'inconnues du problème, le double de l'horizon de contrôle, serait donc de 1018. Avec la sépara-

tion, le problème avec le plus d'inconnues, la partie après la dérive, en a 210. Ceci constitue une diminution significative qui se répercute directement sur la complexité du problème d'optimisation et le temps nécessaire à sa résolution. La définition d'une trajectoire de lancement (chapitre 3) a démontré que l'orientation de la poussée optimale varie constamment, de l'allumage du moteur à l'injection. Ainsi, un horizon de contrôle très court, où la dernière valeur est maintenue pour toute la suite de la prédiction n'est pas désirable. Pire, si l'horizon de contrôle est trop court, l'algorithme peut ne pas converger. Des essais avec l'algorithme du chapitre 3 démontrent que, lorsque l'horizon de contrôle vaut 40 pas de temps de moins que l'horizon de prédiction, l'algorithme d'optimisation n'est plus en mesure d'obtenir une trajectoire menant le lanceur à l'orbite visée. Ainsi, puisque l'orientation optimale, telle que calculée par l'algorithme de définition d'une trajectoire, varie jusqu'à l'injection, la valeur de l'horizon de contrôle, dans le cas de base, est choisie pour couvrir toute la durée du brûlage. Ainsi, il est aussi long que l'horizon de prédiction, à savoir 49 pour la partie avant la dérive et 105 pour celle après la dérive. Cependant, un horizon de contrôle plus court diminue le nombre d'inconnues et, possiblement, le temps de calcul. Cette diminution est étudiée plus loin dans cette section.

Le dernier paramètre à configurer pour terminer la définition du critère du cas de base est la valeur des matrices de pondération du critère. Comme pour les variables de pondération de l'algorithme du chapitre 3, les matrices servent à pondérer la valeur de chacune des composantes du critère. De plus, leurs unités implicites permettent la sommation des termes en uniformisant les unités dans le critère. Ces matrices de pondération sont des matrices diagonales où chaque élément de la diagonale est relié à une sortie, ou à une entrée, du système. L'élément  $\mathbf{Q}_{(1,1)}$  est relié au demi-grand axe, son unité implicite est donc des  $km^{-2}$ . L'élément  $\mathbf{Q}_{(2,2)}$  est relié à l'excentricité et n'a donc pas d'unité et le troisième élément de la matrice a des  $^{\circ-2}$  comme unité puisqu'il est le facteur multiplicatif de l'inclinaison orbitale. Les deux éléments de la matrice  $\mathbf{R}$  sont en  $^{\circ-2}$  étant relié aux incréments de l'orientation de la poussée, l'angle dans le plan pour le premier et l'angle hors plan pour le second. Pour définir la valeur des éléments, une étude de l'ordre de grandeur des termes multipliés est nécessaire. Pour les incréments de l'orientation de la poussée, les résultats de la trajectoire de référence donnent une idée satisfaisante de celle-ci. De par la trajectoire à 1 s, la différence entre la valeur de deux paliers successifs est estimée à  $1 \times 10^{-3} \text{ }^{\circ}$ . Pour la matrice  $\mathbf{Q}$ , il faut plutôt estimer la valeur de la différence entre la consigne et la sortie prédite correspondante. Cette estimation peut s'effectuer en utilisant les termes de précision acceptée ( $\epsilon$ ). Selon les spécifications de VEGA (VEGA, 2006) et du LM-2C (LM-2C, 1999), la précision sur le demi-grand axe est dans l'ordre de grandeur du  $km$ , celle sur l'excentricité est de  $1 \times 10^{-3}$  et celle sur l'inclinaison orbitale est de  $0,05^{\circ}$ . Ce qui signifie que, basé uniquement sur les unités implicites et l'ordre de grandeur des termes multipliés, les

matrices de pondération de base valent :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^3 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Cependant, dans la trajectoire exo-atmosphérique du lancement d'un satellite, ce qui importe vraiment est l'orbite à l'injection qui est fixée par des contraintes (équation (5.14)). La matrice de pondération de l'erreur de consigne peut ainsi être diminuée par rapport à sa valeur nominale. Ceci aura pour effet de pénaliser encore plus les incréments de commande, ce qui est cohérent avec le fait que la consommation de masse (liée aux variations de l'orientation de poussée) est un des facteurs clés dans le calcul d'une trajectoire de lancement. De plus, comme mentionné dans Sellers (2005), les manœuvres hors plan orbital sont plus énergivores que les manœuvres dans le plan. Ainsi, la valeur de l'élément  $\mathbf{R}_{(2,2)}$  doit être légèrement plus élevée que celle de l'élément  $\mathbf{R}_{(1,1)}$ . Cette analyse donne les valeurs suivantes pour les matrices de pondération :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^2 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Ces valeurs sont celles utilisées dans le cas de base. Avant d'effectuer les comparaisons des prochaines sections, des essais préliminaires ont démontré que ces valeurs sont celles donnant les meilleures performances de guidage.

Dans le cas de base, la précision demandée sur la zone terminale est de 0,1 km pour le rayon des apsides et de  $1 \times 10^{-3}$  pour l'inclinaison orbitale. Ces valeurs sont en deçà des spécifications des lanceurs comparables, mais elles permettront d'étudier les performances de la boucle de guidage.

La suite de cette section se consacre à l'étude de la formulation et, principalement, de l'effet de chacun des paramètres la composant. Ainsi, à la section 5.4.1, l'horizon de contrôle est étudié. La section 5.4.2 analyse l'effet des matrices de pondération et la section 5.4.3 étudie l'ajout des contraintes de formage de l'entrée. La section 5.4.4 permet de voir l'effet des modifications dans la précision de la zone terminale afin que la précision à l'injection soit similaire à celle de lanceurs comparables (VEGA, 2006;

LM-2C, 1999). Chacune des analyses s'effectue en comparant les résultats obtenus avec ceux du cas de base. La comparaison avec une loi de guidage classique pour un lanceur de satellites (annexe E) est rapidement effectuée à la section 5.4.5 et est approfondie au chapitre 7 où les trois algorithmes de guidage développés dans cette thèse sont comparés entre eux et avec la technique de l'annexe E.

Les comparaisons seront effectuées sur trois bases. La plus importante est la précision sur l'orbite atteinte. Afin de considérer les modifications comme intéressantes, il ne faut pas qu'elles détériorent l'orbite finale. Elles peuvent amener le satellite sur une orbite différente de celle du cas de base, mais elle doit demeurer à l'intérieur des marges permettant de considérer la mission atteinte. La seconde comparaison porte sur le temps de calcul. En effet, puisqu'un lanceur est limité en capacité de calcul embarqué (Su, 2008), toutes modifications le diminuant sont à retenir. Cependant, les capacités réelles du lanceur n'étant pas connues, il est impossible de vérifier si l'algorithme est envisageable. Ainsi, la comparaison du temps de calcul s'effectuera en relatif au cas nominal. La comparaison concerne le temps total et le temps de chaque itération. Le troisième critère de comparaison concerne l'activité de la commande obtenue. Contrairement aux deux comparaisons précédentes, la comparaison de la commande (l'orientation de la poussée) n'a pas de métriques permettant une décision binaire sur la meilleure formulation. La conclusion repose plutôt sur une analyse graphique des résultats afin de déterminer celle qui donne l'orientation la moins variante et dont la variation est la plus faible.

### 5.4.1 Effet de l'horizon de contrôle

Le premier paramètre étudié est le plus simple, mais il peut influencer grandement les performances de l'algorithme. L'horizon de contrôle est proportionnel au nombre d'inconnues. Ainsi, une diminution de l'horizon de contrôle entraîne une diminution du nombre d'inconnues qui se répercute en une diminution du temps de calcul global de la simulation. Cependant, comme mentionné précédemment, la forme spécifique du problème est tel que l'horizon de contrôle minimum qui assure la convergence de la première itération est assez long. En effet, les essais avec l'algorithme de définition de trajectoire avaient donné des horizons minimums de 10 pour avant la phase de dérive et de 64 pour le problème après la phase de dérive. Cependant, dans les essais de cette section, les horizons choisis sont, respectivement, de 19 et 66. Ces valeurs sont plus élevées que les valeurs minimales, elles permettent cependant de définir un problème ayant le même nombre d'inconnues que la section étudiant les contraintes de formage de l'entrée. Les comparaisons sur le temps de calcul s'effectuent ainsi sur des problèmes de complexité similaire.

Les orbites obtenues, celle de dérive (tableau 5.1a) et celle à l'injection (tableau 5.1b), dans le cas avec l'horizon de contrôle court et celle obtenue dans la formulation de base sont présentées au tableau 5.1. Les orientations permettant d'obtenir ces orbites sont présentées sur la figure 5.3.

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	$6862,5 \pm 0,1$	$1294,0 \pm 0,1$	$97,231 \pm 0,001$
cas de base	6862,3	1294,2	97,231
$h_c$ court	6862,4	1294,7	97,231

(a) Orbite de dérive

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	$6871,0 \pm 0,1$	$6871,0 \pm 0,1$	$97,375 \pm 0,001$
cas de base	6871,3	6870,5	97,375
$h_c$ court	6871,7	6870,8	97,376

(b) Orbite à l'injection

TABLEAU 5.1 – Résultats obtenus avec un horizon de contrôle court

De ces résultats, on observe que les deux cas injectent la charge utile sur une orbite très près de celle désirée, autant pour l'orbite de dérive que pour l'orbite finale. En effet, bien que les contraintes ne soient pas respectées, les orbites atteintes demeurent très près des orbites désirées. La violation des contraintes provient des perturbations qui font que le problème d'optimisation des dernières itérations n'est pas réalisable. Il n'existe pas de solution respectant la dynamique du modèle de prédiction, les contraintes de précision et les contraintes sur les entrées. Ceci explique également les grandes variations dans les dernières secondes des orientations commandées. Ces orientations ne sont pas uniquement causées par cette absence de solution. Selon Vittal et Bhat (1993), un algorithme de guidage qui ne gère pas le temps d'injection et qui demande une injection parfaite aura toujours de grandes manœuvres afin de corriger, en un laps de temps très court, les perturbations. La différence principale entre les deux cas se situe dans l'orientation commandée au début des problèmes. À ce moment, les orientations du cas avec l'horizon de contrôle plus court varient plus que celles du cas de base. Ceci est cohérent avec le fait qu'un horizon court où la dernière valeur est maintenue pour la fin de la prédiction ne donne pas la meilleure trajectoire puisque la variation de commande n'est plus constante (chapitre 3). Cependant, la pire caractéristique du cas avec un

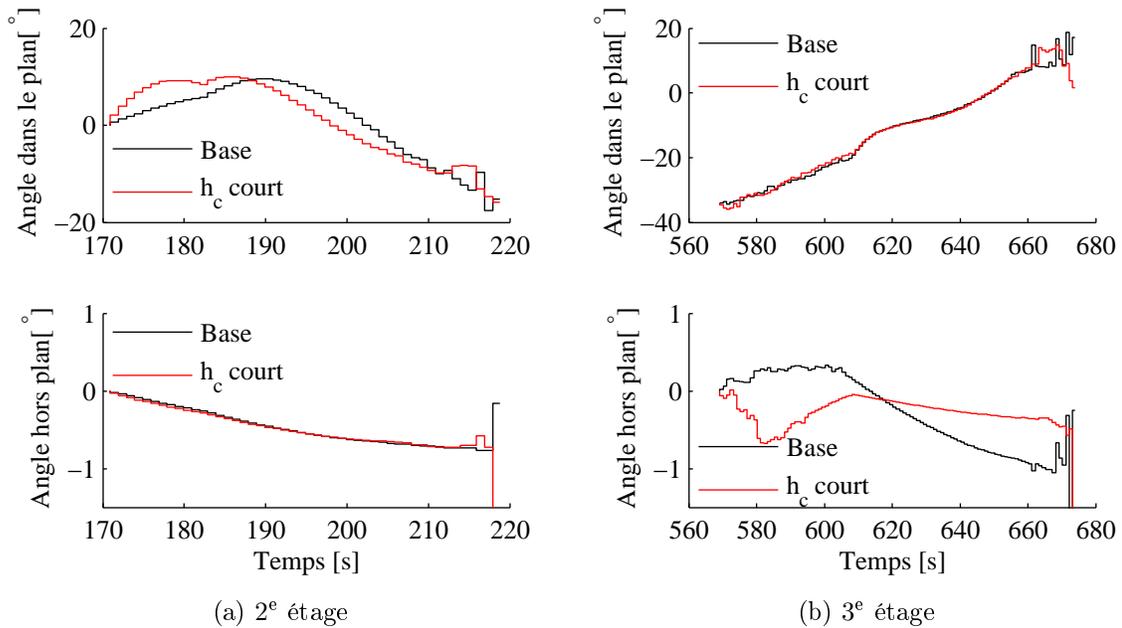


FIGURE 5.3 – Orientations commandées, pour un horizon de contrôle court

horizon court est son risque de non-convergence au début du troisième étage. En effet, d'autres essais effectués avec les mêmes paramètres donnaient des orientations encore plus variantes au début de cette partie. Ces variations s'expliquent, comme pour celles près de l'injection, par la non-convergence de l'optimisation.

Le tableau 5.2 présente le temps de calcul total de chacune des deux phases et la figure 5.4 présente le temps de calcul de chaque itération. Comme il était prévisible, le cas avec l'horizon de contrôle plus court est plus rapide que le cas de base. Notamment au début des deux phases, où le temps de calcul de toutes les itérations est équivalent et plus faible que le cas de base. Lorsque le temps restant avant l'injection devient égal ou moindre que l'horizon de contrôle court (après 200 s et 607,9 s soit l'horizon de contrôle (19 et 66) soustrait au temps d'injection (219 s et 673,9)), il n'y a plus de différences significatives entre les deux courbes de temps de calcul relatif. En effet, bien que le nombre d'inconnues demeure plus faible pour l'horizon de contrôle court, la forme du problème est tel que les valeurs de l'orientation après l'injection n'ont pas d'effets sur les contraintes et sur la partie du critère lié au suivi de trajectoire. Ainsi, l'algorithme d'optimisation est rapidement en mesure d'obtenir leur valeur optimale qui correspond à les maintenir égales à la valeur précédente, comme lorsque l'horizon de contrôle est plus court que l'horizon de prédiction.

Ainsi, bien qu'il existe un gain appréciable dans le temps de calcul, les variations plus importantes dans l'orientation commandée et, principalement, les problèmes de

cas testé	2 <sup>e</sup> étage [s]	3 <sup>e</sup> étage [s]
cas de base	1,0000	1,0000
$h_c$ court	0,4172	0,7132

TABLEAU 5.2 – Temps de calcul total obtenus avec un horizon de contrôle court

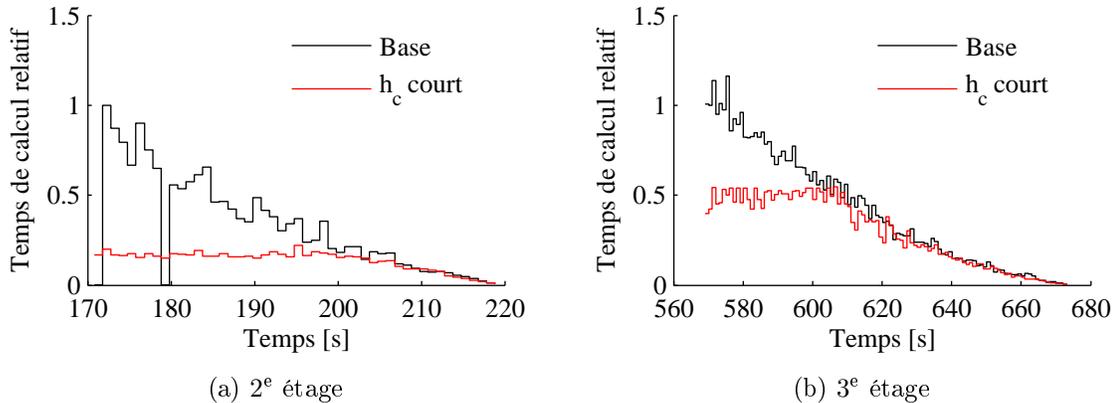


FIGURE 5.4 – Temps de calcul obtenus avec un horizon de contrôle court

convergence provenant du manque de liberté au début des phases de brûlage font que la diminution de l'horizon de contrôle n'est pas un bon choix pour améliorer le temps de calcul. Les contraintes de formage (section 5.4.3) améliorent le temps de calcul d'autant sans nuire aux autres bases de comparaison.

### 5.4.2 Effet des matrices de pondérations variantes

Un second paramètre très déterminant sur les résultats obtenus est la valeur des matrices de pondération du critère. Cette section n'étudie pas la valeur des matrices, celle-ci ayant été étudiée précédemment et le résultat est la valeur présentée dans les équations (5.17) et (5.18). Le but de cette section est plutôt d'étudier l'effet de matrices de pondération variantes dans le temps. Dans le critère de la commande prédictive (équation (5.10)), les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont fonctions de l'instant de prédiction  $l$ . Pour la trajectoire de lancement, ce qui importe est la trajectoire près de l'injection, qui se doit d'être près de celle de référence, un poids plus important peut être donné à la matrice  $\mathbf{Q}$  à ce moment. Les résultats suivants présentent un essai où la matrice de

pondération augmente proportionnellement avec le temps :

$$\mathbf{Q}_l = \frac{l}{5} \mathbf{Q} \quad (5.19)$$

Comme pour la section précédente, une comparaison entre le cas de base et cette formulation est effectuée. Cette comparaison se base sur les orbites atteintes (tableau 5.3), les orientations commandées (figure 5.5) et le temps de calcul (tableau 5.4 et figure 5.6).

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6862,5 ± 0,1	1294,0 ± 0,1	97,231 ± 0,001
cas de base	6862,3	1294,2	97,231
pondérations variantes	6862,1	1294,6	97,234

(a) Orbite de dérive

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6871,0 ± 0,1	6871,0 ± 0,1	97,375 ± 0,001
cas de base	6871,3	6870,5	97,375
pondérations variantes	6871,2	6868,3	97,375

(b) Orbite à l'injection

TABLEAU 5.3 – Résultats obtenus avec des pondérations variantes

On y constate que les pondérations variantes affectent la précision des orbites atteintes. Le cas avec les pondérations variantes produit une différence marquée sur le rayon du périégée de l'orbite finale. Cette différence s'explique par les différences des poids dans le critère. Puisque les termes du suivi de la trajectoire de référence loin dans la prédiction deviennent prédominants sur les termes des incréments de commande, le Jacobien du critère, utilisé par l'algorithme d'optimisation, est très mal conditionné. Les problèmes de convergence près de l'injection sont ainsi plus importants pour cette formulation que pour la formulation de base. Ces différences de poids dans le critère expliquent également les grandes différences entre deux commandes successives sur toute la durée de la simulation. En effet, dans le critère, les incréments de commande se retrouvent avec un poids négligeable par rapport aux derniers instants de la trajectoire. Ainsi, l'optimisation cherche à minimiser la différence entre la fin de la trajectoire prédite et la fin de la trajectoire désirée en ne considérant que très peu les incréments de

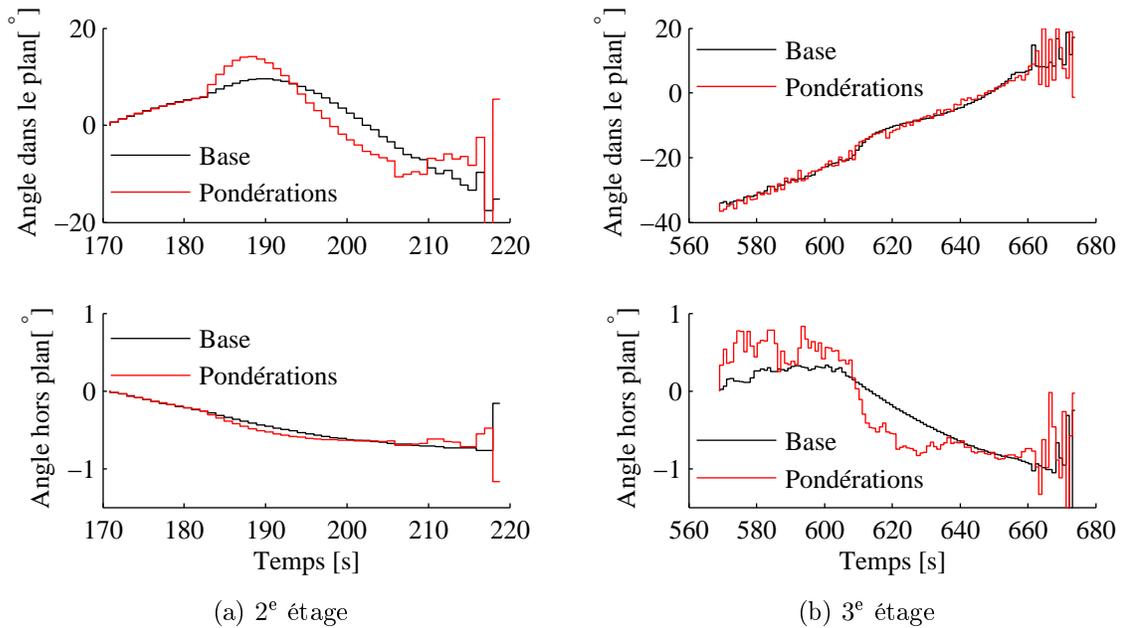


FIGURE 5.5 – Orientations commandées, pour des pondérations variantes

commande qui peuvent alors varier beaucoup. Bien que le résultat de l’optimisation soit optimal pour ce critère, il ne l’est pas pour l’application. Cette modification au critère n’est pas un bon choix pour améliorer les performances globales de l’algorithme puisqu’elle rend le critère pas optimal pour l’application considérée.

L’utilisation d’une matrice de pondération variante entraîne un déplacement de la zone importante avec les itérations. L’estimation initiale de la solution est donc légèrement moins bonne. Ceci cause une légère augmentation du temps de calcul, mais ce n’est pas le point faible majeur de cette formulation.

cas testé	2 <sup>e</sup> étage [s]	3 <sup>e</sup> étage [s]
cas de base	1,0000	1,0000
pondérations variantes	1,0867	1,0463

TABLEAU 5.4 – Temps de calcul total obtenus avec des pondérations variantes

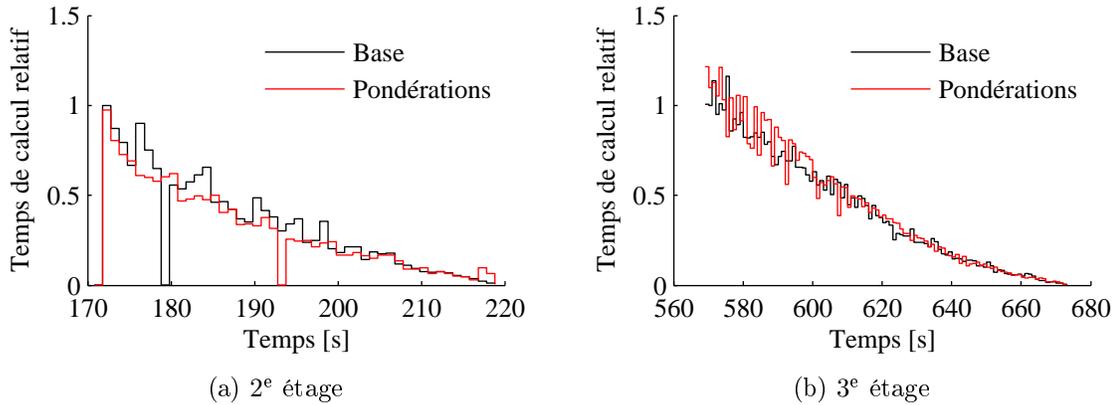


FIGURE 5.6 – Temps de calcul obtenus avec des pondérations variantes

### 5.4.3 Effet des contraintes de formage

L'analyse effectuée à la section 5.4.1 démontre que le temps de calcul peut être réduit en diminuant l'horizon de contrôle de la formulation. Cette diminution provient d'une diminution du nombre d'inconnues de l'algorithme d'optimisation. Cependant, cette diminution du nombre d'inconnues rétrécit également la région de convergence de l'algorithme. Cette section présente une façon de diminuer artificiellement le nombre d'inconnues tout en conservant la possibilité de modifier la valeur de l'orientation à la fin de l'horizon de contrôle et ainsi contourner le problème de la formulation avec un horizon de contrôle plus court. Pour ce faire, des contraintes supplémentaires sur les incréments de commande seront imposées. Ces contraintes sont similaires à celles utilisées par Scattolini et Schiavoni (1995); Cao *et al.* (2000); Halldorsson *et al.* (2002) pour commander un système à plusieurs temps d'échantillonnage. Dans cette thèse, les contraintes sur les incréments de commande sont utilisées pour donner une forme prédéterminée aux orientations commandées. Pour ce faire, certains incréments sont forcés, par des contraintes d'égalité, à être nuls :

$$\Delta \mathbf{u}_{k+l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I} \quad (5.20)$$

Puisque des contraintes d'égalité sont imposées à certains inconnues du problème d'optimisation, cette formulation entraîne une diminution du nombre d'inconnues. De plus, puisque la prédiction s'effectue en fonction des incréments de commande, l'ajout de ces contraintes dans la formulation ne se traduit pas par l'ajout de contraintes dans l'optimisation. Elles peuvent être résolues *a priori*. Ainsi, l'ajout de ces contraintes de formage dans la formulation se traduit par une diminution du nombre d'inconnues sans ajouter des contraintes à l'optimisation. Contrairement à la diminution de l'horizon de contrôle, il est possible de répartir les inconnues sur toute la durée de la trajectoire. Par

exemple, dans les résultats de cette section, des contraintes ont été définies pour former des paliers de 4 s à la fin de l'horizon de prédiction (figure 5.7). Ainsi, au début de la prédiction, l'algorithme fonctionne avec des paliers de 1 s alors que, à la fin, les paliers sont de 4 s. Comme le démontre le chapitre 3, l'utilisation de paliers plus longs ne pose pas de problèmes dans les propriétés de convergence. Pour pouvoir comparer le temps de calcul du cas avec un horizon de contrôle court (section 5.4.1), les contraintes sont choisies pour avoir autant d'inconnues dans les deux cas. Le problème avant la phase de dérive doit donc avoir 19 inconnues. Ainsi, la forme prédéfinie est composée de 9 paliers de 1 s suivis de 10 paliers de 4 s pour un horizon de contrôle de 49 avec 19 inconnues (figure 5.7a). Pour le problème après la phase de dérive, la forme choisie est composée 53 paliers simples suivis de 13 paliers de 4 s, soit 66 inconnues (figure 5.7b).

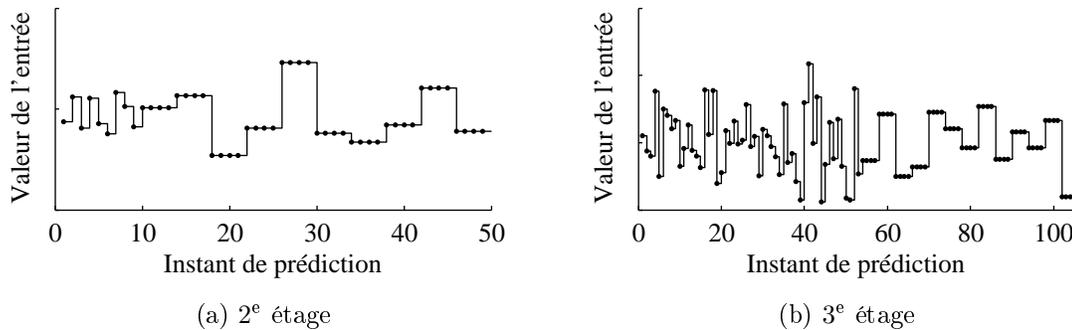


FIGURE 5.7 – Forme imposée à l'entrée

Les résultats suivants présentent la comparaison de ce cas avec la formulation de base, mais également avec les résultats de la section 5.4.1. En ce qui concerne la précision (tableau 5.5), ces contraintes supplémentaires n'affectent pas significativement la précision obtenue qui demeure dans le même ordre de grandeur que les deux autres cas.

Cependant, la différence sur les orientations commandées (figure 5.8) est significative, principalement au début des deux problèmes où le cas avec les contraintes de formage ressemble plus au cas de base que le cas avec l'horizon de contrôle plus court. Près de l'injection, les trois cas demeurent avec des problèmes puisqu'ils doivent résoudre un problème qui peut ne pas avoir de solution. Lorsqu'elle existe, cette solution n'est pas nécessairement bonne puisqu'elle demande de grandes manœuvres afin de corriger, en peu de temps, les erreurs.

Pour ce qui est du temps de calcul, la figure 5.9 montre que le temps de calcul du cas avec les contraintes de formage est moindre que celui avec un horizon de contrôle plus court. En effet, puisque l'horizon de contrôle est aussi long que l'horizon de pré-

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6862,5 ± 0,1	1294,0 ± 0,1	97,231 ± 0,001
cas de base	6862,3	1294,2	97,231
contraintes de formage	6862,3	1294,9	97,232
$h_c$ court	6862,4	1294,7	97,231

(a) Orbite de dérive

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6871,0 ± 0,1	6871,0 ± 0,1	97,375 ± 0,001
cas de base	6871,3	6870,5	97,375
contraintes de formage	6872,3	6870,7	97,374
$h_c$ court	6871,7	6870,8	97,376

(b) Orbite à l'injection

TABLEAU 5.5 – Résultats obtenus avec des contraintes de formage

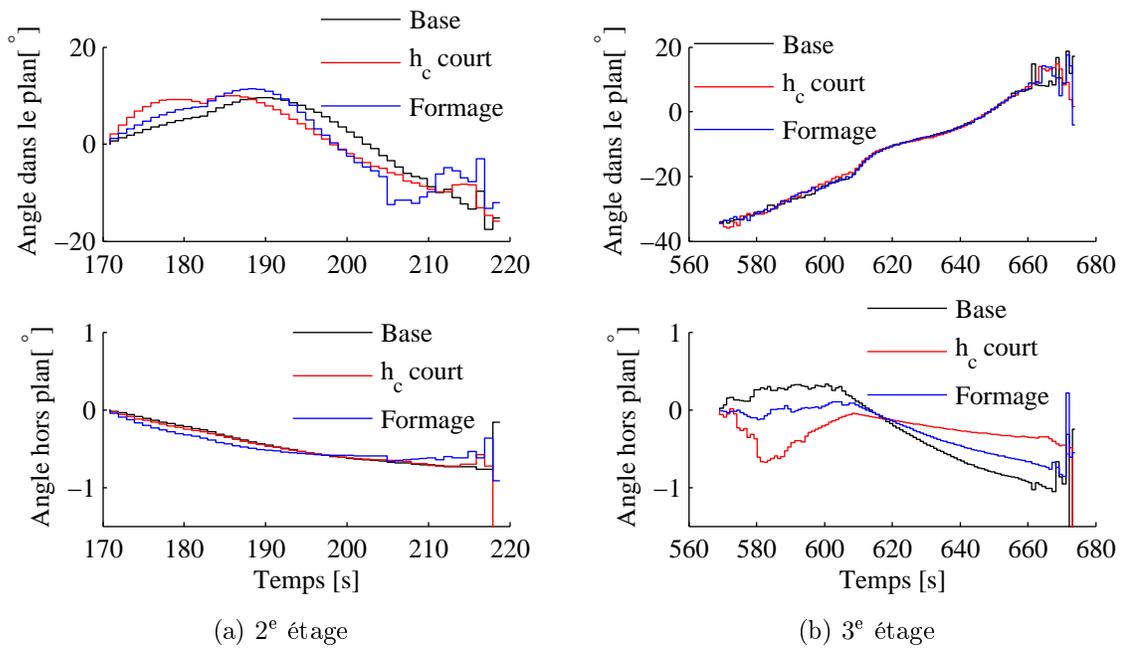


FIGURE 5.8 – Orientations commandées, pour des contraintes de formage

diction, dès la seconde itération il y a des inconnues qui se trouvent dans la phase non propulsée et n'affectent plus les contraintes et la partie du critère traitant du suivi de trajectoire. L'algorithme d'optimisation est donc en mesure de rapidement trouver leur valeur optimale. Dans le cas avec l'horizon de contrôle court, il faut attendre la 30<sup>e</sup> et la 40<sup>e</sup> itération avant que ceci se produise. À ce point, le nombre d'inconnus du cas avec les contraintes de formage demeure moindre que celui de l'horizon de contrôle court puisqu'il y a encore des paliers de 4 s qui affectent la trajectoire.

cas testé	2 <sup>e</sup> étage [s]	3 <sup>e</sup> étage [s]
cas de base	1,0000	1,0000
contraintes de formage	0,2904	0,4785
$h_c$ court	0,4172	0,7132

TABLEAU 5.6 – Temps de calcul total obtenus avec des contraintes de formage

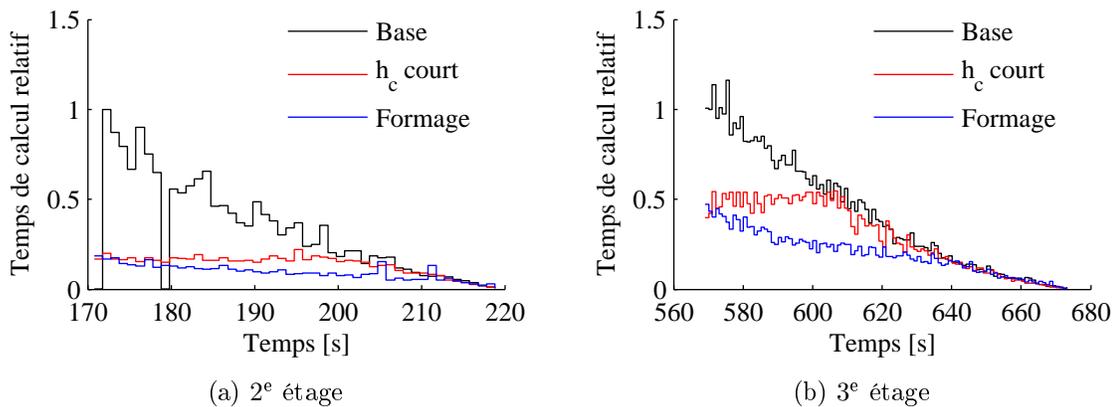


FIGURE 5.9 – Temps de calcul obtenus avec des contraintes de formage

Ainsi, de par le temps de calcul moindre, les contraintes de formage constituent une amélioration intéressante à apporter à la formulation de base du suivi de trajectoire par commande prédictive. De plus, à la différence de la diminution de l'horizon de contrôle, puisque cette formulation maintient des valeurs inconnues à la fin de la prédiction, les orientations commandées sont légèrement moins variantes au début des deux parties et il n'y a pas de problème de convergence avec l'algorithme d'optimisation.

#### 5.4.4 Effet de la variation de la précision

Les trois séries de résultats précédentes ont toutes le même problème près de l'injection, à savoir un problème de convergence résultant en une orbite qui ne correspond pas à celle désirée et à des orientations commandées de la poussée qui varient beaucoup. Ceci est dû au fait que l'algorithme demande une précision absolue à l'injection et ne gère pas le temps d'injection (Vittal et Bhat, 1993). Une modification simple qui permet d'éviter ces problèmes consiste à modifier les contraintes du problème d'optimisation (équation (5.14)) pour augmenter la dimension de la zone terminale. De ce fait, la formulation ne demande plus une précision absolue à l'injection. Cette simplification augmente le taux de convergence de l'optimisation et diminue les variations dans les orientations commandées. De plus, cette zone terminale définit la précision sur l'orbite atteinte, il est ainsi possible de spécifier la précision voulue pour la mission. Les spécifications de précision à l'injection de VEGA sont de 5 km sur l'altitude et de 0,05 ° sur l'inclinaison orbitale (VEGA, 2006) et celles du LM-2C sont de 6 km pour l'altitude et 0,05 ° pour l'inclinaison (LM-2C, 1999). Ces deux lanceurs ont des missions similaires à celles envisagées pour le lanceur de cette étude. Il est ainsi possible d'augmenter la valeur de  $\varepsilon$  et de maintenir une précision similaire aux lanceurs comparables. Cependant, les problèmes de convergence se produisent uniquement près de l'injection. Ainsi plutôt que d'utiliser une précision moindre pour toute la durée du lancement, une diminution graduelle de la précision est implémentée :

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si } k \leq t_f - 25 \\ (\varepsilon_f - \varepsilon_0)(t - t_f) + \varepsilon_f & \text{si } t_f - 25 < k \leq t_f - 5 \\ \varepsilon_f & \text{si } k > t_f - 5 \end{cases} \quad (5.21)$$

Ce qui est introduit dans les contraintes de précision de l'optimisation :

$$-\mathbf{P}\varepsilon_k \leq \mathbf{P} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{ak+h_p} - r_{ad} \\ \tilde{r}_{pk+h_p} - r_{pd} \\ \tilde{i}_{k+h_p} - i_d \end{bmatrix} \leq \mathbf{P}\varepsilon_k \quad (5.22)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de normalisation des contraintes :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Cette formulation est préférable à une formulation où uniquement la précision finale ( $\varepsilon$ ) serait utilisée. Les premières itérations pourraient donner une précision moindre qui serait propagée, via l'utilisation du résultat comme estimation initiale de l'itération

suivante, sur tout le lancement. La précision finale serait ainsi moindre que la diminution graduelle effectuée dans cette thèse. Cette diminution graduelle profite du temps disponible, au début du lancement, pour maintenir une précision absolue et garder le lanceur près de sa trajectoire de référence. Lorsque le problème devient plus difficile à résoudre et que la zone terminale s'élargit, l'élargissement s'effectue symétriquement par rapport à la position actuelle du lanceur. Cependant, une formulation où la précision finale est utilisée partout aurait tendance à rapidement amener la solution vers les contraintes créant une dissymétrie dans la différence entre la position actuelle du lanceur et les contraintes. Cette dissymétrie est telle que certaines perturbations ne pourront être corrigées puisqu'elles se retrouvent dans la direction du petit écart avec la contrainte.

Concernant la stabilité de l'algorithme, la formulation demeure dans le schéma de la commande prédictive par mode duel (section 4.2). Il suffit de développer un contrôleur statique qui permet à l'état du système de demeurer à l'intérieur de la zone terminale la plus large qui est rencontrée. Un contrôleur fonctionnant dans la plus grande zone va nécessairement fonctionner dans une zone plus mince.

Afin de limiter la différence entre le point initial de référence et celui réel du problème après la phase de dérive, la zone terminale du problème avant la phase de dérive est plus faible que celle de la précision à l'injection. Les résultats présentés dans la suite de cette section s'obtiennent avec la précision initiale de  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [0,5 \ 0,5 \ 0,001]^T$  pour les deux problèmes, mais une précision finale de  $\boldsymbol{\varepsilon}_f = [1,5 \ 1,5 \ 0,005]^T$  pour le problème avant la phase de dérive et de  $\boldsymbol{\varepsilon}_f = [4,0 \ 4,0 \ 0,05]^T$  pour celui après la dérive.

Les orbites atteintes (tableau 5.7) pour les simulations avec la précision variée dans le temps sont différentes de celles désirées, mais elles sont à l'intérieur de la zone terminale nouvellement définie.

Le fait que les contraintes ne sont pas violées et que le problème d'optimisation est réalisable donne des orientations commandées moins variantes que le cas de base (figure 5.10). La différence est principalement visible près de l'injection du 3<sup>e</sup> étage. Pour le second étage, puisque la zone terminale est plus petite, les orientations sont moins variantes, mais une variation importante demeure. De plus, pour toute la durée du brûlage du troisième étage, on constate une différence importante entre les deux cas. Cette différence provient de la différence lors de l'injection sur l'orbite de dérive. À la fin de la phase de dérive, l'état réel est donc significativement différent de l'état de la trajectoire de référence. De plus, la précision initiale ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ) est légèrement moindre que la précision absolue ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) du cas de base, ce qui explique également une partie des différences, particulièrement la faible réaction en réponse à la perturbation à 609 s.

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6862,5 ± 1,5	1294,0 ± 1,5	97,231 ± 0,005
cas de base	6862,3	1294,2	97,231
précision variante	6863,7	1295,2	97,233

(a) Orbite de dérive

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6871,0 ± 4	6871,0 ± 4	97,375 ± 0,05
cas de base	6871,3	6870,5	97,375
précision variante	6874,9	6872,3	97,367

(b) Orbite à l'injection

TABLEAU 5.7 – Résultats obtenus avec une précision variante

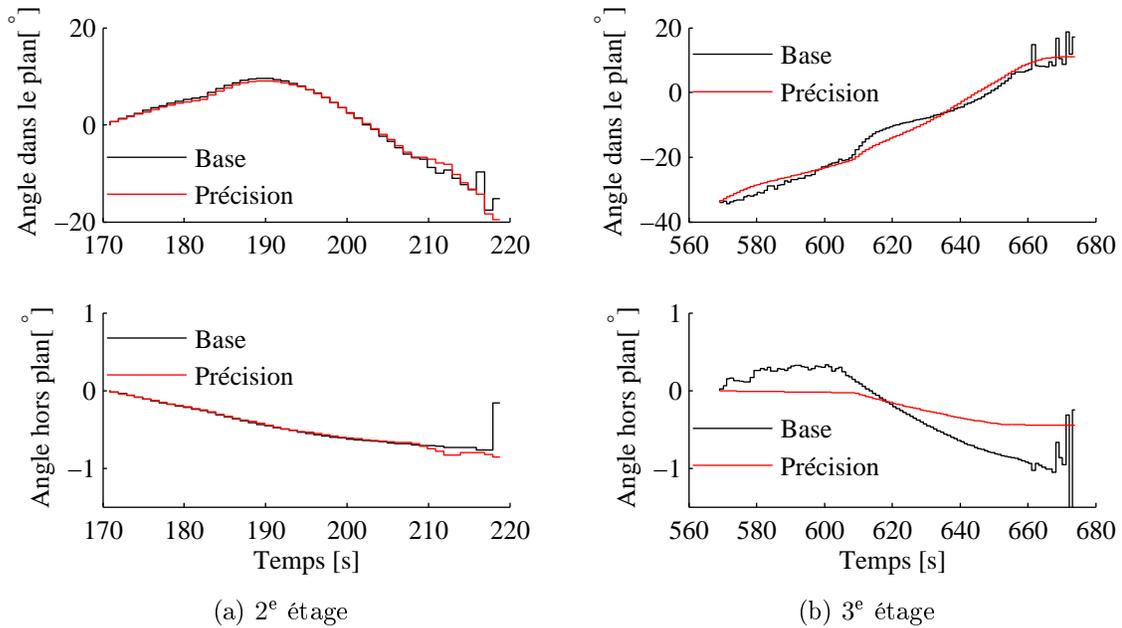


FIGURE 5.10 – Orientations commandées, pour une précision variante

Le problème d'optimisation du cas avec la précision variante étant plus simple, le temps calcul devrait être moindre pour ce cas, particulièrement dans les 25 dernières

secondes des deux problèmes. Le tableau 5.8 montre que le temps de calcul global est légèrement plus faible et la figure 5.11 montre que cette différence provient majoritairement des dernières itérations des deux problèmes qui sont plus courtes que celles du cas de base.

cas testé	2 <sup>e</sup> étage [s]	3 <sup>e</sup> étage [s]
cas de base	1,0000	1,0000
précision variante	0,9880	0,9261

TABLEAU 5.8 – Temps de calcul total obtenus avec une précision variante

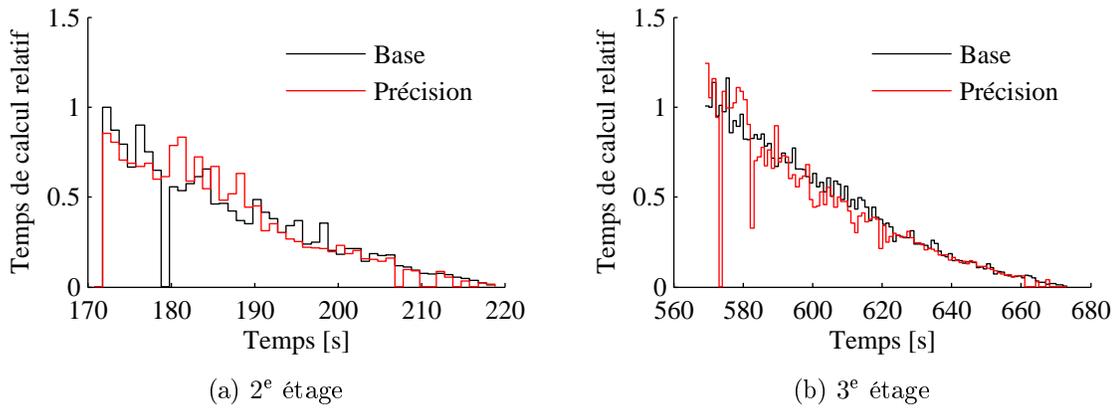


FIGURE 5.11 – Temps de calcul obtenus avec une précision variante

Ainsi, le but nécessitant la modification des contraintes de précision est atteint. Celle-ci a été effectuée pour diminuer les grandes variations dans les orientations commandées, principalement près de l’injection. En plus, la simplification du problème d’optimisation améliore le temps de calcul de l’algorithme de guidage. Les contraintes de précision variantes avec le temps sont donc une amélioration intéressante à apporter à la formulation de base.

### 5.4.5 Comparaison avec une solution de référence

Dans les quatre sections précédentes, les comparaisons s’effectuaient entre deux instances différentes de l’algorithme de guidage basé sur la commande prédictive non-linéaire. Cette dernière section du chapitre effectue une rapide comparaison avec un algorithme de référence couramment utilisé en guidage de lanceur (annexe E) afin

d'orienter la suite de l'étude. Une comparaison approfondie est réalisée au chapitre 7. Cette section regarde ainsi uniquement la précision de l'orbite finale (tableau 5.9) et le temps de calcul total (tableau 5.10). Ces tableaux incluent le cas de base et les deux modifications intéressantes, soit les contraintes de formage de l'entrée et la précision variante avec le temps. Ces tableaux montrent que la précision des différentes formulations est similaire, mais que l'algorithme de référence, basé sur la commande optimale, est beaucoup plus rapide que les algorithmes basés sur la commande prédictive. Le gain principal à obtenir dans la formulation par commande prédictive se situe donc du côté du temps de calcul.

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6871,0 ± 4	6871,0 ± 4	97,375 ± 0,05
cas de base	6871,3	6870,5	97,375
algorithme de référence	6873,1	6868,3	97,375
contraintes de formage	6872,3	6870,7	97,374
précision variante	6874,9	6872,3	97,367

TABLEAU 5.9 – Orbite finale atteinte

cas testé	2 <sup>e</sup> étage [s]	3 <sup>e</sup> étage [s]
cas de base	1,0000	1,0000
algorithme de référence	0,0095	0,0005
contraintes de formage	0,2904	0,4785
précision variante	0,9880	0,9261

TABLEAU 5.10 – Temps de calcul total

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre a développé une fonction de guidage sur le suivi de la partie exo-atmosphérique d'une trajectoire de référence d'un lanceur de satellites basée sur la commande prédictive non-linéaire. Cette fonction est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire contraint, ce qui lui permet d'être très versatile et de pouvoir être facilement modifié pour rendre la fonction plus orientée vers l'application considérée. La formulation de base du problème intègre les paramètres orbitaux dans les

équations de sortie du modèle afin de pouvoir partiellement définir la trajectoire de référence. Le critère utilisé est le critère de base de la commande prédictive correspondant à la somme pondérée de la différence entre la trajectoire de référence et la trajectoire prédite et des incréments de commande. Des contraintes sur la zone terminale autour de l'orbite à l'injection sont implémentées afin de placer la formulation dans le schéma de commande prédictive par mode duel assurant sa stabilité. Ces contraintes permettent également de définir la précision acceptée sur l'orbite finale.

Le dernier élément notable de la formulation est la division de la trajectoire en deux problèmes consécutifs. Cette division utilise la phase de dérive entre les deux phases propulsées pour créer une orbite d'injection intermédiaire pour le second étage. De ce fait, durant le second étage, la fonction de guidage a pour but d'injecter le troisième étage sur l'orbite de dérive et, durant le troisième étage, elle essaie d'injecter le satellite sur son orbite. Cette division est possible puisque, durant la phase de dérive, le lanceur n'est pas propulsé et que l'orientation commandée du vecteur de poussée n'a aucun effet sur l'orbite. Il est alors inutile de guider le lanceur durant cette phase de dérive.

Ce chapitre démontre que cette formulation de base permet d'atteindre l'orbite désirée avec des résultats très acceptables. Suite à cette première validation, des modifications ont été apportées afin d'améliorer les résultats. Des contraintes de formage de l'entrée ont été ajoutées afin de diminuer le nombre d'inconnues du problème d'optimisation et de diminuer le temps de calcul. Également, les contraintes définissant la précision de l'orbite à l'injection sont devenues variantes avec le temps écoulé depuis le lancement. Ceci permet de simplifier le problème d'optimisation près de l'injection, assurant sa convergence et diminuant la différence entre deux orientations commandées successives. Ces deux modifications permettent d'améliorer les performances de la formulation par commande prédictive non-linéaire, mais cette dernière demeure beaucoup moins rapide que l'algorithme de référence. Ainsi, la suite de l'étude doit se consacrer à l'amélioration du temps de calcul de la fonction de guidage développée.

# Chapitre 6

## Modélisation multi-modèles linéaires de la translation d'un lanceur

Le chapitre 5 a démontré que la commande prédictive non-linéaire est une méthode envisageable pour effectuer le guidage d'un lanceur sur sa trajectoire exo-atmosphérique. Les différentes modifications apportées à la formulation de base du problème d'optimisation améliorent grandement les résultats obtenus. Notamment, la modification des contraintes de précision et l'ajout de contraintes de formage des entrées permettent de diminuer les variations dans l'orientation de la poussée et de diminuer le temps de calcul. Cependant, comme mentionné par Maciejowski (2002), l'utilisation d'un modèle non-linéaire dans la prédiction n'est que rarement envisageable en pratique. En effet, la formulation linéaire de la commande prédictive crée un problème d'optimisation convexe qui assure l'obtention de l'optimum en un temps fini. Cependant, la formulation non-linéaire perd cette convexité et l'assurance de la convergence de l'algorithme d'optimisation.

Le présent chapitre est la première étape dans la formulation d'un algorithme de guidage basé sur la commande prédictive linéaire. Cette étape est la linéarisation des équations non-linéaires afin d'en obtenir un modèle linéaire. Cette linéarisation (section 6.1) est le calcul du modèle linéaire tangent des équations de la dynamique de translation. Le modèle linéaire obtenu est ensuite évalué à différents points de la trajectoire de référence afin d'étudier la linéarité du modèle sur cette trajectoire. La section 6.1.2 démontre cependant que les variations dans la dynamique sont trop importantes pour que l'utilisation d'un seul modèle linéaire sur toute la trajectoire de lancement assure la précision nécessaire.

Ces variations nécessitent donc de reconsidérer l'utilisation du guidage basé sur la

commande prédictive linéaire. Le problème de guidage correspond alors à un problème où les variations de points d'équilibre sont trop importantes et où un modèle linéaire à paramètre variant (LPV) peut être envisagé (Maciejowski, 2002). Les modèles LPV sont le pont entre les modèles non-linéaires et les modèles linéarisés (Bruzelius, 2004). Ces modèles correspondent à une famille de modèles linéarisés obtenus autour de plusieurs points d'opérations. Ces derniers se rapportent chacun à une valeur différente des paramètres de séquençement (Rugh et Shamma, 2000). L'utilisation principale de ce type de modèle est dans la commande par séquençement de gains (Rugh et Shamma, 2000) où ils servent à définir un contrôleur invariant autour de plusieurs points d'opération. Une interpolation de ces contrôleurs est ensuite effectuée afin d'obtenir les gains à appliquer en fonction de la valeur des paramètres de séquençement. Dans ce projet, l'interpolation est plutôt effectuée directement sur les modèles linéarisés afin d'obtenir un modèle linéaire paramétré selon des paramètres de séquençement.

La représentation ainsi obtenue nécessite cependant le stockage de plusieurs données. La transformation linéaire fractionnaire (LFT) permet d'encapsuler cette variation dans une forme compacte  $M - \Delta$  (Zhou *et al.*, 1996). Ceci diminue le nombre de données à conserver pour représenter la variation de la dynamique. La LFT est une alternative à la modélisation d'état et est principalement utilisée dans la modélisation de systèmes incertains (Zhou *et al.*, 1996). En effet, combiné à la synthèse- $\mu$  (Doyle, 1982), cette modélisation permet d'étudier de façon systématique l'effet des éléments incertains sur la dynamique d'un système. La transformation linéaire fractionnaire peut également modéliser un continuum de modèles linéarisés dans un domaine d'opération (Magni, 2006). Cette modélisation est similaire à celle de la représentation précédente et est utilisée dans cette thèse.

La section 6.2 introduit donc la théorie des modèles linéaires à paramètres variants et de la transformation linéaire fractionnaire. Par la suite, cette section présente l'application de ces théories à l'obtention des deux représentations multi-modèles linéaires sur la trajectoire complète. La section 6.3 valide ces représentations en les comparant à la dynamique non-linéaire linéarisée.

## 6.1 Linéarisation de la translation d'un lanceur

Cette section se consacre à la linéarisation des équations du mouvement utilisées dans le modèle de prédiction de l'algorithme de guidage du chapitre 5. Ce modèle se compose de deux groupes d'équations. Le premier explique la dynamique de l'état alors que le second définit la relation entre les sorties considérées et les composantes du

vecteur d'état. Les équations d'état considérées sont celles de la modélisation à pseudo-5ddl de la dynamique de translation d'un lanceur (chapitre 2) :

$$\dot{m} = \Delta_m \quad (6.1a)$$

$$\dot{r} = v \sin(\gamma) \quad (6.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = & \frac{F_p \cos \vartheta \cos \varphi}{m} - g_r \sin \gamma + g_\delta \cos \chi \cos \gamma \\ & - \omega_e^2 r \cos \delta (\sin \delta \cos \chi \cos \gamma - \cos \delta \sin \gamma) \end{aligned} \quad (6.1c)$$

$$\dot{\delta} = \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r} \quad (6.1d)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos \delta} \quad (6.1e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{F_p \cos \vartheta \sin \varphi}{mv \cos \gamma} - \frac{g_\delta \sin \chi}{v \cos \gamma} - \frac{2\omega_e}{\cos \gamma} (\sin \gamma \cos \delta \cos \chi - \cos \gamma \sin \delta) \\ & + \frac{v}{r} \sin \chi \cos \gamma \tan \delta + \frac{\omega_e^2}{v \cos \gamma} r \cos \delta \sin \delta \sin \chi \end{aligned} \quad (6.1f)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & \frac{-F_p \sin \vartheta}{mv} - \frac{g_r}{v} \cos \gamma - \frac{g_\delta}{v} \cos \chi \sin \gamma + \frac{v}{r} \cos \gamma \\ & + 2\omega_e \sin \chi \cos \delta + \frac{\omega_e^2 r \cos \delta}{v} (\cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \chi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (6.1g)$$

$$\dot{\vartheta} = \vartheta_{com} - \vartheta \quad (6.1h)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_{com} - \varphi \quad (6.1i)$$

Pour simplifier l'écriture de la suite du développement, ces équations sont réécrites sous forme vectorielle :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (6.2)$$

où le vecteur d'entrée du système est l'orientation commandée du vecteur de poussée ( $\mathbf{u} = [\vartheta_{com} \ \varphi_{com}]^T$ ) et le vecteur d'état est  $\mathbf{x} = [m \ r \ v \ \delta \ \lambda \ \chi \ \gamma \ \vartheta \ \varphi]^T$ .

Cette thèse suggère d'effectuer le suivi d'une trajectoire de référence définie par ses paramètres orbitaux plutôt que par ses vecteurs de position et de vitesse. Ceci permet de suivre une trajectoire partiellement définie (section 5.1.2). Les équations de sortie correspondent ainsi aux équations permettant de passer des composantes du vecteur d'état de l'approche angulaire aux paramètres orbitaux étudiés. Dans le chapitre 5, les paramètres étudiés sont le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison orbitale. Cependant, pour la linéarisation, l'utilisation de l'excentricité n'est pas envisageable. En effet, l'équation mathématique définissant cette dernière (équation (2.164)) nécessite le calcul d'une racine carrée d'un nombre très petit. Ainsi, dans la linéarisation, qui nécessite le calcul de la dérivée, une division par un nombre près de 0 est nécessaire. La valeur de la dérivée, et donc de l'approximation linéaire, est ainsi près de l'infini. Cette division cause donc des problèmes numériques. Une alternative est d'utiliser le

carré de l'excentricité pour éviter la division dans la linéarisation. Cependant, dans ce cas, les problèmes numériques se produisent lors de l'utilisation des approximations multi-modèles comme modèle de prédiction dans l'algorithme de guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles (chapitre 7). La prédiction effectuée pourrait donner des valeurs de l'excentricité inférieure à 0 risquant d'engendrer des problèmes numériques et des problèmes de validité des résultats. La seconde alternative, celle utilisée dans la suite de l'étude, consiste plutôt en l'utilisation d'une représentation alternative de la forme de l'orbite. Selon Wie (2008), le demi-grand axe et l'excentricité sont des constantes géométriques de l'ellipse orbitale alors que le moment angulaire spécifique ( $h$ ) et l'énergie mécanique spécifique ( $\mathcal{E}$ ) sont des constantes dynamiques de l'orbite. Il existe donc un lien direct entre celles-ci qui pourra être utilisé pour contourner les problèmes posés par l'utilisation de l'excentricité.

Le moment angulaire spécifique correspond à la norme du vecteur (équation (2.154)) utilisé au chapitre 2 pour définir l'orientation du plan orbital. Il correspond au moment angulaire du lanceur divisé par sa masse. Il est lié aux constantes géométriques par l'équation suivante (Wie, 2008) :

$$h = \sqrt{\mu_e a (1 - e^2)} \quad (6.3)$$

Cette équation ne règle donc pas les problèmes puisqu'elle nécessite le calcul de l'excentricité. Cependant, en utilisant la définition du vecteur du moment spécifique angulaire :

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})}{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (6.4)$$

et, en exprimant les vecteurs dans le système de coordonnées local, il est possible d'obtenir la norme du vecteur défini directement à partir de composantes du vecteur d'état du modèle :

$$h = r v_i \cos \gamma_i \quad (6.5)$$

où  $v_i$  et  $\gamma_i$  sont les valeurs inertielles calculées en utilisant les équations (2.159) et (2.161).

L'énergie mécanique spécifique est l'énergie totale de l'orbite divisée par la masse de l'objet orbitant. Elle est donc la sommation de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E} = \frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu_e}{r} \quad (6.6)$$

Les lois de Kepler sont basées sur la conservation de l'énergie sur l'orbite et permettent, via l'égalité de l'énergie mécanique spécifique à l'apogée et au périogée, de lier le demi-grand axe à cette énergie :

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_e}{2a} \quad (6.7)$$

Contrairement au moment spécifique angulaire, l'énergie mécanique spécifique ne requiert pas l'excentricité. Malgré tout, la première définition (équation (6.6)) est utilisée

dans les équations de sortie du modèle de prédiction. Il convient de mentionner que, pour une orbite elliptique ou circulaire, cette énergie est négative.

Ainsi, les équations de sortie considérées dans la suite de l'étude sont :

$$h = rv_i \cos \gamma_i \quad (6.8a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu_e}{r} \quad (6.8b)$$

$$i = \arccos(\sin \chi_i \cos \delta) \quad (6.8c)$$

Comme pour les équations d'état, afin de simplifier la suite ce chapitre, une forme vectorielle de ces équations est définie :

$$\mathbf{y} = \mathbf{o}(\mathbf{x}) \quad (6.9)$$

où le vecteur de sortie est composé des trois paramètres orbitaux étudiés ( $\mathbf{y} = [h \ \mathcal{E} \ i]^T$ ).

### 6.1.1 Modèle linéaire tangent

Les deux groupes d'équations composant le modèle de prédiction non-linéaire viennent d'être définis et modifiés afin de contourner les problèmes pouvant survenir lors de la linéarisation. Cette linéarisation s'effectue par la théorie du modèle linéaire tangent. Cette théorie consiste à exprimer le comportement non-linéaire du système par une approximation linéaire autour d'un point d'opération. Cette approche produit un modèle linéaire, valide autour de ce point d'opération. Elle repose sur le calcul du développement multivarié de Taylor du premier ordre :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &+ \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{f}_{o.s.}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

où  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{u}_0$  sont la valeur de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{u}$  au point d'opération et  $\mathbf{f}_{o.s.}$  représente les termes d'ordre supérieur du développement de Taylor. En utilisant la notation  $\Delta_o$  pour indiquer l'écart entre le point d'opération et la valeur calculée, l'équation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} \Delta_o \mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \Delta_o \mathbf{x} \\ &+ \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \Delta_o \mathbf{u} + \mathbf{f}_{o.s.}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

En notant  $\mathbf{A}$  le Jacobien de  $\mathbf{f}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  évalué au point d'opération et  $\mathbf{B}$  le Jacobien de  $\mathbf{f}$  par rapport à  $\mathbf{u}$  évalué au point d'opération et en négligeant les termes d'ordres supérieurs, l'équation (6.11) devient l'équation linéaire d'évolution des états autour du point d'opération :

$$\dot{\Delta_o \mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta_o \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta_o \mathbf{u} \quad (6.12)$$

L'équation de sortie ne dépendant que de l'état, un processus similaire basé sur le développement monovarié de Taylor du premier ordre est utilisé :

$$\mathbf{o}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(\mathbf{x}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{o}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{o}_{o.s.}(\mathbf{x}) \quad (6.13)$$

et l'équation linéaire de sortie s'obtient en notant  $\mathbf{C}$  le Jacobien de  $\mathbf{o}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  évalué au point d'opération :

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta_o \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta_o \mathbf{u} \quad (6.14)$$

Ainsi, en calculant trois Jacobiens, il est possible d'obtenir le modèle linéaire autour d'un point d'opération d'un système dont la dynamique non-linéaire est exprimée par deux groupes d'équations. Le modèle linéaire de la translation du lanceur s'obtient en calculant le Jacobien des équations (6.1) et (6.8). Ces calculs ne sont pas explicités puisqu'ils n'apportent rien à la compréhension et qu'ils deviennent rapidement trop lourds à écrire. Cependant, pour orienter l'analyse de linéarité de la section 6.1.2 et le développement des multi-modèles linéarisés de la section 6.2, la structure de chacun des trois Jacobiens est étudiée. En analysant les dépendances des équations du modèle à pseudo-5ddl, il est possible de constater que plusieurs termes de la matrice d'évolution de l'état (matrices  $\mathbf{A}$ ) sont nuls. Cette analyse donne la structure suivante, où les termes nuls et unitaires sont explicités :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{(2,3)} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{(2,7)} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{(3,1)} & \mathbf{A}_{(3,2)} & 0 & \mathbf{A}_{(3,4)} & 0 & \mathbf{A}_{(3,6)} & \mathbf{A}_{(3,7)} & \mathbf{A}_{(3,8)} & \mathbf{A}_{(3,9)} \\ 0 & \mathbf{A}_{(4,2)} & \mathbf{A}_{(4,3)} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{(4,6)} & \mathbf{A}_{(4,7)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{(5,2)} & \mathbf{A}_{(5,3)} & \mathbf{A}_{(5,4)} & 0 & \mathbf{A}_{(5,6)} & \mathbf{A}_{(5,7)} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{(6,1)} & \mathbf{A}_{(6,2)} & \mathbf{A}_{(6,3)} & \mathbf{A}_{(6,4)} & 0 & \mathbf{A}_{(6,6)} & \mathbf{A}_{(6,7)} & \mathbf{A}_{(6,8)} & \mathbf{A}_{(6,9)} \\ \mathbf{A}_{(7,1)} & \mathbf{A}_{(7,2)} & \mathbf{A}_{(7,3)} & \mathbf{A}_{(7,4)} & 0 & \mathbf{A}_{(7,6)} & \mathbf{A}_{(7,7)} & \mathbf{A}_{(7,8)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Pour la matrice d'entrée (matrice  $\mathbf{B}$ ), l'analyse des équations d'état permet d'obtenir

sa valeur, qui est indépendante du point d'opération.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

De même, les trois paramètres orbitaux considérés sont indépendants de la masse, de la longueur du lanceur et de l'orientation du vecteur de poussée. Ainsi, la matrice de sortie ( $\mathbf{C}$ ) a la structure suivante :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{(1,2)} & \mathbf{C}_{(1,3)} & \mathbf{C}_{(1,4)} & 0 & \mathbf{C}_{(1,6)} & \mathbf{C}_{(1,7)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{(2,2)} & \mathbf{C}_{(2,3)} & \mathbf{C}_{(2,4)} & 0 & \mathbf{C}_{(2,6)} & \mathbf{C}_{(2,7)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{(3,2)} & \mathbf{C}_{(3,3)} & \mathbf{C}_{(3,4)} & 0 & \mathbf{C}_{(3,6)} & \mathbf{C}_{(3,7)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

et la matrice de transmission directe ( $\mathbf{D}$ ) est nulle.

### 6.1.2 Étude de la linéarité du modèle

Les éléments non nuls et non unitaires des trois matrices du système linéaire sont le résultat de l'évaluation des Jacobiens à un point d'opération. Avec l'algorithme de guidage basé sur la commande prédictive, la trajectoire suivie par le lanceur devrait être assez près de la trajectoire de référence pour que les points d'opérations puissent être choisis sur cette trajectoire. Dans cette section, afin d'étudier la linéarité et la variation de la dynamique du système, les Jacobiens de la section précédente sont évalués sur la trajectoire de référence (section 3.3.2). Une famille de modèles linéaires s'obtient en répétant cette opération à toutes les secondes de la trajectoire de référence.

Cette famille sert, par les tracés de l'évolution temporelle des éléments variables des Jacobiens, à étudier la variation des modèles linéarisés. Par exemple, la figure 6.1a présente l'évolution temporelle de l'élément  $\mathbf{A}_{(3,2)}$  et la figure 6.1b est l'évolution de l'élément  $\mathbf{C}_{(1,6)}$  en fonction du temps.

L'analyse de cette figure permet de constater que les éléments composant les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{C}$  varient beaucoup sur la trajectoire de référence. Cette variation permet

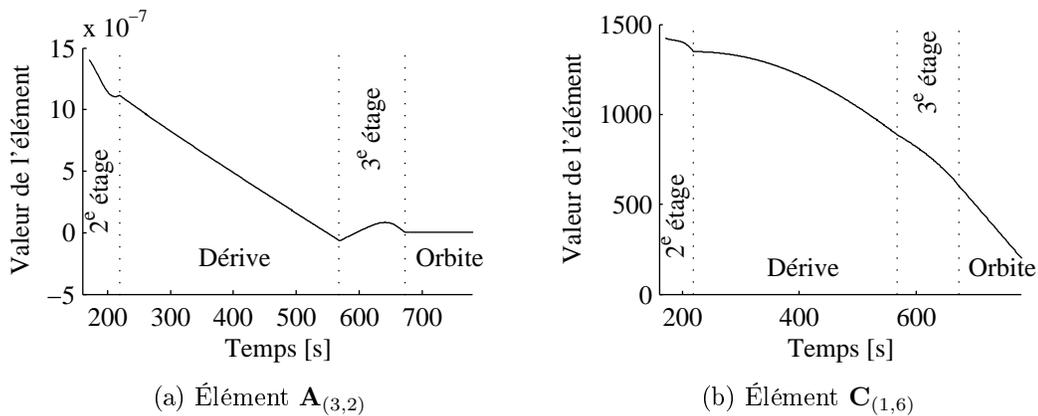


FIGURE 6.1 – Évolution temporelle des Jacobiens

de conclure que l'utilisation de la même matrice sur toute la trajectoire n'est pas envisageable. Les différences sont trop marquées pour assurer un niveau de représentativité satisfaisant.

Cependant, ces figures montrent également que la variation des différents éléments est structurée. En effet, les figures démontrent que la variation de la valeur de l'élément diffère selon la phase du lancement, mais que, à l'intérieur d'une phase, l'évolution est monotone. Cette évolution peut ainsi s'exprimer par quatre polynômes temporels différents, un pour chaque phase du lancement.

## 6.2 Multi-modèles linéarisés du lanceur

La section précédente conclut que le modèle linéaire de la translation du lanceur varie en fonction du temps et que, pour assurer une représentativité satisfaisante lors de l'utilisation de cette linéarisation dans un algorithme de guidage, une représentation linéaire variante dans le temps (LTVR) doit être utilisée. Cette conclusion est basée sur l'analyse d'une famille de modèles linéarisés autour de différents points d'opération. Ce type de famille est la base des modèles linéaires à paramètres variants (Rugh et Shamma, 2000). La section 6.2.1 présente ce type de modèle.

La famille de modèles linéarisés et le modèle linéaire à paramètres variants peuvent être utilisés pour former une représentation linéaire fractionnelle (LFR) (Magni, 2006) qui encapsule la variation dans la forme  $M - \Delta$  de la transformation linéaire fractionnelle. Cette représentation et son application à la modélisation d'une famille de modèles linéarisés sont présentées à la section 6.2.2.

La section 6.2.3 reprend les développements de la LTVR et ceux de la LFR pour les appliquer au cas spécifique de la modélisation de la dynamique de translation d'un lanceur afin de les utiliser dans un algorithme de guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles (chapitre 7).

### 6.2.1 Modèle linéaire à paramètres variants

Les modèles linéaires à paramètres variants sont la base du développement d'une commande par séquençement de gains (Rugh et Shamma, 2000). En effet, la commande par séquençement de gains consiste à développer un contrôleur linéaire pour différents modèles linéaires d'un système non-linéaire. La famille de contrôleurs résultante forme un ensemble où la valeur des gains est déterminée selon la valeur des paramètres de séquençement. Le développement d'un modèle linéaire à paramètres variants d'un système non-linéaire correspond ainsi à la première étape du développement de la commande par séquençement de gains. Ce développement s'effectue de deux façons différentes (Rugh et Shamma, 2000). La méthode classique consiste en une approche basée sur la linéarisation alors que l'approche plus récente (quasi-LPV) consiste à réécrire les équations non-linéaires du système de façon à cacher les variations non-linéaires dans des variables qui deviennent les paramètres de séquençement.

L'approche par linéarisation consiste à écrire le système non-linéaire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}_s) \\ \mathbf{y}(\boldsymbol{\sigma}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}_s) & | & \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_s) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}_s) & | & \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\boldsymbol{\sigma}_s) \\ \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}_s) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_s$  sont les paramètres de séquençement. Pour chaque valeur de  $\boldsymbol{\sigma}_s$  à l'intérieur du domaine d'opération, les quatre matrices linéaires sont obtenues en calculant les Jacobiens des équations d'état et de sortie (section 6.1.1) et en les évaluant à différents endroits sur la trajectoire de référence (section 6.1.2). Par la suite, dans les techniques de séquençement de gains, un contrôleur serait calculé pour chacun des modèles linéaires et une interpolation serait effectuée sur les contrôleurs. Pour la modélisation d'un système non-linéaire, l'interpolation est effectuée directement sur les modèles linéarisés en cherchant une fonction d'interpolation sur les matrices et leurs composantes.

L'approche quasi-LPV consiste plutôt à modéliser exactement le système nonlinéaire et sans passer par l'obtention d'un continuum de modèles linéarisés. Pour ce faire, le vecteur d'état est séparé en deux parties, dont une correspond aux paramètres de séquençement :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\sigma \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Ceci permet alors de mettre le système non-linéaire sous une forme linéaire à paramètres variants où les paramètres de séquençement font partie du modèle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\sigma \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_s \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{xx}(\boldsymbol{\sigma}_s) & \mathbf{A}_{x\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_s) & \mathbf{B}_x(\boldsymbol{\sigma}_s) \\ \mathbf{A}_{\sigma x}(\boldsymbol{\sigma}_s) & \mathbf{A}_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_s) & \mathbf{B}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_s) \\ \mathbf{C}_x(\boldsymbol{\sigma}_s) & \mathbf{C}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_s) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}_s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\sigma \\ \boldsymbol{\sigma}_s \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Dans cette approche, il n'y a pas de dépendance aux points d'équilibre présent, par le séquençement de l'entrée et de la sortie, dans l'approche par linéarisation. La difficulté de cette approche est de choisir les paramètres de séquençement. En effet, dans l'approche par linéarisation, le choix du paramètre peut s'effectuer à la suite de la linéarisation par une analyse *a posteriori* de la famille de modèles résultante. Cependant, dans l'approche quasi-LPV, le paramètre doit être choisi *a priori* afin de construire le modèle. De plus, bien qu'elle soit réalisable pour plusieurs véhicules (missiles (Shamma et Cloutier, 1993) et avion (Marcos et Balas, 2004)), l'application de la méthode quasi-LPV ne s'applique pas à tous les systèmes non-linéaires puisque le paramètre de séquençement doit apparaître explicitement dans le vecteur d'état de ces derniers.

L'application considérée dans cette thèse, la translation d'un lanceur, est un système non-linéaire sur lequel l'approche quasi-LPV ne semble pas applicable. L'analyse des équations du système ne permet pas de trouver un paramètre de séquençement valide dans l'état. La méthode par linéarisation doit donc être utilisée. Ainsi, la représentation à paramètres variants est l'interpolation du continuum de matrices linéarisées développé lors de l'étude de la linéarité du système (section 6.1.2). La conclusion de cette section était que la variation de la dynamique de translation du lanceur est structurée et qu'elle s'exprime par une fonction temporelle. Le temps est donc un choix de paramètres de séquençement intéressant pour cette application, notamment puisque sa valeur est connue *a priori*. L'utilisation du temps comme variable de séquençement est envisageable uniquement pour une application de suivi de trajectoire de lancement. Dans ce cas, le temps devient un paramètre définissant le domaine d'opération puisque la trajectoire doit être suivie avec précision et que cette trajectoire est définie en fonction du temps, particulièrement lorsque l'argument du périégée et la longitude du nœud ascendant sont considérés. L'obtention de cette représentation linéaire variante dans le temps (LTVR) de la dynamique de translation du lanceur est effectuée à la section 6.2.3.

## 6.2.2 Représentation fractionnelle linéaire

La représentation fractionnelle linéaire (LFR) est l'application de la transformation linéaire fractionnelle (LFT) à la représentation d'un système dynamique. Tel que introduit par Zhou *et al.* (1996), une LFT est la forme matricielle de l'application  $\mathcal{F} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$

tel que :

$$\mathcal{F}(s) = \frac{a + bs}{c + ds} \quad (6.21)$$

Sous forme matricielle, cette application devient  $\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta) : \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \mapsto \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$  tel que :

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta) \triangleq \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21} \Delta (\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11} \Delta)^{-1} \mathbf{M}_{12} \quad (6.22)$$

Ceci est une *upper*-LFT (figure 6.2a) et se représente par l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_u \\ \mathbf{z}_u \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{w}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{w}_u \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{w}_u = \Delta_u \mathbf{z}_u \quad (6.24)$$

Ainsi, une LFT sera bien définie si la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11} \Delta)$  est inversible (Zhou *et al.*, 1996).

La *lower*-LFT, où le bloc  $\Delta$  est sous le bloc  $\mathbf{M}$  (figure 6.2b), est équivalente à une *upper*-LFT (Zhou *et al.*, 1996) où l'application est plutôt :

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{M}, \Delta) \triangleq \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12} \Delta (\mathbf{I} - \mathbf{M}_{22} \Delta)^{-1} \mathbf{M}_{21} \quad (6.25)$$

et, sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_l \\ \mathbf{y}_l \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{w}_l = \Delta_l \mathbf{z}_l \quad (6.27)$$

Dans la suite du document, la LFT utilisée est l'*upper*-LFT, puisque la transposition vers la LFR (équation (6.31)) présente les matrices d'état dans la représentation usuelle.

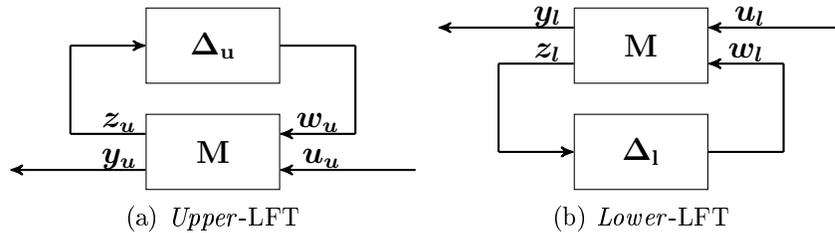


FIGURE 6.2 – Transformations linéaires fractionnelles

Une interprétation intéressante de la LFT et que  $\mathbf{M}_{22}$  est l'application nominale de  $\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta)$  où cette application est perturbée par le bloc  $\Delta$  et  $\mathbf{M}_{11}$ ,  $\mathbf{M}_{12}$  et  $\mathbf{M}_{21}$  sont les connaissances *a priori* de l'effet de cette perturbation sur l'application nominale.

Cette interprétation explique pourquoi la LFR est principalement utilisée dans l'étude de la robustesse aux incertitudes d'un système linéaire (Cockburn et Morton, 1997).

La LFT étant une application mathématique, plusieurs définitions et propriétés y sont donc rattachées. Celles-ci sont très bien décrites dans Zhou *et al.* (1996) et ne seront pas présentées dans cette thèse puisque la LFT ne constitue qu'un outil permettant d'obtenir la représentation.

La LFT est donc un outil intéressant permettant de formuler une opération mathématique pour l'encapsuler dans la forme  $M - \Delta$  caractéristique. Un polynôme, une fonction rationnelle et la transformation du domaine continu au domaine discret sont des exemples d'opérations pouvant être réécrites sous la forme d'une LFT. Une représentation d'état d'un système linéaire (équations (6.28) et (6.29)) peut également être écrite sous la forme d'une LFT. La représentation ainsi obtenue s'appelle alors une représentation linéaire fractionnelle (LFR).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6.28)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (6.29)$$

La matrice de transfert de cette représentation est (Kuo et Golnaraghi, 2003) :

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (6.30)$$

En prenant  $\Delta = \frac{1}{s}\mathbf{I}$ , cette équation est strictement équivalent à une LFT (équation (6.22))

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{F}_u \left( \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \frac{1}{s}\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \end{array} \right], \frac{1}{s}\mathbf{I} \right) = \mathbf{D} + \mathbf{C} \left( \frac{1}{s}\mathbf{I} \right) \left( \mathbf{I} - \left( \frac{1}{s}\mathbf{I} \right) \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} \quad (6.31)$$

Il a été mentionné précédemment que l'utilisation principale de la LFR est dans l'analyse de robustesse d'un système linéaire. En effet, la propriété principale des LFTs est que l'interconnexion de LFTs produit une LFT. Ainsi, il est possible de combiner la LFR avec des incertitudes sur les paramètres physiques du modèle pour obtenir une LFR d'un système incertain (figure 6.3). Cette LFR correspond à l'application :

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}_u \left( \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{array} \right] \right) \mathbf{u} \quad (6.32)$$

Le bloc d'incertitudes est alors une matrice diagonale contenant la variation des éléments incertains par rapport à leur valeur nominale.



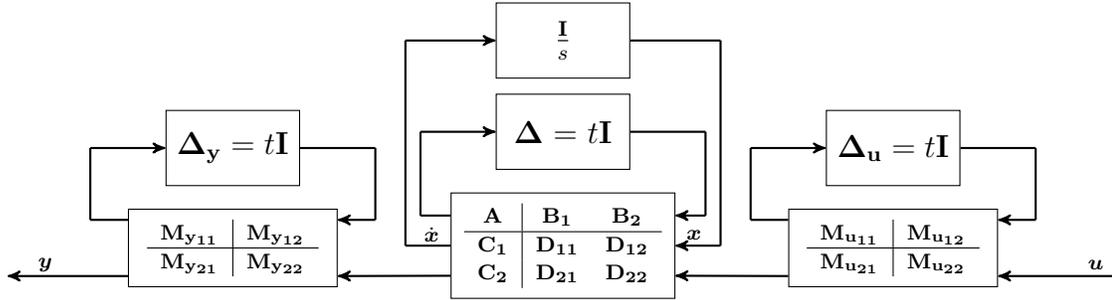


FIGURE 6.4 – LFR d'un système LTVR

### 6.2.3 Application à la translation d'un lanceur

Les deux sections précédentes présentaient la théorie sur les modèles linéaires à paramètres variants et sur la représentation fractionnelle linéaire. Cette section reprend les résultats finaux et les applique à l'obtention de représentation multi-modèles linéaires de la dynamique de translation d'un lanceur autour d'une Terre aplatie. Ces deux représentations sont basées sur l'interpolation temporelle d'une famille de matrices linéarisées autour de points d'opération appartenant à la trajectoire de référence. Cette famille a été obtenue lors de l'étude de la linéarité du système (section 6.1.2).

La première étape dans l'obtention des modèles linéaires variant dans le temps est donc l'interpolation des matrices et des vecteurs. Une étude approfondie de la variation des éléments à interpoler (figure 6.1) démontre qu'un polynôme du cinquième ordre dans les phases propulsées suffit pour bien capturer la variation dans tous les éléments. Un polynôme d'ordre plus faible serait possible pour plusieurs éléments, mais certains nécessitent le cinquième ordre. Puisque tous doivent avoir le même ordre, l'ordre le plus élevé est utilisé. Pour les phases non propulsées, l'ordre du polynôme peut être réduit à deux. Selon l'analyse de la section 6.1.2, quatre polynômes sont nécessaires pour représenter la trajectoire entière.

L'obtention des coefficients du polynôme s'effectue en résolvant un problème des moindres carrés. Puisque les matrices  $\mathbf{A}$  (équation (6.15)) et  $\mathbf{C}$  (équation (6.17)) sont des matrices creuses, un problème des moindres carrés est formulé pour chaque élément des matrices. Un problème similaire à celui de l'équation (6.35), formulé pour l'élément de la première colonne et de la première ligne de la matrice  $\mathbf{A}$ , doit être résolu pour les 81 éléments de la matrice  $\mathbf{A}$ , les 27 éléments de la matrice  $\mathbf{C}$ , les trois composantes du vecteur de sortie et les deux composantes du vecteur d'entrée. Les représentations comptant chacune quatre polynômes pour représenter toute la trajectoire, un problème

des moindres carrés doit être résolu quatre fois pour chaque élément, une par phase :

$$\begin{bmatrix} t^{(1)5} & t^{(1)4} & t^{(1)3} & t^{(1)2} & t^{(1)} & 1 \\ t^{(2)5} & t^{(2)4} & t^{(2)3} & t^{(2)2} & t^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^{(n_{ls})5} & t^{(n_{ls})4} & t^{(n_{ls})3} & t^{(n_{ls})2} & t^{(n_{ls})} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e(1,1)}^{\{5\}} \\ A_{e(1,1)}^{\{4\}} \\ A_{e(1,1)}^{\{3\}} \\ A_{e(1,1)}^{\{2\}} \\ A_{e(1,1)}^{\{1\}} \\ A_{e(1,1)}^{\{0\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(1,1)}^{(1)} \\ A_{(1,1)}^{(2)} \\ \vdots \\ A_{(1,1)}^{(n_{ls})} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\mathbf{V} \mathbf{A}_{e(1,1)} = \mathbf{A}_{(1,1)} \quad (6.36)$$

où  $n_{ls}$  est le nombre de points d'opération considéré dans cette phase et  $t^{(n)}$  est la valeur du temps au  $n^e$  point d'opération. La matrice  $\mathbf{V}$  est appelée la matrice de Vandermonde du problème des moindres carrés. La façon la plus simple de résoudre ce problème est d'utiliser le pseudo-inverse de la matrice de Vandermonde (Higham, 2002) :

$$\mathbf{A}_{e(1,1)} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{(1,1)} \quad (6.37)$$

Lors de l'utilisation des moindres carrés en-ligne, cette méthode de résolution n'est pas suggérée puisqu'elle nécessite que la matrice de Vandermonde soit de plein rang et que le vecteur de valeurs connues soit dense. Lorsque ces conditions ne sont pas respectées, une solution par la décomposition QR (Higham, 2002) peut être utilisée. Dans le cas considéré dans cette étude où le problème est résolu hors ligne et où les conditions sont vérifiées, le pseudo-inverse est une méthode satisfaisante.

Les moindres carrés pondérés donnent plus d'importance à certains points d'opérations. Notamment, pour la représentation de la translation d'un lanceur, une importance accrue peut être donnée aux points d'opérations près de l'injection. Ceci permet de diminuer les erreurs de modélisation dans cette phase critique du lancement. Les moindres carrés sont formulés en ajoutant une matrice de pondération  $\mathbf{\Omega}$  à la formulation de base :

$$\mathbf{\Omega} \mathbf{V} \mathbf{A}_{e(1,1)} = \mathbf{\Omega} \mathbf{A}_{(1,1)} \quad (6.38)$$

Les inconnues du problème, la valeur de coefficients du polynôme ( $\mathbf{A}_{e(1,1)}$ ) s'obtiennent alors en utilisant une approche similaire à le pseudo-inverse :

$$\mathbf{A}_{e(1,1)} = (\mathbf{V}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{A}_{(1,1)} \quad (6.39)$$

Pour les besoins de l'application, les points d'opérations sont pris à une fréquence de 1 Hz sur la trajectoire de référence. Ceci produit 48 points pour le brûlage du second étage et 104 pour celui du troisième étage. L'horizon de prédiction utilisé dans les algorithmes de guidage (chapitres 5 et 7) est choisi pour couvrir uniquement les

phases de brûlage, la prédiction ne dépasse donc pas le double de la durée du brûlage. Ainsi, même si un nombre plus important de points est disponible dans les phases non propulsées, uniquement les 49 premiers de la phase de dérive et les 105 de la phase orbitale sont utilisés. De plus, puisque la phase critique de l'injection est passée, la matrice de pondération n'est pas implémentée dans les phases non propulsées. Pour les phases de brûlage, les vingt dernières valeurs sont pondérées plus fortement que les premières afin de donner plus d'importance à ces instants :

$$\Omega_{s2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{29} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 5\mathbf{I}_{20} \end{bmatrix} \quad \Omega_{s3} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{84} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 5\mathbf{I}_{20} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Suite à la résolution de tous les problèmes des moindres carrés, il devient possible de reconstruire les matrices d'état de la LTVR et les vecteurs d'entrée et de sortie aux points d'opérations. Les solutions des différents problèmes des moindres carrés sont regroupées pour former les matrices d'interpolation temporelle  $\mathbf{A}_e(t)$  et  $\mathbf{C}_e(t)$  et le vecteurs d'interpolation  $\mathbf{y}_{oe}(t)$  et  $\mathbf{u}_{oe}(t)$  :

$$\mathbf{A}_e(t) = \mathbf{A}_e^{\{0\}} + \mathbf{A}_e^{\{1\}}t + \mathbf{A}_e^{\{2\}}t^2 + \mathbf{A}_e^{\{3\}}t^3 + \mathbf{A}_e^{\{4\}}t^4 + \mathbf{A}_e^{\{5\}}t^5 \quad (6.41)$$

$$\mathbf{C}_e(t) = \mathbf{C}_e^{\{0\}} + \mathbf{C}_e^{\{1\}}t + \mathbf{C}_e^{\{2\}}t^2 + \mathbf{C}_e^{\{3\}}t^3 + \mathbf{C}_e^{\{4\}}t^4 + \mathbf{C}_e^{\{5\}}t^5 \quad (6.42)$$

$$\mathbf{u}_{oe}(t) = \mathbf{u}_{oe}^{\{0\}} + \mathbf{u}_{oe}^{\{1\}}t + \mathbf{u}_{oe}^{\{2\}}t^2 + \mathbf{u}_{oe}^{\{3\}}t^3 + \mathbf{u}_{oe}^{\{4\}}t^4 + \mathbf{u}_{oe}^{\{5\}}t^5 \quad (6.43)$$

$$\mathbf{y}_{oe}(t) = \mathbf{y}_{oe}^{\{0\}} + \mathbf{y}_{oe}^{\{1\}}t + \mathbf{y}_{oe}^{\{2\}}t^2 + \mathbf{y}_{oe}^{\{3\}}t^3 + \mathbf{y}_{oe}^{\{4\}}t^4 + \mathbf{y}_{oe}^{\{5\}}t^5 \quad (6.44)$$

où la matrice  $\mathbf{A}_e^{\{i\}}$  est :

$$\mathbf{A}_e^{\{i\}} = \begin{bmatrix} A_{e(1,1)}^{\{i\}} & A_{e(1,2)}^{\{i\}} & \cdots & A_{e(1,9)}^{\{i\}} \\ A_{e(2,1)}^{\{i\}} & A_{e(2,2)}^{\{i\}} & \cdots & A_{e(2,9)}^{\{i\}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{e(9,1)}^{\{i\}} & A_{e(9,2)}^{\{i\}} & \cdots & A_{e(9,9)}^{\{i\}} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

La matrice d'entrée (équation (6.16)) étant constante sur toute la trajectoire et la matrice de transmission directe nulle sur toute la trajectoire, la combinaison des quatres matrices du système d'état permet de construire les matrices de la LTVR. En ajoutant l'interpolation des vecteurs d'opération, la représentation sous la forme de l'équation (6.18) avec le temps comme paramètre de séquençement est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_o \mathbf{x}}{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e(t) & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_e(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta_o \mathbf{x}}{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{oe}(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y}_{oe}(t) \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Cette équation correspond à la LTVR recherchée de la dynamique de translation du lanceur se déplaçant autour d'une Terre aplatie.

Une LFR peut être construite à partir de la LTVR précédente. En effet, la section 6.2.2 démontre que, pour obtenir cette LFR il suffit d'obtenir les matrices des blocs  $\mathbf{M}$  et de fixer les dimensions correspondant à la matrice identité des blocs  $\mathbf{\Delta}$ . Pour ce faire, la technique de réalisation de LFR de Morton (Morton, 1985) peut être utilisée. En utilisant une interpolation polynomiale, les matrices d'état du système (6.46) peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e(t) & \mathbf{B}_e(t) \\ \hline \mathbf{C}_e(t) & \mathbf{D}_e(t) \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e^{\{0\}} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C}_e^{\{0\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e^{\{1\}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_e^{\{1\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e^{\{2\}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_e^{\{2\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t^2 \\ &+ \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e^{\{3\}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_e^{\{3\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t^3 + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e^{\{4\}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_e^{\{4\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t^4 + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e^{\{5\}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_e^{\{5\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t^5 \end{aligned} \quad (6.47)$$

La forme de Morton nécessite cependant que tous les paramètres de séquençement soient d'ordre unitaire. Lorsque ce n'est pas le cas, une technique généralisée de réalisation de Morton (Cheng et DeMoor, 1994) doit être utilisée. La technique de Morton est basée sur la décomposition en valeurs singulières des matrices des coefficients du polynôme. Les valeurs singulières sont ensuite regroupées pour former la matrice  $\mathbf{M}$  (Morton, 1985). Le bloc  $\mathbf{\Delta}$  contient alors uniquement le paramètre de séquençement. Lorsque l'interpolation est composée de termes d'ordre supérieur à 1 le bloc  $\mathbf{\Delta}$  contient des fonctions rationnelles du paramètre de séquençement. En utilisant l'interconnexion de LFTs (*Redheffer's star product*, Zhou *et al.* (1996)), ces fonctions rationnelles sont éliminées du bloc  $\mathbf{\Delta}$  qui devient alors utilisable. Cependant, cette technique ne garantit pas la minimalité de l'ordre de la représentation finale. La matrice à inverser, de même dimension que l'ordre de la représentation, étant plus grosse, l'évaluation de la LFR sera alors plus longue. La réalisation par la technique de Morton et la réalisation généralisée sont décrites en détail dans Morton (1985) et Cheng et DeMoor (1994). Dans ce projet, la fonction *gmorton* de la *Linear Fractional Representation Toolbox* (Magni, 2006) a été utilisée pour effectuer ces opérations.

L'application de cette technique sur la LTVR de l'équation (6.46) donne, dans chaque phase du lancement, trois LFRs placées en série (figure 6.4). L'ordre des différentes LFRs est présenté sur dans le tableau 6.1. Ce tableau montre que l'ordre des LFRs des matrices du système est élevé. Ceci risque de nuire au temps de calcul de la fonction de guidage utilisant cette représentation (section 7.3). Également, l'ordre des LFRs des vecteurs est de 0 durant les phases non propulsées. Ceci s'explique par le fait que les vecteurs  $\mathbf{u}_{o_e}^{\{1\}}$  à  $\mathbf{u}_{o_e}^{\{5\}}$  et  $\mathbf{y}_{o_e}^{\{1\}}$  à  $\mathbf{y}_{o_e}^{\{5\}}$  sont nuls, il n'y a donc plus d'incertitudes sur la valeur des composantes. L'ordre élevé des matrices en comparaison à celui des vecteurs est prévisible. Les matrices contiennent plus d'éléments et la représentation de tous ces éléments est plus complexe. Il convient de mentionner que, pour des fins numériques, les différents éléments doivent être normalisés avant de construire les LFRs puisque l'utilisation des valeurs singulières dans la technique de Morton rend

le processus sensible aux grandes différences entre deux éléments.

phase du lancement	matrices du système	vecteur d'entrée	vecteur de sortie
brûlage second étage	56	5	14
dérive	24	0	0
brûlage troisième étage	56	5	39
orbite	35	0	0

TABLEAU 6.1 – Ordre des LFRs obtenues

Comme dans la figure 6.4, il est possible de combiner les trois LFRs pour n'en former qu'une dont l'ordre est la sommation de celui des trois LFRs intermédiaires. Cette combinaison est utile lorsque l'intérêt de la modélisation se situe uniquement dans la sortie du modèle. Cependant, la fonction de guidage par commande prédictive utilise l'état du système, celle-ci doit donc être disponible d'où l'utilisation des trois LFRs en série. De plus, l'utilisation d'une LFR nuit à l'évaluation puisque la matrice  $\mathbf{M}_{11}$  résultante, qui apparait dans l'inversion matricielle de l'évaluation de la LFR (équation (6.22)), devient creuse et difficile à inverser.

### 6.3 Validation des modélisations

La section 6.2 a créé deux représentations multi-modèles linéaires de la dynamique de translation du lanceur. La première, la LTVR, correspond à une matrice de polynômes temporels. La seconde, la LFR, est la forme  $M - \Delta$  de cette matrice de polynômes. Ces représentations sont basées un modèle non-linéaire linéarisé. À ce point, les équations non-linéaires sont donc modélisées par trois représentations distinctes. La présente section compare ces trois représentations à différents instants sur la trajectoire de référence. Cette comparaison cherche à valider les représentations multi-modèles et à démontrer qu'elles sont suffisamment près de la dynamique pour être utilisées dans la fonction de guidage.

Cette comparaison porte sur quatre points différents, chacun servant à valider une partie différente des représentations. La première comparaison (figure 6.5) permet d'analyser la validité des représentations pour la matrice d'état. La seconde porte sur la matrice de sortie (figure 6.6). Par la suite, la validité du vecteur d'entrée est analysée sur la figure 6.7 et celle du vecteur de sortie sur la figure 6.8.

La comparaison de la matrice d'état est basée sur l'étude de ses valeurs propres, les pôles du système. La figure 6.5 permet de constater que, pour les quatre phases du lancement, les trois représentations se superposent presque parfaitement. Le choix d'analyser les pôles plutôt que les éléments de la matrice s'explique par le fait que certains éléments pourraient être mal représentés, mais, lorsque les pôles demeurent bons, la dynamique du système demeure bien estimée. Il s'avère que, dans le cas traité, chaque élément est également bien représenté, mais ceci ne constitue pas une condition obligatoire pour valider la représentation.

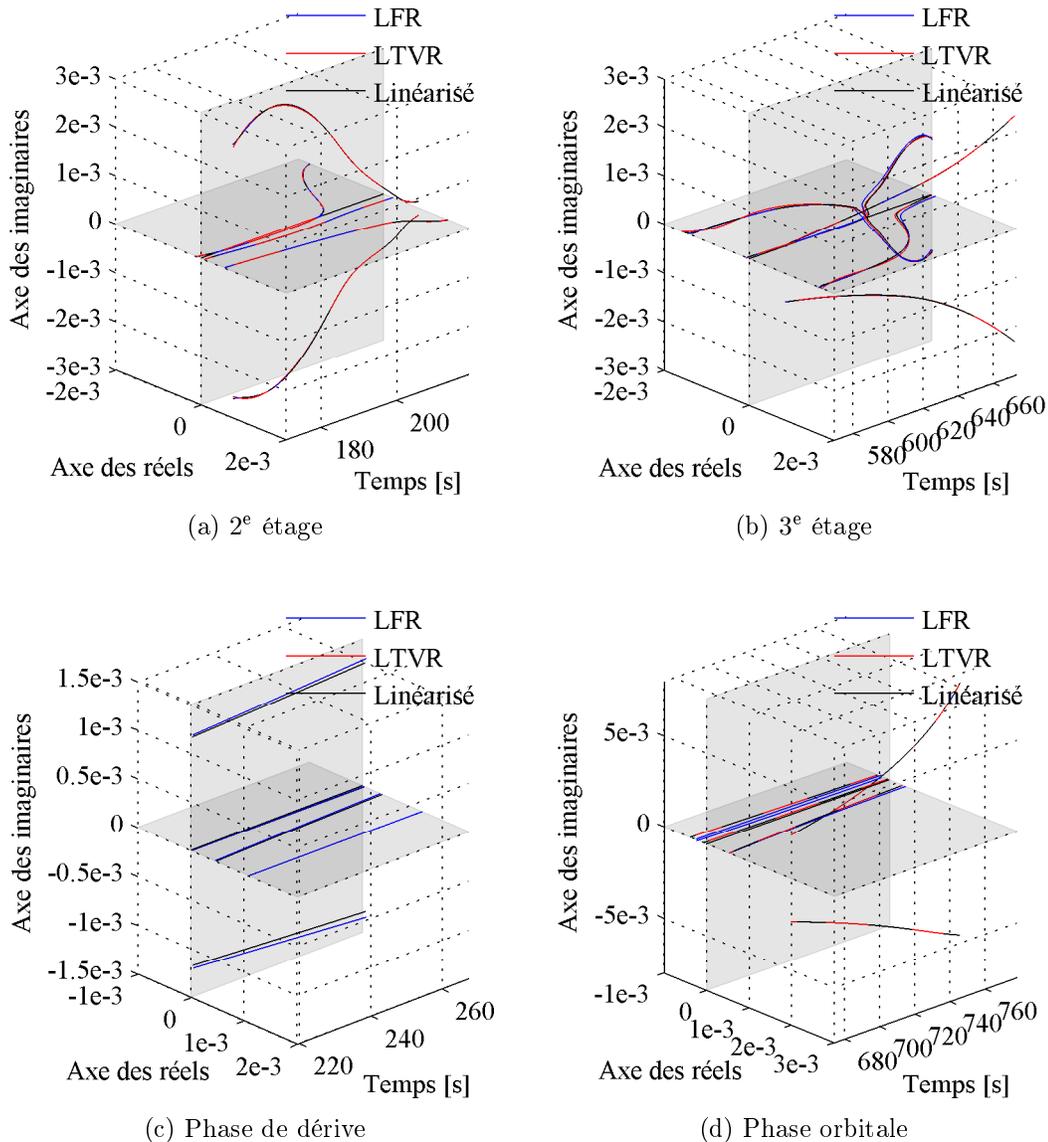


FIGURE 6.5 – Pôles des représentations

Pour l'analyse de la matrice de sortie, l'analyse de ces valeurs propres n'a pas de lien

avec le comportement du système. Il faut donc effectuer la comparaison de tous les éléments un à un. Cette thèse ne présente que l'élément  $C_{(1,6)}$ , mais des vérifications sur les 26 autres éléments de la matrice montraient des comportements similaires à ceux de la figure 6.6. Cette dernière permet d'affirmer que la matrice de sortie est bien estimée par les deux représentations. En effet, la différence entre ces représentations et la dynamique linéarisée est de moins de 0,01 %. L'analyse de la figure 6.6b montre également l'effet de la matrice de pondération dans le problème des moindres carrés (équation (6.38)). L'ajout de cette dernière avait pour but de diminuer les différences près des injections, instants critiques du lancement. La différence est effectivement moindre près de la fin d'une phase de brûlage qu'au début. De plus, l'effet de la minimisation de l'ordre des LFRs est visible sur ces graphiques puisqu'elles sont légèrement moins précises que les LTVRs.

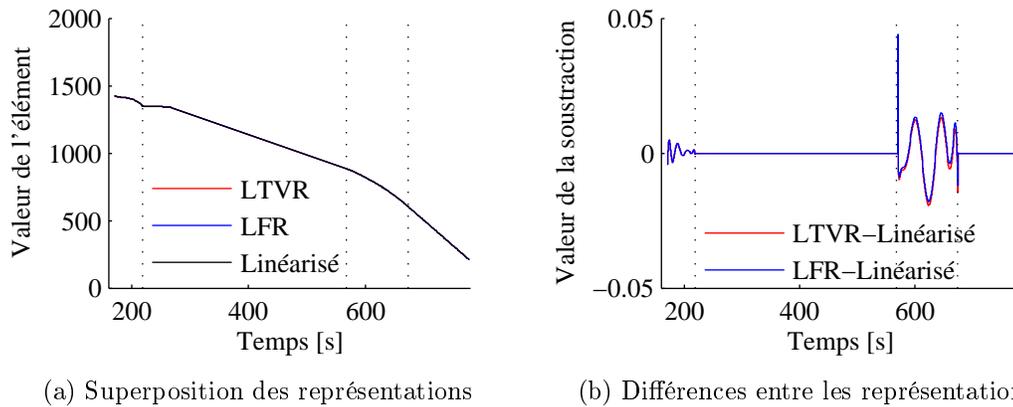
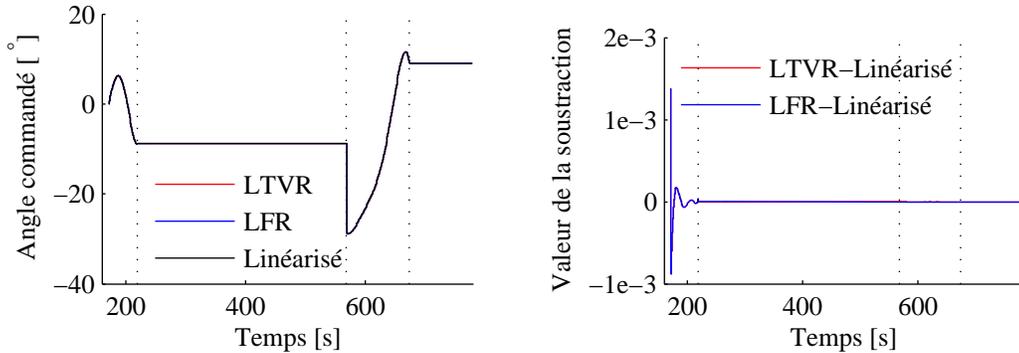


FIGURE 6.6 – Validation de la représentation de la matrice de sortie par  $C_{(1,6)}$

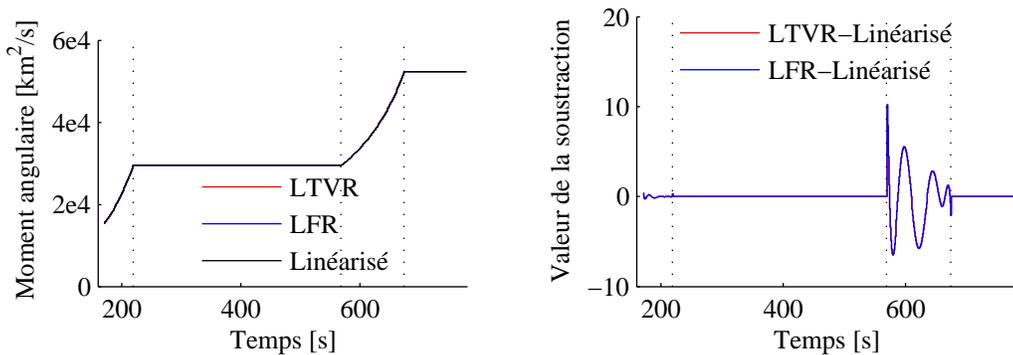
La validation des vecteurs d'entrée et de sortie doit s'effectuer en validant tous les éléments des vecteurs. Cependant, pour limiter le nombre de graphiques présentés, uniquement un élément de chaque vecteur est présenté, à savoir l'angle commandé dans le plan et le moment angulaire spécifique. L'angle commandé de l'orientation de la poussée dans le plan est tracé sur la figure 6.7 et le moment angulaire spécifique sur la figure 6.8. Après une analyse de ces deux figures, il est possible de conclure que les deux vecteurs sont bien représentés par la LTVR et la LFR. La valeur absolue de la différence sur le moment angulaire spécifique (figure 6.8b) peut sembler élevée (plus de  $10 \text{ km}^2/\text{s}$ ), mais elle demeure moins de 0,1 %. À la différence des autres soustractions, l'angle commandé dans le troisième étage (figure 6.7b, entre 569 s et 674 s) ne présente pas d'oscillations. Les oscillations des autres graphiques proviennent d'une surparamétrisation du polynôme. En effet, de tous les éléments présentés, cet angle est le seul dont la variation est réellement un polynôme d'ordre 5, d'où la représentation parfaite. Les autres éléments ont des variations qui ressemblent plus à un second ordre. Les oscillations démontrent

l'un des principaux inconvénients de la méthode utilisée pour effectuer l'interpolation. Elle n'est pas en mesure de donner une valeur strictement nulle à un coefficient du polynôme. Ceci explique les oscillations résiduelles des figures 6.6b et 6.8b.



(a) Superposition des représentations (b) Différences entre les représentations

FIGURE 6.7 – Validation de la représentation du vecteur d'entrée par  $\vartheta_{com}$



(a) Superposition des représentations (b) Différences entre les représentations

FIGURE 6.8 – Validation de la représentation du vecteur de sortie par  $h$

Les quatre figures précédentes démontrent que, pour tous les éléments significatifs, d'un modèle linéaire à temps variant, la LTVR et la LFR développées sont de bonnes approximations de la dynamique non-linéaire linéarisée.

Un autre point important du développement est la rapidité d'évaluation des représentations. En effet, ces représentations sont développées dans le but d'accélérer la fonction de guidage. Pour vérifier qu'elles accélèrent réellement la résolution, une simulation du brûlage du second étage en utilisant chacune des deux représentations multi-modèles et une utilisant le modèle non-linéaire sont effectuées. Les temps de relatif de simulation sont présentés sur le tableau 6.2. Ce tableau permet de constater

que les représentations multi-modèles linéaires permettent effectivement d'accélérer la simulation. Lors du développement de la LFR, des commentaires sur l'ordre de la représentation ont été effectués. Ceux-ci mentionnaient que, de par l'ordre élevé de la LFR des matrices du système, le temps d'évaluation de la LFR serait plus long que celui de la LTVR et que cette différence provient de l'inversion d'une matrice de dimension importante.

Linéarisé	LFR	LTVR
1,000	0,941	0,229

TABLEAU 6.2 – Temps relatif de simulation

Ainsi, les deux représentations ont une précision similaire, mais la LTVR est plus rapide à calculer que la LFR. De plus, la LTVR est plus versatile. Dans la présente étude, par fin de simplicité et puisque les résultats sont satisfaisants, tous les polynômes sont du même ordre. Il est cependant envisageable d'utiliser des ordres différents pour chaque composante du système et même à l'intérieur des composantes. Cependant, cette versatilité entraîne un besoin supplémentaire en espace de stockage puisqu'il faut conserver plusieurs éléments. Également, l'évaluation de la LTVR n'est pas fixe et peut varier selon la complexité de la représentation. À l'opposée, la LFR est une représentation fixe qui nécessite que tous les éléments soient du même ordre, principalement pour éviter les matrices creuses. Ce qui fait que l'évaluation de cette représentation est, outre l'inversion d'une matrice de grande taille, plus simple. De plus, le nombre de données à emmagasiner est restreint puisque la forme de la représentation est connue *a priori*.

## 6.4 Conclusion

Le but de ce chapitre était de développer deux représentations multi-modèles linéaires de la dynamique de translation d'un lanceur autour de sa trajectoire de référence. Ces deux représentations sont basées sur l'interpolation d'une famille de modèles linéarisés autour de plusieurs points d'opération. Ainsi, la première partie du chapitre a présenté l'obtention de cette famille de modèles. Cette famille a permis d'effectuer une courte analyse de la linéarité du système afin de conclure que l'utilisation d'un modèle unique sur toute la trajectoire n'est pas envisageable. La dynamique varie trop sur la durée complète de la trajectoire. Cette analyse a cependant fait ressortir la structure de la variation qui est liée au temps écoulé depuis le début du lancement et à la phase du lanceur. Cette structure est à la base de représentations multi-modèles développées par la suite.

Ces représentations sont une représentation linéaire variante dans le temps (LTVR) et une représentation fractionnelle linéaire (LFR). La première est basée sur la technique de séquençement de gains où une fonction d'interpolation permet d'obtenir la valeur des éléments désirés à tout endroit dans le domaine d'opération. Normalement, ce domaine est défini selon des paramètres physiques définissant les différents points d'opérations et l'interpolation est effectuée sur les contrôleurs. Dans le cas présenté ici, le temps est utilisé comme paramètre de séquençement. L'intérêt dans l'utilisation de cette variable est que sa valeur est connue *a priori* ce qui facilite les prédictions. Le temps est un paramètre définissant les points d'opérations uniquement lorsque les modèles sont développés pour effectuer du suivi de trajectoire. De plus, dans la représentation développée, l'interpolation est effectuée sur les modèles linéarisés et non sur les contrôleurs. Cette interpolation est la résolution, en utilisant une pseudo-inverse, d'un problème de moindres carrés pondérés. Un problème de ce type est résolu pour chaque élément des matrices du système et pour chaque élément composant les vecteurs d'entrée et de sortie du système. La LTVR ainsi obtenue est la combinaison d'une équation polynomiale matricielle et de deux équations polynomiales vectorielles. Ces trois équations sont dépendantes du temps.

La seconde représentation est la forme  $M - \Delta$  des polynômes précédents. Cette forme est caractéristique de la transformation fractionnelle linéaire qui est normalement utilisée pour modéliser une représentation d'état incertaine afin d'étudier sa robustesse à des incertitudes paramétriques. Dans cette thèse, cette application a été utilisée pour modéliser une famille de modèles linéarisés. Pour ce faire, la technique généralisée de réalisation de Morton, permettant de représenter un polynôme dans la forme  $M - \Delta$ , a été utilisée sur les trois équations polynomiales de la LTVR précédente. Le résultat est deux LFRs dont la combinaison représente la dynamique de translation d'un lanceur.

Ces deux représentations ont été comparées aux modèles linéarisés. Cette comparaison permet de conclure que les deux représentations sont des approximations valides de ces modèles et peuvent être utilisées comme modèle de prédiction dans une fonction de guidage basée sur la commande prédictive. La LTVR est plus rapide et versatile, mais la LFR est plus simple d'utilisation et nécessite l'emmagasinage de moins d'informations.

# Chapitre 7

## Guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles linéaires

Les chapitres 5 et 6 ont jeté les bases de l'algorithme de guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles linéaires (MMPC). Le premier a démontré que la formulation de base de la commande prédictive non-linéaire permet d'effectuer du guidage en suivi d'une trajectoire de référence. Ce type d'algorithme est cependant beaucoup plus lent que l'algorithme de référence. Ainsi, l'amélioration de la précision et la facilité d'utilisation apportées par cette formulation sont annulées par le temps de calcul beaucoup trop long. La différence est à ce point importante que l'algorithme final du chapitre 5 ne constitue pas une solution viable pour effectuer le guidage d'où l'idée d'utiliser un modèle de prédiction linéaire. Ce type de modèle est plus rapide à calculer et l'optimisation est plus simple à résoudre. Cependant, le chapitre 6 démontre que l'utilisation d'un modèle linéaire unique pour toute la durée du lancement ne représente pas assez bien les variations dans la dynamique du lanceur. Ce chapitre propose alors d'utiliser une représentation linéaire variante dans le temps et une représentation linéaire fractionnelle de la dynamique du lanceur sur sa trajectoire de référence. L'introduction de ces représentations dans le modèle de prédiction de la commande prédictive crée l'algorithme de commande prédictive multi-modèles linéaires.

Ce type de contrôleur est une approche classique pour commander un système autour de plusieurs points d'opération (Falcone *et al.*, 2008). Il est majoritairement utilisé pour effectuer le contrôle par commande prédictive linéaire où le modèle de prédiction varie avec les itérations (Huzmezan et Maciejowski, 1998; Kothare *et al.*, 2000) ou dans la résolution simultanée de plusieurs algorithmes de commande prédictive linéaire suivie d'un second algorithme pour pondérer les différents résultats selon le point d'opération courant (Aufderheide et Bequette, 2003). Ces deux formulations sont bonnes lorsque le

système opère autour de plusieurs points d'opération, mais où la variation est lente et que la prédiction autour d'un point est valide. Lorsque les points d'opération varient à l'intérieur de l'horizon de prédiction, les algorithmes utilisant la commande prédictive multi-modèles linéaires convertissent la minimisation d'un critère en une optimisation minmax pour obtenir dynamiquement la valeur du point d'opération et du modèle correspondant (Lu et Arkun, 2000; Xu *et al.*, 2009). Cette approche est intéressante lorsque la variation des points d'opération n'est pas connue *a priori*, mais elle complexifie le problème d'optimisation. Pour le guidage d'un lanceur, la prédiction doit être effectuée autour de plusieurs points d'opération dont la succession est connue préalablement au lancement. Ainsi, l'identification dynamique de modèle n'est pas nécessaire et une représentation préidentifiée linéaire variante dans le temps suffit. Ceci permet de retrouver une optimisation composée uniquement d'une minimisation qui s'effectue sur la prédiction d'un modèle linéaire variant dans le temps.

Le présent chapitre construit cet algorithme en utilisant les représentations du chapitre 6. La section 7.1 présente l'introduction de ces représentations dans les modèles de prédiction de la commande prédictive. La section 7.2 reprend la formulation finale du problème d'optimisation de l'algorithme de commande prédictive non-linéaire et le couple avec les modèles linéaires variants dans le temps pour former l'algorithme de guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles. Finalement, cet algorithme est appliqué à des simulations de lancement et est comparé à l'algorithme de commande non-linéaire et à l'algorithme de référence (annexe E). Les résultats sont présentés à la section 7.3.

## 7.1 Choix du modèle

La différence majeure entre l'algorithme de guidage de ce chapitre et celui du chapitre 5 se situe au niveau du modèle utilisé pour effectuer la prédiction des sorties. Dans l'algorithme précédent, le modèle est la version discrétisée des équations non-linéaires du mouvement du lanceur. La modification proposée consiste à remplacer ces équations par la discrétisation de la représentation linéaire variante dans le temps ou de la représentation linéaire fractionnelle développées au chapitre 6. Ce remplacement devrait permettre d'accélérer la résolution du problème d'optimisation basé sur ces prédictions. En effet, la lenteur de l'optimisation est le principal désavantage de la formulation non-linéaire précédente et la simulation des représentations linéaires variantes dans le temps est plus rapide que celle du modèle non-linéaire (tableau 6.2). Le modèle de prédiction basé sur la représentation linéaire variante dans le temps est introduit à la section 7.1.1 et celui utilisant la représentation linéaire fractionnelle à la section 7.1.2.

Une différence marquée entre le modèle non-linéaire et les représentations linéaires se situe dans le vecteur de sortie. Dans le modèle non-linéaire, la dimension de l'orbite est définie par le demi-grand axe et l'excentricité alors que dans les représentations l'énergie mécanique spécifique et le moment angulaire spécifique sont utilisés. Ceci est adopté afin d'éviter les problèmes dans le calcul de la dérivée de l'excentricité, mais cette modification aidera également la formulation de la commande prédictive. En effet, puisque la consigne n'est plus composée d'une valeur très près de zéro, il est plus simple de définir les pondérations. De plus, dans le modèle non-linéaire, les équations sont telles qu'il est impossible que la valeur de l'excentricité soit inférieure à zéro, cependant, dans les approximations linéaires, rien n'empêche que ceci survienne. Ceci poserait des problèmes de validité des résultats et, probablement, des problèmes numériques.

### 7.1.1 Prédiction utilisant la représentation linéaire variante dans le temps

La représentation linéaire variante dans le temps (LTVR) développée au chapitre précédent est une représentation continue. Cependant, une représentation discrète de la dynamique est utilisée dans ce projet. Cette discrétisation permet d'avoir un critère de minimisation contenant une sommation et un nombre fini d'inconnues et ainsi résoudre le problème de guidage autour d'une Terre aplatie. La LTVR doit donc être discrétisée. Comme pour la formulation non-linéaire, en considérant le pas de temps suffisamment court par rapport à la dynamique du lanceur, un schéma d'Euler est utilisé :

$$\widetilde{\Delta_o}x_{l+1} = \widetilde{\Delta_o}x_l + \Delta_t \left( \mathbf{A}_e(t_l) \widetilde{\Delta_o}x_l + \mathbf{B}(u_l - u_{o_e}(t_l)) \right) \quad (7.1)$$

Ce schéma correspond à l'ajout d'une matrice identité à la matrice d'évolution de l'état. En reprenant l'interpolation polynomiale du cinquième ordre du chapitre précédent, les matrices d'état du système sont :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_d(t_l) & \mathbf{B}_d(t_l) \\ \mathbf{C}_d(t_l) & \mathbf{D}_d(t_l) \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c|c} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{0\}} + \mathbf{I}_9 & \Delta_t \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_e^{\{0\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{1\}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{\{1\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t_l \\ &+ \left[ \begin{array}{c|c} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{2\}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{\{2\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t_l^2 + \left[ \begin{array}{c|c} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{3\}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{\{3\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t_l^3 \\ &+ \left[ \begin{array}{c|c} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{4\}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{\{4\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t_l^4 + \left[ \begin{array}{c|c} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{5\}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{\{5\}} & \mathbf{0} \end{array} \right] t_l^5 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Le modèle de prédiction utilisé par la commande prédictive à représentation linéaire

variante dans le temps (MPC-LTVR) devient :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\Delta_o x_{l+1}} \\ \widetilde{y}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(t_l) & \Delta_t \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_d(t_l) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta_o x_l} \\ \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{o_e}(t_l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y}_{o_e}(t_l) \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

où les matrices du système sont l'interpolation polynomiale du cinquième ordre de l'équation (7.2) et les vecteurs d'opérations ( $\mathbf{u}_{o_e}$  et  $\mathbf{y}_{o_e}$ ) sont les mêmes que ceux interpolés au chapitre précédent (équations (6.43) et (6.44)).

Le vecteur d'entrée est composé des angles d'orientation de la poussée :

$$\mathbf{u}_l = [\vartheta_{coml} \ \varphi_{coml}]^T \quad (7.4)$$

et celui de sortie de la prédiction des paramètres orbitaux étudiés :

$$\widetilde{y}_l = [\widetilde{h}_l \ \widetilde{\mathcal{E}}_l \ \widetilde{i}_l]^T \quad (7.5)$$

Pour sa part, le vecteur de variation de l'état correspond à la variation des composantes du vecteur d'état de la représentation non-linéaire (équation (5.8)). Au début de la prédiction, il est initialisé en soustrayant la valeur de l'état au point d'opération de la valeur estimée par la fonction de navigation :

$$\widetilde{\Delta_o x_1} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{o_e}(t_1) \quad (7.6)$$

où, comme pour les autres vecteurs d'opération, la valeur de l'état aux différents points d'opérations s'obtient par interpolation.

### 7.1.2 Prédiction utilisant la représentation linéaire fractionnelle

De la même façon, la représentation linéaire fractionnelle discrète obtenue précédemment est la représentation continue de la dynamique. Il faut donc également utiliser le schéma de Euler pour discrétiser la représentation. Le modèle de prédiction ainsi utilisé par la commande prédictive à représentation linéaire fractionnelle (MPC-LFR) est le calcul, via l'équation (6.22), des trois LFRs de la figure 7.1 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta_o x_{l+1}} \\ \widetilde{y}_l \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} + t_l \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{I} (\mathbf{I} - t_l \mathbf{A} \mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \right) \\ &\times \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta_o x} \\ \mathbf{u}_l - \mathbf{M}_{u22} + t_l \mathbf{M}_{u21} \mathbf{I} (\mathbf{I} - t_l \mathbf{M}_{u11} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_{u12} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{y22} + t_l \mathbf{M}_{y21} \mathbf{I} (\mathbf{I} - t_l \mathbf{M}_{y11} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_{y12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.7)$$

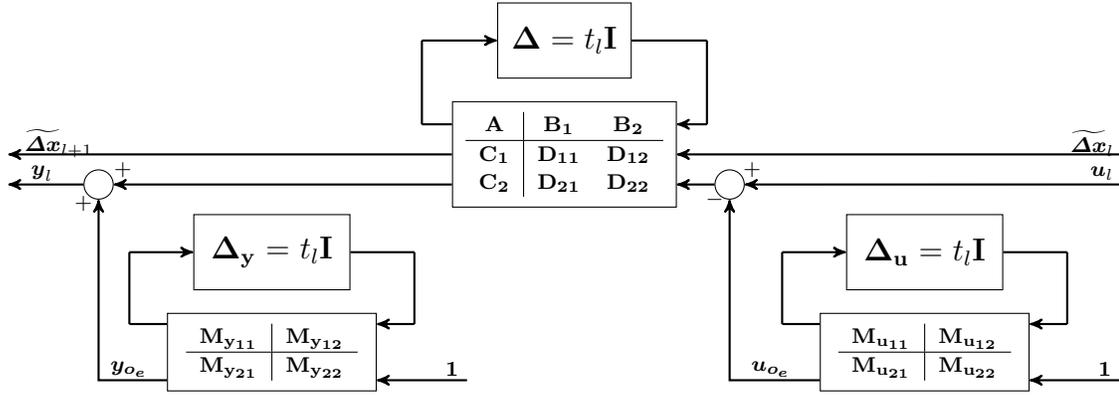


FIGURE 7.1 – LFR servant à la commande prédictive

Les matrices composant le bloc  $M$  des trois LFRs sont le résultat de l'application de la technique généralisée de réalisation de Morton sur les différents polynômes d'interpolation. L'élément  $\mathbf{M}_{22}$  correspond à la valeur du terme d'ordre 0 du polynôme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_t \mathbf{A}_e^{\{0\}} + \mathbf{I}_9 & \Delta_t \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_e^{\{0\}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{M}_{u22} = \mathbf{u}_{oe}^{\{0\}} \quad (7.9)$$

$$\mathbf{M}_{y22} = \mathbf{y}_{oe}^{\{0\}} \quad (7.10)$$

La valeur des autres éléments composant le bloc  $M$  ne peut être exprimée aussi facilement et dépend de la réalisation et de l'ordre de la LFR.

Les vecteurs d'entrée et de sortie sont les mêmes que pour la MPC-LTVR :

$$\mathbf{u}_l = [\vartheta_{coml} \ \varphi_{coml}]^T \quad (7.11)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_l = [\tilde{h}_l \ \tilde{\mathcal{E}}_l \ \tilde{i}_l]^T \quad (7.12)$$

Tout comme pour la MPC-LTVR, l'initialisation du vecteur de variation de l'état s'effectue en soustrayant la valeur de l'état au point d'opération de la valeur estimée par la fonction de navigation. La valeur de l'état aux différents points d'opérations s'obtient par interpolation, qui peut également être une LFR.

## 7.2 Formulation du problème

Les sorties prédites par ces modèles sont utilisées dans un critère (équation (7.13)) et dans des contraintes (équations (7.21) à (7.23)) afin de former un problème d'optimisation qui permet d'amener la charge utile sur l'orbite désirée en suivant une trajectoire de référence.

Comme pour le guidage basé sur la commande prédictive non-linéaire, le critère utilisé est le critère de base de la commande prédictive (section 4.1.1). Ce dernier est la somme pondérée de l'erreur sur le suivi de la trajectoire et des incréments de commande :

$$J = \sum_{l=1}^{h_p} (\mathbf{d}_{k+l} - \tilde{\mathbf{y}}_{k+l})^T \mathbf{Q}_l (\mathbf{d}_{k+l} - \tilde{\mathbf{y}}_{k+l}) + \sum_{l=1}^{h_c} \Delta \mathbf{u}_{k+l-1}^T \mathbf{R}_l \Delta \mathbf{u}_{k+l-1} \quad (7.13)$$

L'unique différence entre celui-ci et celui du chapitre 5 est dans les composantes de la sortie prédite ( $\tilde{\mathbf{y}}$ ) et dans le modèle utilisé pour calculer cette sortie. Précédemment, le demi-grand axe et l'excentricité étaient utilisés pour définir la dimension de l'orbite. Cependant, suite aux constatations du chapitre 6, le moment angulaire spécifique et l'énergie mécanique spécifique sont utilisés dans cette version. La consigne ( $\mathbf{d}$ ) doit donc également être modifiée pour être cohérente avec ces nouveaux paramètres orbitaux. Cette modification s'effectue par la relation entre les deux paires de constantes (équations (6.3) et (6.7)).

Les contraintes de la formulation de la MMPC sont exactement les mêmes que celles de la commande prédictive non-linéaire. Elles sont donc composées des contraintes définissant une zone terminale permettant de considérer le lancement comme une réussite et permettant d'assurer la stabilité de la formulation par mode duel. Pour être facilement reliées aux spécifications de la mission qui sont données en altitude et en angle (VEGA, 2006), ces contraintes sont donc définies sur le rayon des apsides et sur l'inclinaison orbitale :

$$-\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_k \leq \mathbf{P} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{a_{k+h_p}} - r_{ad} \\ \tilde{r}_{p_{k+h_p}} - r_{pd} \\ \tilde{i}_{k+h_p} - i_d \end{bmatrix} \leq \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (7.14)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de normalisation des contraintes :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

et où la variation de la précision est incluse :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_0 & \text{si } k \leq t_f - 25 \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_f - \boldsymbol{\varepsilon}_0)(t - t_f) + \boldsymbol{\varepsilon}_f & \text{si } t_f - 25 < k \leq t_f - 5 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f & \text{si } k > t_f - 5 \end{cases} \quad (7.16)$$

La section 5.4.4 démontre que cet élargissement de la précision permet d'éliminer les grandes manœuvres près de l'injection, il est donc inclus, de base, dans la formulation de la MMPC.

Pour calculer le rayon des apsides à partir des constantes dynamiques de l'orbite, il suffit d'effectuer l'opération inverse des équations (6.3) et (6.7) pour obtenir le demi-grand axe et l'excentricité et ensuite calculer les rayons par la géométrie d'une ellipse. L'opération inverse de l'équation (6.7) permet de calculer le demi-grand axe à partir de l'énergie mécanique spécifique :

$$\tilde{a}_l = -\frac{\mu_e}{2\tilde{\mathcal{E}}_l} \quad (7.17)$$

Avec l'énergie mécanique spécifique et le moment angulaire spécifique, l'excentricité s'obtient en effectuant l'opération inverse de l'équation (6.3) :

$$\tilde{e}_l = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{\mathcal{E}}_l \tilde{h}_l^2}{\mu_e^3}} \quad (7.18)$$

Par la suite, la géométrie de l'ellipse (équations (2.167) et (2.168)) permet d'obtenir la valeur du rayon des apsides :

$$\tilde{r}_{al} = -\frac{\mu_e}{2\tilde{\mathcal{E}}_l} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{\mathcal{E}}_l \tilde{h}_l^2}{\mu_e^3}} \right) \quad (7.19)$$

$$\tilde{r}_{pl} = -\frac{\mu_e}{2\tilde{\mathcal{E}}_l} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2\tilde{\mathcal{E}}_l \tilde{h}_l^2}{\mu_e^3}} \right) \quad (7.20)$$

La section 5.4.3 démontre que l'utilisation de contraintes de formage (équation (5.13)) permet de diminuer le temps de calcul de l'optimisation sans nuire à la précision et aux propriétés de convergence de l'algorithme. Ces contraintes sont donc également incluses dans la formulation de base de la MMPC. De plus, les contraintes sur les bornes de l'orientation de la poussée (équation (5.12)) sont également incluses. La combinaison de ces trois ensembles de contraintes forme les contraintes de l'optimisation :

$$-\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_k \leq \mathbf{P} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{ak+h_p} - r_{ad} \\ \tilde{r}_{pk+h_p} - r_{pd} \\ \tilde{i}_{k+h_p} - i_d \end{bmatrix} \leq \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (7.21)$$

$$-\begin{bmatrix} 45 \\ 5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \vartheta_{k+l} \\ \varphi_{k+l} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 45 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \forall l \in [1, h_c] \quad (7.22)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{k+l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I} \quad (7.23)$$

La séparation en deux sous-problèmes de la figure 5.2 est également conservée. Cette séparation diminue les deux horizons et le temps de calcul sans nuire aux autres paramètres. Cette séparation provient du fait que, durant la phase de dérive, le guidage ne

peut pas modifier la valeur des paramètres orbitaux qui, puisque le mouvement est non propulsé, sont constants sur toute la durée de la phase de dérive.

Le problème demeure donc une optimisation non-linéaire sous contraintes dont la convexité et la convergence ne sont pas assurées (Hillier et Lieberman, 2010). Ainsi, ces modifications n'assurent pas la convergence de l'optimisation, mais, de par le gain en temps de calcul dans le modèle de prédiction, elles devraient diminuer le temps de calcul global de la fonction de guidage.

### 7.2.1 Preuve de la stabilité

La preuve de stabilité de la formulation de la commande prédictive par modèles linéaires variants dans le temps est similaire à celle du cas linéaire du chapitre 4 (de Nicolao *et al.*, 1998). Comme pour le cas linéaire, puisque la formulation précédente est dans le canevas de la commande prédictive par mode duel, cette thèse présente uniquement la preuve de cette formulation. Cette dernière passe par la monotonie du critère et par la faisabilité du problème d'optimisation. Elle assume cependant que le modèle utilisé pour effectuer la prédiction représente parfaitement la dynamique du système commandé. Comme le démontre le chapitre 6, ceci n'est pas le cas pour la dynamique de translation du lanceur. La preuve de cette section n'est donc pas applicable dans la suite des travaux. Elle est cependant présentée puisqu'elle permet de démontrer la similitude entre le cas linéaire et les représentations linéaires variantes dans le temps. De plus, les contraintes sur l'état terminal nuisent à la faisabilité du problème d'optimisation (Pong *et al.*, 2011). Bien que les représentations linéaires variantes dans le temps simplifie le problème d'optimisation, celui-ci demeure non-linéaire et sa convergence est difficilement démontrable (Hillier et Lieberman, 2010). La convergence de l'optimisation est assumée dans la suite de la preuve de la stabilité.

La preuve de la stabilité est similaire à celle de la section 4.2.1 où il faut prouver la stabilité du contrôleur local à l'intérieur du plus grand ellipsoïde terminal défini par les contraintes (7.21) et la monotonie du critère dans la région prédictive.

En linéaire, selon l'équation (4.15), le contrôleur statique est stable si :

$$(\mathbf{A}_f - \mathbf{B}_f \mathbf{K})^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{A}_f - \mathbf{B}_f \mathbf{K}) - \mathbf{Q}_f \leq 0 \quad (7.24)$$

Pour le MMPC, si une borne supérieure sur  $\mathbf{A}_f$  et  $\mathbf{B}_f$  existe, cette équation demeure valide (Falcone *et al.*, 2008). Avec le développement des modèles linéaires variants dans le temps, cette borne sur les deux matrices s'obtient facilement, particulièrement avec la LFR (Zhou *et al.*, 1996).

Selon (Falcone *et al.*, 2008), la condition de monotonicité du critère est vérifiée si :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+h_{p_k}|k}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k} - \hat{\mathbf{u}}_{k+h_{p_k}|k} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k+h_{p_k}|k} \\ \leq \tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \hat{\mathbf{u}}_{k-1|k-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k-1|k-1} - \Omega_s \end{aligned} \quad (7.25)$$

où

$$\Omega_s = \sum_{l=1}^{h_{p_k}-1} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k} - \tilde{\mathbf{x}}_{k+l-1|k-1}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l-1|k-1} \right) \quad (7.26)$$

Cette condition explicite la différence entre la prédiction à l'instant  $k-1$  et celle à l'instant  $k$ . Si cette différence est nulle, on retrouve alors la même formulation que la preuve du chapitre 4.

*Démonstration.* La valeur optimale du critère obtenu lors de la solution de l'optimisation au temps  $k$  est :

$$J(\mathbf{x}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) = \sum_{l=1}^{h_{p_k}} \left( \mathbf{x}_{k+l}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+l} + \hat{\mathbf{u}}_{k+l-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k+l-1} \right) \quad (7.27)$$

En utilisant les résultats de l'itération précédente pour l'itération courante ( $\mathbf{U}_{k|k-1}^* = [\mathbf{U}_{k|k-1} \ \mathbf{u}_{k+h_{p_k}|k}]$ ), La différence du critère entre l'itération courante et le critère obtenu est donc :

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}, k, \mathbf{U}_{k|k-1}^*, h_{p_{k-1}}) - J(\tilde{\mathbf{x}}_k, k, \mathbf{U}_k, h_{p_k}) \\ &= \sum_{l=1}^{h_{p_k}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+l-1|k-1}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l-1|k-1} + \hat{\mathbf{u}}_{k+l-2|k-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k+l-2|k-1} \right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{h_{p_k}} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k} - \sum_{l=1}^{h_{p_k}-1} \hat{\mathbf{u}}_{k+l-1|k} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k+l-1|k} \\ &\quad - \hat{\mathbf{u}}_{k+h_{p_k}|k} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k+h_{p_k}|k} \\ &= - \sum_{l=1}^{h_{p_k}-1} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k} - \tilde{\mathbf{x}}_{k+l-1|k-1}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l-1|k-1} \right) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \hat{\mathbf{u}}_{k-1|k-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k-1|k-1} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{x}}_{k+h_{p_k}|k}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{k+l|k} - \hat{\mathbf{u}}_{k+h_{p_k}|k} \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_{k+h_{p_k}|k} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Ainsi, si l'inégalité (7.25) est vérifiée, le critère n'augmente pas avec le temps.  $\square$

Selon (Falcone *et al.*, 2008), ceci, combiné avec les bornes sur  $\mathbf{A}_f$  et  $\mathbf{B}_f$  dans l'ellipsoïde terminal, permet de prouver la stabilité nominale de la commande prédictive multi-modèles linéaires.

### 7.3 Analyse des résultats

Dans cette section, la fonction de guidage basé sur la commande prédictive multi-modèles linéaires à temps variant est appliquée à la simulation du lancement de la mission de la section 1.3. Son but est d'amener une charge utile de 150 *kg* sur une orbite héliosynchrone de 6871 *km* de demi-grand axe. Cette mission est la même que celle des chapitres 3 et 5. La trajectoire obtenue lors de la définition d'une trajectoire de référence (chapitre 3) peut ainsi servir de trajectoire de référence à l'algorithme. La simulation est effectuée sur le simulateur à pseudo-5ddl (chapitre 2) où la fréquence de la boucle de guidage est de 1 *Hz*. Afin de simuler l'opération réelle, un bruit est ajouté sur l'état utilisé par la fonction de guidage. Ce bruit correspond à la précision attendue à la sortie de la fonction de navigation de la boucle de GNC (section 1.2). Selon Maki (1990), un bruit blanc avec une covariance de 35 *m* sur la position et de 0,1 *m/s* sur la vitesse est une précision atteignable pour une fonction de navigation intégrée GPS-INS.

La période d'échantillonnage de l'algorithme basé sur la commande prédictive est égale à la période de la fonction de guidage, les paliers durent donc 1 *s*. L'analyse effectuée au chapitre 5 conclut que l'horizon de prédiction des deux problèmes doit être assez long pour toujours inclure l'injection, mais qu'il est inutile de prédire dans les phases propulsées. Les horizons de prédiction sont donc de 49 dans le problème avant la phase de dérive et de 105 pour celui après la phase de dérive.

Pour l'horizon de contrôle, l'étude des sections 5.4.1 et 5.4.3 démontre que les meilleures performances s'obtiennent en prenant un horizon de contrôle aussi long que l'horizon de prédiction et en ajoutant des contraintes de formage sur l'entrée afin d'artificiellement diminuer le nombre d'inconnues de l'optimisation. Les horizons de contrôle sont respectivement 49 et 105. Dans la section 5.4.3, la forme prédéfinie du problème pré-dérive est composée de 9 paliers de 1 *s* et de 10 paliers de 4 *s*, pour 19 valeurs inconnues. Pour la phase de post-dérive, le problème contenait 53 paliers de 1 *s* et 13 paliers plus longs. Cette division avait été choisie afin d'avoir le même nombre d'inconnues qu'à la section 5.4.1, cependant des essais préliminaires démontrent qu'il est possible d'utiliser seulement 42 inconnues dans la phase post-dérive. Dans ce chapitre, la forme imposée à l'entrée dans la phase pré-dérive est donc composée de 9 valeurs inconnues suivies de 10 paliers de 4 *s* (figure 7.2a) et celle de la phase post-dérive est de 21 paliers courts et 21 paliers longs (figure 7.2b). Ces paliers sont formés par l'imposition de contraintes afin de forcer les incréments de commande à être nuls (équation (7.23)). Comme mentionné à la section 5.4.3, ces contraintes supplémentaires dans la formulation ne se traduisent pas par l'ajout de contraintes dans l'optimisation. Elles diminuent plutôt le nombre d'inconnues du problème.

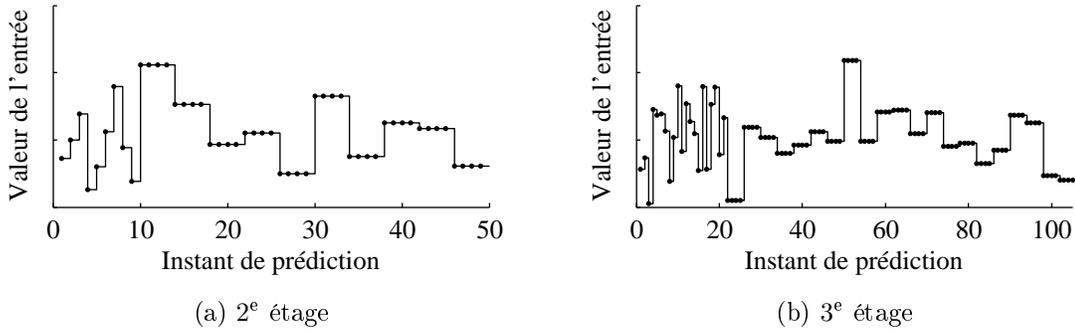


FIGURE 7.2 – Forme imposée à l’entrée

Les contraintes de la formulation de la section 7.2 incluent également l’élargissement graduel de la précision introduit à la section 5.4.4. Cet élargissement demande une précision finie à l’injection, diminuant l’amplitude des manœuvres près de l’injection. Dans les essais de cette section, la précision initiale est de  $\varepsilon_0 = [0,5 \ 0,5 \ 0,001]^T$  pour les deux problèmes. Afin de limiter la différence entre la trajectoire de référence et la trajectoire réelle dans la phase de dérive, la précision finale du problème pré-dérive est légèrement meilleure ( $\varepsilon_f = [1,5 \ 1,5 \ 0,005]^T$ ) que celle à l’injection ( $\varepsilon_f = [4,0 \ 4,0 \ 0,05]^T$ ). Cette dernière est équivalente aux spécifications de précision du lanceur.

Le choix de la valeur numérique des matrices de pondération complète la définition de la formulation du problème d’optimisation. De par leurs unités implicites, ces matrices permettent la sommation des termes en uniformisant les unités dans le critère et, de par leurs valeurs numériques, pondèrent l’importance relative à accorder à chaque élément du critère. Ces matrices sont des matrices diagonales dont chaque élément de la matrice  $\mathbf{Q}$  est relié à une sortie et ceux de la matrice  $\mathbf{R}$  à une entrée. L’élément  $\mathbf{Q}_{(1,1)}$  est relié au moment angulaire spécifique, son unité implicite est donc des  $s^2/km^4$ . L’unité de l’élément  $\mathbf{Q}_{(2,2)}$  est des  $s^4/km^4$  puisqu’il est relié à l’énergie mécanique spécifique. Le troisième élément de la matrice a des  $^\circ^{-2}$  comme unité puisqu’il est le facteur multiplicatif de l’inclinaison orbitale. Étant reliés aux incréments de l’orientation de la poussée, les deux éléments de la matrice  $\mathbf{R}$  sont également en  $^\circ^{-2}$ . Pour définir la valeur des éléments, une étude sur l’ordre de grandeur des termes multipliés est nécessaire. Pour les incréments de l’orientation de la poussée, les résultats de la trajectoire de référence donnent une idée satisfaisante de celle-ci. De par la trajectoire à 1 s, la différence entre la valeur de deux paliers successifs est estimée à  $1 \times 10^{-3} \text{ }^\circ$ . Pour la matrice  $\mathbf{Q}$ , il faut estimer la valeur de la différence entre la consigne et la sortie prédite. Cette estimation peut provenir de la précision définie dans les contraintes. Ce qui donne les

valeurs suivantes pour les deux matrices :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^1 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^3 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Cependant, comme au chapitre 5, afin de diminuer l'importance du suivi de trajectoire, la matrice de pondération de l'erreur de consigne est diminuée par rapport à sa valeur nominale. Également, la valeur de l'élément  $\mathbf{R}_{(2,2)}$  est légèrement plus élevée que celle de l'élément  $\mathbf{R}_{(1,1)}$  afin de pénaliser les manœuvres hors-plan. De même, afin de limiter les corrections hors-plan, l'importance accordée au suivi de l'inclinaison de référence (élément  $\mathbf{Q}_{(3,3)}$ ) est légèrement augmentée. Ces modifications donnent les valeurs utilisées des matrices de pondération :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Cette section compare la formulation ainsi obtenue de la MPC-LTVR et de la MPC-LFR avec l'algorithme NMPC du chapitre 5 et avec la solution de comparaison, basée sur l'approximation de Schuler (annexe E). Afin d'uniformiser les comparaisons, le vecteur de sortie, les équations de sortie et les matrices de pondération de l'algorithme de guidage basé sur la NMPC ont été modifiés pour utiliser les constantes dynamiques dans la définition des dimensions de l'ellipse orbitale plutôt que les constantes géométriques. Les bases de comparaison (la précision sur l'orbite à la fin des deux problèmes, le temps de calcul relatif et l'activité de la commande) sont les mêmes que celles utilisées lors de l'analyse de la formulation du chapitre 5. L'étude des résultats est divisée en deux parties. Dans un premier temps, une simulation nominale est effectuée afin de comparer les performances des différents algorithmes lorsque le lanceur fonctionne parfaitement (section 7.3.1). Par la suite, des modifications aux paramètres du lanceur et de la fonction de navigation permettront d'étudier sommairement la robustesse de ces algorithmes à certains types de perturbations (section 7.3.2).

### 7.3.1 Résultats d'une simulation nominale

La première étude traite de l'analyse des résultats obtenus lorsque la simulation se déroule comme prévu. Il n'y a donc aucune perturbation outre le bruit de navigation dont l'amplitude correspond à celle utilisée précédemment, provenant de Maki (1990). Les orbites atteintes avec les quatre algorithmes sont présentées dans le tableau 7.1.

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6862,5 ± 1,5	1294,0 ± 1,5	97,231 ± 0,005
MPC-LTVR	6862.5	1295.0	97.233
MPC-LFR	6862.5	1294.8	97.230
NMPC	6862.6	1294.9	97.233
Schuler	6861.2	1304.2	97.308

(a) Orbite de dérive

cas testé	rayon de l'apogée [km]	rayon du périégée [km]	inclinaison orbitale [°]
désirée	6871,0 ± 4	6871,0 ± 4	97,375 ± 0,05
MPC-LTVR	6875.0	6867.7	97.375
MPC-LFR	6872.4	6870.3	97.376
NMPC	6872.9	6869.9	97.376
Schuler	6871.3	6867.3	97.375

(b) Orbite à l'injection

TABLEAU 7.1 – Résultats obtenus dans le cas nominal

Ces tableaux montrent que, dans ce cas, les quatre algorithmes utilisés amènent le lanceur sur l'orbite désirée. La seule différence significative se situe au niveau de l'orbite de dérive obtenue par l'algorithme de référence. Cette différence s'explique par le fait que cet algorithme n'utilise pas la valeur de l'orbite de dérive dans ses calculs, mais uniquement l'orbite finale. Ceci est également visible sur les figures de l'orientation commandée de la poussée (figure 7.3). L'orientation de la solution de référence est complètement différente de celle des trois solutions utilisant la trajectoire de référence. Notamment, puisque cette solution n'inclut pas l'aplatissement de la Terre dans sa modélisation de la gravité, elle demande des angles hors-plan plus élevés que les solutions basées sur la commande prédictive qui incluent le second harmonique zonal

de l'accélération gravitationnelle dans leur modèle de prédiction. Ceci se traduit par une inclinaison orbitale différente des solutions par suivi de trajectoire (figure 7.4). La trajectoire obtenue par cette trajectoire est donc moins près de la solution optimale que les autres méthodes.

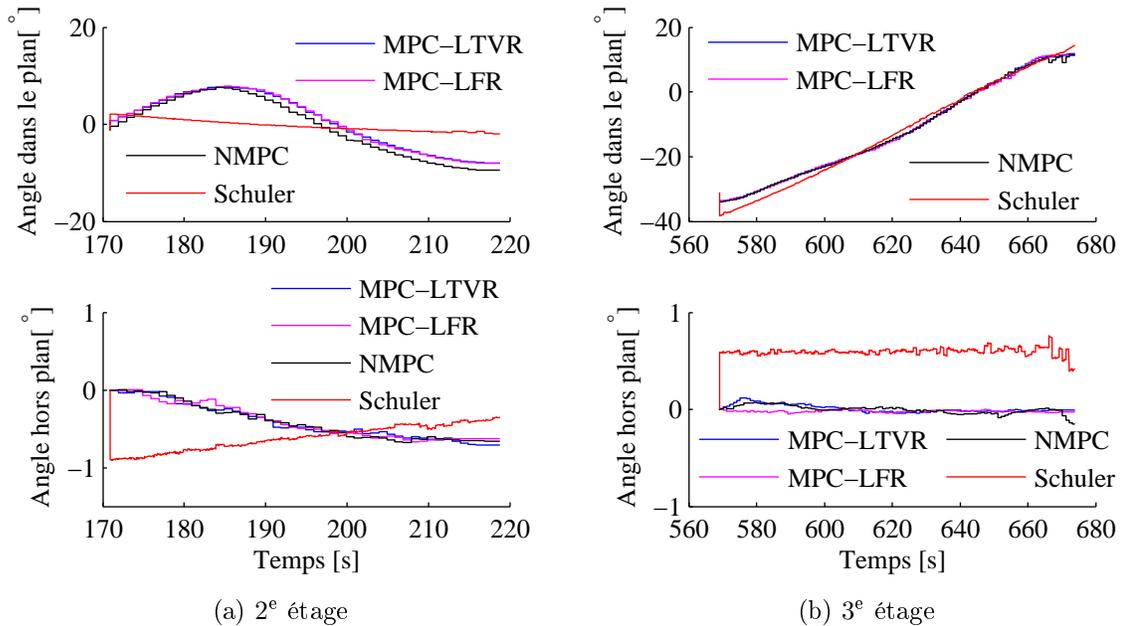


FIGURE 7.3 – Orientations commandées dans le cas nominal

En ce qui concerne le temps de calcul (tableau 7.2 et figure 7.5), la solution de comparaison, basée sur la résolution d'un système d'équations carré à 35 inconnues, est beaucoup plus rapide que les trois solutions de comparaison qui sont basées sur la résolution d'un algorithme d'optimisation non-linéaire contraint à 19 inconnues pour le 2<sup>e</sup> étage et 42 inconnues pour le 3<sup>e</sup> étage. Le système carré est plus simple à résoudre que l'optimisation non-linéaire. De plus, on constate que l'algorithme par commande prédictive à représentation linéaire à temps variant est plus rapide que celui à représentation linéaire fractionnelle. Ceci est cohérent avec les résultats de la section 6.3 et s'explique par la nécessité de calculer l'inverse d'une matrice creuse de grande dimension dans l'évaluation de la LFR. Ce dernier est cependant légèrement plus rapide que la commande prédictive non-linéaire. De plus, en analysant le temps de calcul selon le temps écoulé, on constate que le temps nécessaire à la résolution de l'algorithme de référence ne varie presque pas, mais que, de par la diminution du nombre d'inconnues, celui des trois fonctions basées sur la commande prédictive diminue graduellement. Il devient inférieur à la solution de comparaison uniquement dans les dernières secondes du lancement.

À la vue de ces résultats, l'objectif dans le développement des algorithmes de MMPC

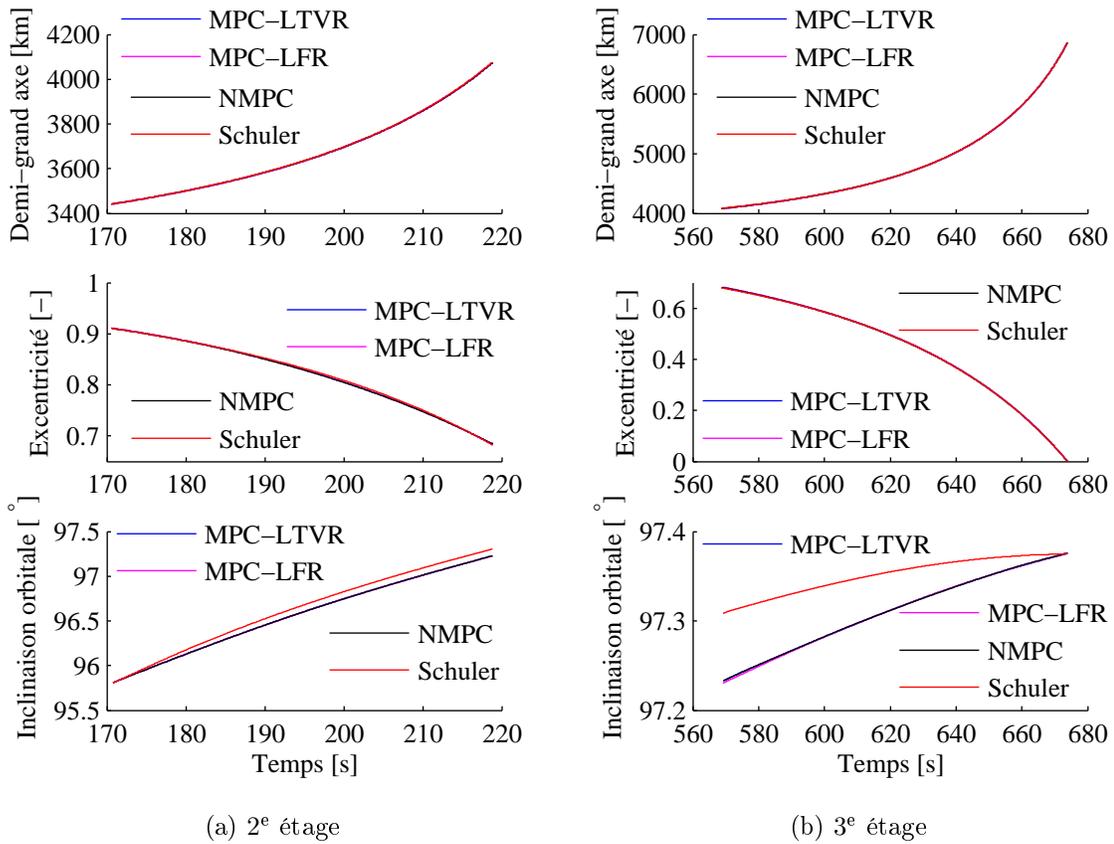


FIGURE 7.4 – Paramètres orbitaux obtenus dans le cas nominal

cas testé	2 <sup>e</sup> étage [s]	3 <sup>e</sup> étage [s]
MPC-LTVR	0.5038	0.2804
MPC-LFR	0.9960	0.9687
NMPC	1.0000	1.0000
Schuler	0.0347	0.0030

TABEAU 7.2 – Temps de calcul total obtenus dans le cas nominal

est atteint. Ces algorithmes sont plus rapides que leur équivalent non-linéaire sans dégrader les performances du lanceur. De plus, le temps de brûlage du troisième étage des algorithmes basés sur la MPC est plus court que celui de la solution de référence. Cette différence provient de la diminution de l'amplitude des manœuvres et se traduit par une augmentation de la charge utile emportée. Cette dernière pèse ainsi 187,5 kg pour les algorithmes de suivi de trajectoire et 186,2 kg pour la solution de comparaison. Ces résultats sont cohérents avec les conclusions de Shrivastava *et al.* (1986) qui mentionnent

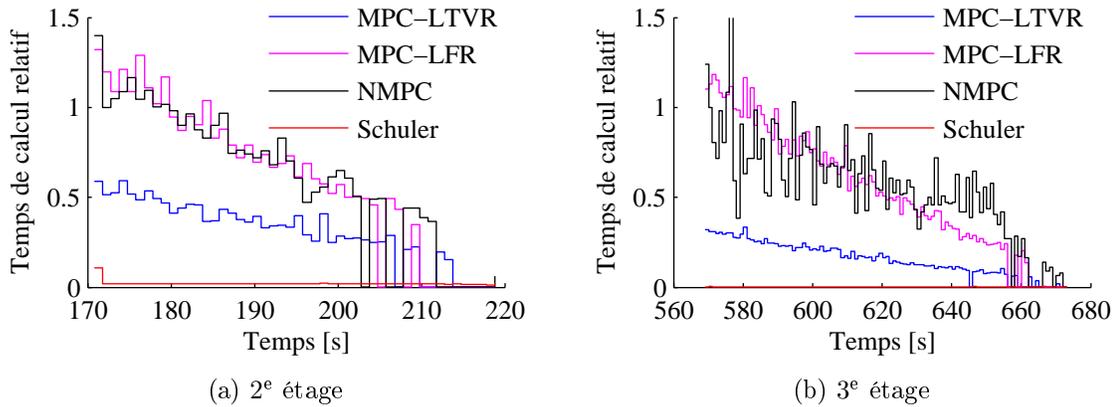


FIGURE 7.5 – Temps de calcul obtenus dans le cas nominal

que les méthodes par suivi de trajectoire sont, dans des conditions nominales, plus près de la trajectoire optimale que les méthodes par adaptation itérative. Cependant, malgré cette amélioration, les algorithmes basés sur la commande prédictive demeurent moins performants que l'algorithme de comparaison. Bien que leur trajectoire soit plus optimale, la perte dans le temps de calcul est beaucoup plus importante que les gains en performance. L'analyse du temps de calcul devra être validée lorsque les spécifications du calculateur seront connues, mais, selon les résultats obtenus, la commande prédictive est trop longue pour être envisagée en opération réelle.

### 7.3.2 Étude de la robustesse

Selon Shrivastava *et al.* (1986), le méthode par suivi de trajectoire, telle que les algorithmes basées sur la commande prédictive, sont à considérer pour un lanceur dont la fiabilité de ses différentes composantes est prouvée. En effet, ce type de méthode est meilleur lorsque la trajectoire suivie est près de la trajectoire de référence, mais les méthodes par adaptation itérative sont plus robustes (Teofilatto et De Pasquale, 1998). Afin de vérifier les propriétés de robustesse des algorithmes, cette section présente des essais pour des cas non-nominaux. Dans un premier temps, le niveau de bruit à la sortie de la fonction de navigation est amplifié afin de simuler un mauvais fonctionnement des capteurs ou de l'algorithme de navigation. Par la suite, la force de poussée du lanceur est modifiée afin de simuler un dysfonctionnement dans la propulsion.

### 7.3.2.1 Niveau de bruit

La robustesse à un niveau de bruit supérieur est étudiée en modifiant l'amplitude du bruit à la sortie de la fonction de navigation. Les résultats de ces simulations sont cohérents avec le commentaire de Teofilatto et De Pasquale (1998) comme quoi, lorsque le niveau de bruit est élevé, les méthodes de suivi de trajectoire demandent des corrections plus importantes que les méthodes d'adaptation itérative. La figure 7.6 présente l'orientation commandée d'une méthode par suivi de trajectoire (NMPC) et celle d'une méthode d'adaptation itérative (Schuler) pour une simulation avec un niveau de bruit de 120  $m$  sur la position et 1  $m/s$  sur la vitesse. Dans les deux cas, l'orbite atteinte est à l'intérieur des spécifications de précision, mais l'amplitude des variations des orientations de l'algorithme basé sur la NMPC est plus grande que celles du cas de comparaison, principalement l'angle hors-plan.

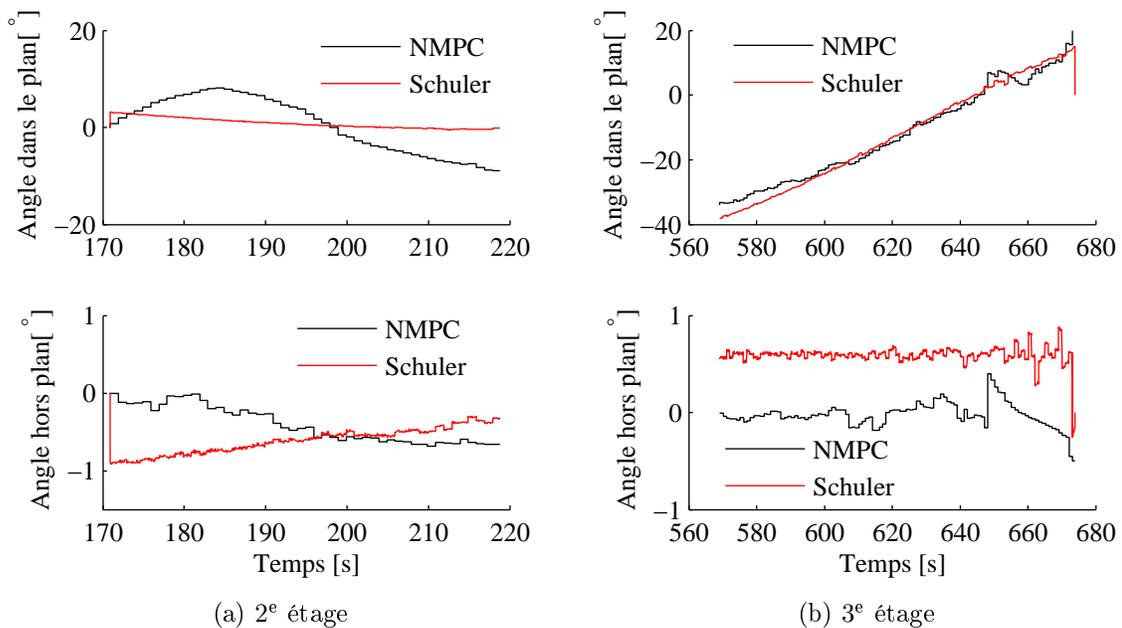


FIGURE 7.6 – Orientations commandées pour un niveau de bruit élevé

En ce qui concerne le niveau de bruit nécessaire pour que la fonction de guidage ne rencontre plus les spécifications de précision du lanceur, il n'y a pas de différences marquées entre les quatre algorithmes. En effet, même avec un niveau de bruit très supérieur au cas nominal, les quatre algorithmes donnent une orbite d'injection satisfaisante. Il est à noter que, dans certains cas, une divergence près de l'injection peut survenir, mais elle n'est pas systématique et dépend de la distribution du bruit dans les dernières secondes du lancement. Lorsque l'amplitude du bruit des dernières secondes est élevée et très variée, il faut alors de grandes manœuvres pour rencontrer les spécifications qui

peuvent amener les algorithmes à diverger, principalement ceux basés sur la commande prédictive puisqu'ils contiennent des contraintes sur l'amplitude maximale des angles d'orientation.

Ainsi, la distribution du bruit dans les dernières secondes est plus importante que son amplitude. Peu importe le niveau de bruit, les quatre méthodes n'ont aucun problème de convergence avant les 10 à 15 dernières secondes du lancement, mais les orientations demandées peuvent être très variantes.

### 7.3.2.2 Force de poussée

Les simulations permettant d'étudier la robustesse à un mauvais fonctionnement de la propulsion s'effectuent en modifiant la force de poussée des moteurs du lanceur, mais en ne modifiant pas celle des modèles dans les fonctions de guidage. Il y a ainsi une erreur de modèle dans la fonction de guidage. Sur ce point, la différence entre la méthode d'adaptation itérative et les méthodes de suivi de trajectoire est très marquée et favorise la méthode de comparaison. Ceci est donc cohérent avec le fait que les méthodes d'adaptation itérative sont plus robustes (Teofilatto et De Pasquale, 1998) et que les méthodes par suivi de trajectoire doivent être considérées uniquement pour un lanceur dont les composantes sont fiables (Shrivastava *et al.*, 1986).

Ceci s'explique par le fait que les méthodes de suivi de trajectoire développées sont basées sur un modèle précis de la dynamique et de la trajectoire. Elles essaient alors de produire une trajectoire qui n'est pas réalisable. Ainsi, le point de départ de l'algorithme s'éloigne de la trajectoire de référence avec les itérations. Malgré cette différence, les algorithmes sont en mesure de converger vers l'orbite demandée, mais, puisque le modèle de prédiction est erroné, la commande appliquée au système est telle que, plutôt que de se rapprocher de la trajectoire, le lanceur s'en éloigne. À un certain point, la loi de guidage n'est plus en mesure de satisfaire à la fois les contraintes sur la précision et celles sur les orientations maximales. La figure 7.7 présente la différence, sur la vitesse de déplacement du lanceur et celle sur le rayon du lanceur, entre la trajectoire réelle et celle de référence pour une simulation où le guidage est effectué par l'algorithme de MPC-LTVR et où la poussée de moteur du troisième étage est de 102 %. Durant le second étage, où le lanceur est parfaitement modélisé, la différence entre les deux trajectoires est faible et demeure à l'intérieur du niveau de bruit. Cependant, dans le troisième étage, on constate l'augmentation graduelle de la différence même si les premières optimisations, jusqu'à environ 660 s, convergent.

À l'opposé, la méthode d'adaptation itérative de comparaison est basée sur une hy-

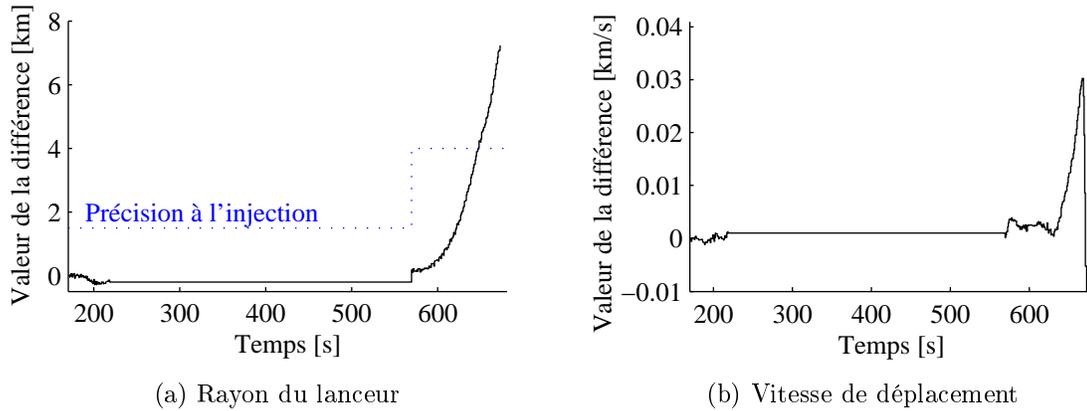


FIGURE 7.7 – Différence entre la trajectoire obtenue avec le MPC-LTVR et la trajectoire de référence

pothèse très forte (accélération gravitationnelle linéaire). Son modèle de la dynamique du lanceur est donc, même dans le cas nominal, erroné. L'ajout d'une erreur supplémentaire ne cause guère de problèmes puisqu'elle doit déjà être robuste aux erreurs de modèle.

La comparaison des algorithmes basés sur la MMPC et celui basé sur la NMPC démontre que les premiers sont moins robustes. En effet, la zone de validité du modèle est restreinte à une région autour de la trajectoire de référence autour de laquelle les modèles linéaires à temps variant ont été définis. Ainsi, au fur et à mesure que le lanceur s'éloigne de la trajectoire de référence la validité des approximations décroît. La figure 7.8a trace la différence entre les pôles de la matrice  $\mathbf{A}_e$  tel qu'estimés par la LTVR et ceux qui devraient être obtenus sur la trajectoire prédite. Similairement, la figure 7.8b correspond à l'élément  $\mathbf{C}_{e(1,6)}$ . Ces graphiques sont obtenus à l'aide des résultats d'une itération à 620 s. On y constate que, de par la différence entre les deux trajectoires, même la dynamique nominale, celle avec la poussée de base, n'est plus bien représentée. L'algorithme calcule alors l'orientation permettant de générer une trajectoire erronée afin de suivre une trajectoire irréalisable.

Le temps est un paramètre de séquencement intéressant pour le suivi de trajectoire de lancement uniquement dans le cas nominal. Il détermine bien la trajectoire nominale, mais, dès que le lanceur s'écarte de cette trajectoire, le séquencement devient faux. Il serait alors plus intéressant d'effectuer un séquencement plus complexe utilisant le temps, la position et la vitesse afin de définir entièrement le domaine de vol du lanceur.

Concrètement, le guidage basé sur la MMPC n'est pas en mesure d'atteindre l'orbite désirée lorsque la poussée du troisième étage varie de plus de 2 % sur toute sa durée

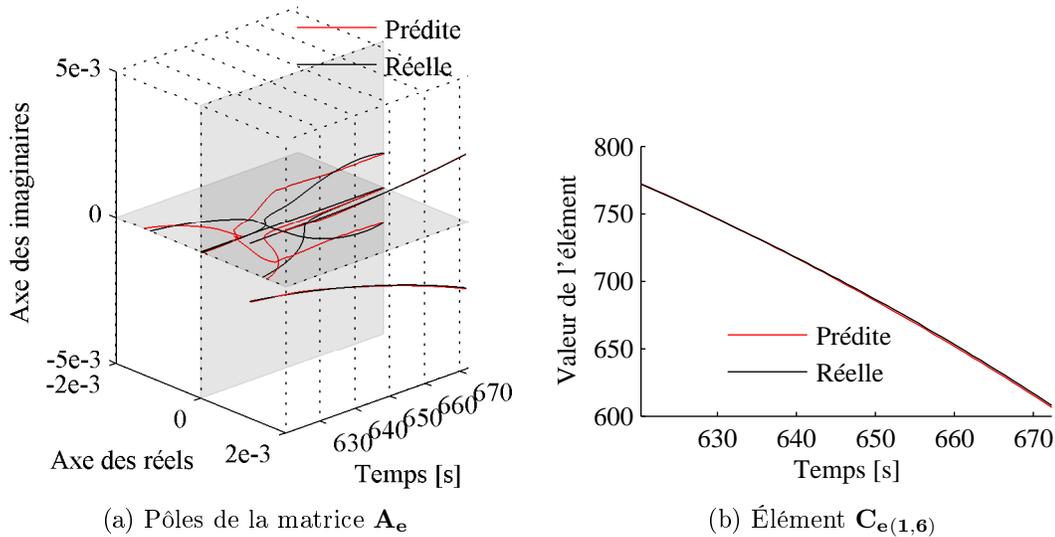


FIGURE 7.8 – Différence entre le modèle linéaire prédit et celui réel

de brûlage. Le niveau d'erreur accepté par le guidage basé sur la NMPC est plus élevé. L'erreur doit être de plus de 4 % ou moins de  $-2$  % avant que l'orbite à l'injection sorte des spécifications voulues. Une diminution de la poussée est plus critique puisqu'il n'est pas possible d'augmenter le transfert d'énergie, alors que, lors d'une augmentation de la poussée, le lanceur peut être ralenti en modifiant l'angle dans le plan. En ce qui concerne la méthode de comparaison, le maximum de variation testé (4,5 % et  $-2,5$  %) n'a pas été en mesure de la faire sortir des spécifications voulues, l'erreur maximale sur les apsides était alors de  $3,7$  km et celle sur l'inclinaison de  $0,03^\circ$ .

## 7.4 Conclusion

Ce chapitre a introduit les représentations linéaires variantes dans le temps dans un algorithme de guidage basé sur la commande prédictive. Ceci s'effectue uniquement en modifiant le modèle de prédiction de la commande prédictive non-linéaire qui devient soit la représentation linéaire variante dans le temps ou la représentation linéaire fractionnelle. Cet algorithme de guidage demeure la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes. La formulation du problème d'optimisation inclut les paramètres orbitaux dans la sortie du modèle afin de pouvoir suivre une trajectoire partiellement définie et dans les contraintes sur la zone terminale afin de pouvoir explicitement inclure les spécifications de précision dans la fonction de guidage.

Ce chapitre démontre que la commande prédictive multi-modèles linéaires est ap-

plicable au guidage par suivi de trajectoire d'un lanceur de satellite, dans la partie exo-atmosphérique de sa trajectoire de lancement. Cependant, même si, en comparaison avec le modèle non-linéaire, les représentations multi-modèles accélèrent la résolution du problème d'optimisation, la fonction de guidage demeure beaucoup plus lente qu'une méthode de comparaison basée sur la résolution d'un problème aux deux bouts par la commande optimale. Ces fonctions de guidage sont plus facilement paramétrables et adaptables à une mission spécifique. Elles sont également plus près de la trajectoire optimale. Ce qui se traduit par un gain de 1,3 *kg* sur la charge utile et une orbite légèrement plus précise.

Une courte étude de la robustesse a également été menée afin de confirmer la piètre performance attendue des méthodes basées sur le suivi de trajectoire dans les cas où des erreurs de modèle sont présentes. Ainsi, en plus d'être plus lents dans le cas nominal, les algorithmes développés dans le cadre de cette thèse sont moins robustes que l'algorithme de comparaison.

# Chapitre 8

## Conclusion

Ce chapitre reprend les conclusions de chaque chapitre et amplifie les liens entre ceux-ci. Il résume également les principales contributions de cette thèse et suggère des pistes de solution pour la continuité des travaux.

Cette thèse traite de la trajectographie exo-atmosphérique d'un lanceur et est divisée en trois problématiques principales. Le premier objectif, présenté au chapitre 2, est le développement des équations du mouvement de translation d'un lanceur. Ces équations permettent d'étudier la seconde problématique qui consiste à développer un algorithme définissant une trajectoire de référence afin d'atteindre l'orbite désirée à partir du point de sortie de l'atmosphère en contrôlant l'orientation de la poussée, la durée de la phase de dérive et la durée de brûlage du troisième étage. Cette problématique est étudiée au chapitre 3. Cette trajectoire de référence sert de base à l'atteinte du troisième objectif qui consiste à développer des algorithmes de guidage en suivi de trajectoire de référence basé sur la commande prédictive. Ces algorithmes sont développés dans les chapitres 4 à 7. Tous les développements et simulations sont effectués sur un simulateur Matlab® utilisant les équations de la dynamique de translation d'un lanceur (chapitre 2).

Le chapitre traitant de la modélisation a permis de développer trois groupes d'équations différents modélisant la dynamique à trois degrés de liberté de la translation d'un lanceur. La comparaison de ces équations valide ces trois approches et explique les lacunes de chacune. L'approche angulaire et celle par quaternion complet comportent au moins une discontinuité alors que l'approche vectorielle est longue à calculer et difficilement utilisable. Puisque la mission étudiée dans ce projet n'amène pas le lanceur près des discontinuités, l'approche angulaire est celle à favoriser dans la suite de l'étude.

Pour définir une trajectoire de référence, une formulation d'un problème d'optimi-

sation directe a été développée et résolue pour la mission étudiée. Les inconnues d'une optimisation directe sont la valeur de l'orientation de la poussée plutôt que des paramètres découlant de l'Hamiltonien comme lors d'une optimisation indirecte. Cette formulation est la minimisation d'un critère sujet à des contraintes sur la dynamique du système et des contraintes terminales pour définir l'orbite. Le critère est caractérisé par l'ajout d'un terme incluant les incréments de commande, un basé sur des connaissances *a priori* de la trajectoire et un troisième afin d'inclure des variables d'écart sur les contraintes terminales. L'utilité des différents termes est démontrée par la comparaison des résultats d'optimisations effectuées avec différents paramètres. Le modèle utilisé de la dynamique du lanceur est le modèle à pseudo-5ddl de la dynamique de translation qui ajoute les spécifications de la boucle de commande sans nécessiter le modèle complet à six degrés de liberté.

Cette trajectoire de référence est ensuite utilisée, au chapitre 6, pour définir une famille de modèles linéaires de la dynamique non-linéaire du lanceur. Cette famille sert à la construction d'une représentation linéaire à temps variant et d'une représentation linéaire fractionnelle de la dynamique. La validité de ces deux représentations est démontrée en les comparant à la dynamique non-linéaire complète.

La trajectoire de référence et les représentations linéaires multi-modèles sont finalement utilisées dans les algorithmes de guidage développés aux chapitres 5 et 7. Le premier est l'application de la commande prédictive non-linéaire au suivi d'une trajectoire de lancement. La formulation du problème est caractérisée par l'utilisation des paramètres orbitaux comme vecteur de sortie et de la commande prédictive par mode duel afin d'assurer la stabilité de la formulation. Des simulations démontrent que l'ajout de contraintes de formage de l'entrée améliore le temps de calcul de l'algorithme sans dégrader l'orbite atteinte. Une augmentation graduelle de la zone terminale est également utilisée afin de diminuer les grandes manœuvres près de l'injection. Le dernier chapitre est une modification de cet algorithme afin de remplacer le modèle de prédiction non-linéaire par l'une des deux représentations multi-modèles linéaires. Cette modification donne un algorithme basé sur la commande prédictive multi-modèles. La validité des trois algorithmes est démontrée par des simulations avec un niveau de bruit nominal. De ces trois algorithmes, celui basé sur la commande prédictive à représentation linéaire variante dans le temps est celui présentant les meilleures performances. Cependant, son temps de calcul est beaucoup plus élevé que le temps de calcul d'une méthode de comparaison et sa robustesse à une erreur de modèle est également moins bonne.

## 8.1 Principales contributions

Les principales innovations de cette thèse peuvent se résumer dans les points suivants :

### **Modélisation de la dynamique de translation par un quaternion complet**

Dans la modélisation de la rotation, le quaternion unitaire est souvent utilisé pour remplacer les angles d'Euler. Celui-ci élimine la discontinuité inhérente à l'utilisation de trois angles pour orienter un vecteur. Cependant, bien qu'il soit courant dans la modélisation de la dynamique de rotation, le quaternion est absent de la modélisation de la translation. Un seul auteur (Andreis et Canuto, 2004, 2005) l'utilise afin de modéliser la cinématique d'un objet orbitant. Ainsi, l'utilisation du quaternion complet dans la modélisation de la dynamique, incluant les forces, du lanceur est une extension intéressante aux travaux précédents. Cependant, la contribution majeure concerne le développement des équations permettant de lier le quaternion complet à la représentation angulaire. Ces équations permettent la comparaison des différentes représentations afin de conclure que les équations de la dynamique de translation utilisant un quaternion complet sont une alternative intéressante à la représentation angulaire. Elles éliminent la discontinuité au-dessus des pôles terrestres tout en étant plus rapide et utilisable que la représentation vectorielle.

### **Utilisation du modèle à pseudo-5ddl**

La modélisation à pseudo-5ddl est une approximation de la dynamique de rotation en incluant la fonction de transfert de cette dynamique. Une fonction de guidage fonctionnant sur ce type de simulateur peut, dans la majorité des cas, être implémentée sans aucune modification sur le simulateur complet à six degrés de liberté. Bien que ceci soit admis et utilisé, les algorithmes de guidage et de définition de trajectoire utilisent toujours le modèle à trois degrés de liberté. L'utilisation du modèle à pseudo-5ddl permet de représenter la dynamique de rotation dans la fonction de guidage sans utiliser le modèle complet et lourd de la dynamique contrôlée à six degrés de liberté.

### **Utilisation d'une Terre aplatie**

Dans les fonctions de guidage et de définition de trajectoires, les simplifications admises lors des simplifications du problème concernent majoritairement l'accélération gravitationnelle et la forme de la Terre. Principalement dans les algorithmes hors-ligne, ces simplifications produisent une trajectoire sous-optimale. Dans cette thèse, le modèle de l'accélération gravitationnelle inclut le second harmonique zonal afin de modéliser l'aplatissement de la Terre. Le lancement se déroulant près des pôles, cette aplatissement a un effet significatif et peut se traduire par une augmentation de la charge utile apportée en orbite.

**Utilisation de connaissances *a priori* dans la définition de trajectoire**

Cette thèse complexifie le critère classique utilisé dans la définition d'une trajectoire de lancement. À quelques exceptions près, tous les algorithmes de définition d'une trajectoire de lancement sont basés sur la minimisation de la masse consommée. Les exceptions sont des optimisations directes qui incluent les incréments de commande dans le critère à minimiser. Le critère proposé inclut des variables d'écart. Ce type de variables constitue une solution classique pour améliorer les propriétés de convergence d'optimisation, mais n'avait pas encore été utilisé dans la problématique de trajectographie du lancement. Cependant, l'innovation majeure du critère proposé est l'utilisation de connaissances *a priori* directement dans le critère. Ces connaissances proviennent des résultats d'une solution analytique obtenue par des simplifications du problème d'optimisation. Le critère proposé inclut cette solution analytique afin d'améliorer les propriétés de convergence de l'optimisation.

**Application de la commande prédictive discrète au guidage de lanceur**

La commande prédictive a déjà été appliquée à la problématique du guidage d'un lanceur, mais son utilisation consistait à effectuer du guidage atmosphérique afin de limiter les problèmes structuraux. Cependant, de par l'utilisation de la commande prédictive à temps continu, le problème devait être restreint au mouvement dans le plan orbital autour d'une Terre plate. Dans cette thèse, la commande prédictive à temps discret est utilisée afin de traiter le problème complet autour d'une Terre aplatie. De plus, l'étude de la trajectoire de référence permet une division de la trajectoire en deux sous-problèmes distincts. La commande prédictive permet également d'inclure les spécifications de précision à l'injection directement dans la loi de guidage. Par extension, ceci permet de diminuer l'amplitude des manœuvres près de l'injection. L'innovation principale est cependant le suivi d'une trajectoire définie par ses paramètres orbitaux. L'utilisation des paramètres orbitaux permet de partiellement définir une trajectoire, ce qui est intéressant lorsque certains paramètres, comme l'anomalie vraie, n'influent pas sur la réussite du lancement. En plus, ces travaux suggèrent d'utiliser les constantes dynamiques (moment angulaire spécifique et énergie mécanique spécifique) plutôt que les constantes géométriques (demi-grand axe et excentricité) pour représenter les dimensions de l'orbite. Ce changement de constantes permet d'éliminer les problèmes numériques provenant de l'utilisation d'une valeur très près de 0.

**Représentation linéaire à temps variant de la dynamique**

La modélisation de la dynamique d'un véhicule par représentation linéaire à paramètres variants est effectuée à plusieurs reprises et sur plusieurs véhicules différents. Cependant, la translation d'un lanceur n'avait pas encore été étudiée.

**Représentation linéaire fractionnelle de la dynamique**

Similairement, la représentation linéaire fractionnelle est un outil souvent utilisé

pour modéliser un système linéaire à paramètre variant, mais l'application à la translation d'un lanceur est une nouveauté.

### **Commande prédictive multi-modèles linéaires**

La commande prédictive multi-modèles est une approche classique pour commander un système autour de plusieurs points d'opérations. Encore une fois, les travaux effectués ne sont ainsi que l'adaptation de la méthode à un nouveau domaine d'application. Notamment, de par la connaissance de la trajectoire de référence sur toute la durée de la prédiction, l'optimisation minmax est, de par l'utilisation d'une représentation préidentifiée, convertie en une minimisation simple. Un algorithme intéressant qui est développé dans cette thèse est la commande prédictive à représentation linéaire fractionnelle, qui n'est que peu utilisée dans la littérature. L'application effectuée dans ces travaux ne rend pas justice à celle-ci qui gagnerait plutôt à être utilisée pour développer des algorithmes de commande prédictive robuste, similaire à Díaz-Mendoza et Budman (2010).

## **8.2 Suite possible à l'étude**

Cette étude a permis de démontrer l'efficacité de certaines méthodes pour la définition de la partie exo-atmosphérique d'une trajectoire de lancement et pour le guidage d'un lanceur. Elle a cependant conclu que la commande prédictive n'est pas une voie intéressante pour le guidage d'un lanceur. Malgré tout, elle a levé certains points intéressants à approfondir pour continuer l'étude de la trajectographie d'un lanceur.

### **Trajectoire endo-atmosphérique**

Le point le plus intéressant et important à considérer pour la poursuite de ces travaux est le passage de l'algorithme de définition de trajectoire vers une optimisation de la trajectoire complète, incluant la partie endo-atmosphérique et la manœuvre d'inclinaison gravitationnelle. De plus, une étude sur les gains possibles en effectuant le guidage atmosphérique serait intéressante. L'algorithme de guidage par commande prédictive pourrait alors être intéressant puisqu'il permet d'inclure des contraintes et de fonctionner plus près des performances optimales.

### **Banque de trajectoires**

Par la suite, même si la conclusion principale de la thèse est que le suivi de trajectoire par commande prédictive n'est pas une méthode intéressante pour effectuer le guidage d'un lanceur, une méthode par suivi de trajectoire doit pouvoir compter sur une banque de trajectoires définies sur plusieurs points de sortie. De toute la phase exo-atmosphérique, le point de sortie de l'atmosphère est celui qui subit

le plus de perturbations, provenant de l'accumulation de perturbations dans la phase endo-atmosphérique non guidée. L'utilisation d'une banque de trajectoires différentes en fonction du point de sortie permet de choisir celle optimale, sans avoir à la calculer à bord du véhicule et d'appliquer l'algorithme de suivi sur cette trajectoire nouvellement choisie.

#### **Amélioration de la robustesse du guidage par commande prédictive**

Dans cette thèse, les bruits à moyenne non nulle sont gérés par la fonction de navigation qui élimine le biais. Cependant, puisque cette fonction n'est pas basée sur le même modèle que le modèle de prédiction de la fonction de guidage, elle ne gère pas les erreurs de modèle. Ceci peut expliquer, en partie, les mauvaises propriétés de robustesse des fonctions de guidage basé sur la commande prédictive. En combinant le développement des deux fonctions pour que la fonction de navigation agisse comme un observateur dans la boucle de GNC, cette fonction pourrait inclure le modèle de prédiction et ainsi possiblement gérer les erreurs de modélisation et améliorer les propriétés de robustesse.

#### **Étude de robustesse approfondie**

L'étude de robustesse effectuée dans cette thèse voulait comparer le pire cas des différents algorithmes. Une étude plus approfondie incluant des simulations de Monte-Carlo devrait être faite. Puisque la méthode basée sur l'approximation de Schuler est la meilleure de toutes celles testées, cette étude pourrait se concentrer sur celle-ci afin de valider son comportement.

#### **Implémentation sur modèle à six degrés de liberté**

Les résultats présentés dans cette thèse sont obtenus sur un simulateur à pseudo-5ddl, mais la validation finale devrait s'effectuer sur un modèle complet à six degrés de liberté. Le lanceur est cependant un procédé instable en rotation, le modèle complet doit donc inclure la fonction de commande et, idéalement, une fonction de navigation pour fermer les boucles de GNC. Ceci pourrait s'effectuer sur le simulateur Simulink<sup>®</sup> en cours de développement et de validation au RDDC - Valcartier. L'implémentation des quatre algorithmes a d'ailleurs été effectuée et validée sur ce simulateur.

## **8.3 Publications**

Les travaux menés dans cette thèse ont été présentés à trois conférences, dans un article de journal et dans cinq rapports techniques du RDDC - Valcartier. Ils ont également été acceptés pour être présentés à une conférence supplémentaire. Deux articles de journaux supplémentaires ont également été soumis pour révision. À ce moment, aucun retour n'a été donné sur ceux-ci.

### 8.3.1 Articles de journaux

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2011, «Comparaison of space launcher equations of translation using a full quaternion», *Canadian Aeronautics and Space Journal*, vol. 57, n° 1, p. 75–84.

doi:10.5589/q11-013.

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2012a, «Exo-atmospheric launch trajectory using direct optimization and slack variables», *Canadian Aeronautics and Space Journal*. Soumis pour révision.

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2012b, «Varying linear model predictive control applied to launch ascent trajectory guidance», *Acta Astronautica*. Soumis pour révision.

### 8.3.2 Compte-rendus de conférences

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2010a, «Comparison of three equations of motion for a space launcher», dans *Proc. of the 15th CASI Astronautics Conference*, AS 10-007, Canadian Aeronautics and Space Institute, Toronto, Canada.

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2012a, «LFR and LTV representation of space launcher translation dynamics», dans *Proc. of the 16th CASI Astronautics Conference*, AS 12-042, Canadian Aeronautics and Space Institute, Québec, Canada.

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2012b, «Space launcher guidance based on discrete nonlinear model predictive control», dans *Proc. of the 63<sup>rd</sup> International Astronautical Congress*, IAC-12-C1.1.6, International Astronautical Federation, Naples, Italie.

Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Farinaccio, R. 2010b, «Equations of motion of a launcher using a full quaternion», dans *Advances in the Astronautical Sciences*, vol. 136, American Astronautical Society, San Diego, États-Unis, p. 1681–1696.

### 8.3.3 Rapports techniques du RDDC - Valcartier

Vachon, A., Gagnon, E. et Desbiens, A. 2010a, «Modélisation d'un lanceur flexible», rapport technique DRCD Valcartier TN 2010-095, R&D pour la défense Canada - Valcartier.

Vachon, A., Gagnon, E. et Desbiens, A. 2010b, «Revue bibliographique sur le guidage d'un lanceur», rapport technique DRCD Valcartier TN 2010-010, R&D pour la défense Canada - Valcartier.

Vachon, A., Gagnon, E., Desbiens, A. et Bérard, C. 2012a, «Guidage d'un lanceur de satellite basé sur l'approximation de schuler», rapport technique DRCD Valcartier TM 2011-347, R&D pour la Défense Canada - Valcartier.

Vachon, A., Gagnon, E., Desbiens, A. et Bérard, C. 2012b, «Simulateur pour le guidage d'un lanceur de satellites : Description des fonctions Matlab<sup>®</sup>», rapport technique DRCD Valcartier TN XXX-XX, R&D pour la Défense Canada - Valcartier. En publication.

Vachon, A., Gagnon, E., Farinaccio, R. et Desbiens, A. 2010c, «Équations de la dynamique de translation d'un lanceur», rapport technique DRCD Valcartier TR 2010-008, R&D pour la défense Canada - Valcartier.

# Bibliographie

- Adimurthy, V. 1987, «Launch vehicle trajectory optimization», *Acta Astronautica*, vol. 15, n° 11, p. 845–850.  
doi:10.1016/0094-5765(87)90039-7.
- Alonso Zotes, F. et Santos Peñas, M. 2010, «Multi-criteria genetic optimisation of the manoeuvres of a two-stage launcher», *Information Sciences*, vol. 180, n° 6, p. 896–910.  
doi:10.1016/j.ins.2009.11.001.
- Andreis, D. et Canuto, E. S. 2004, «Orbit dynamics and kinematics with full quaternions», dans *Proc. of the 2004 American Control Conference*, vol. 4, American Automatic Control Council, Boston, États-Unis, p. 3660–3665.
- Andreis, D. et Canuto, E. S. 2005, «The LORF orbit equation with full quaternions», dans *Proc. of 16th IFAC World Congress*, vol. 16, International Federation of Automatic Control, Prague, République Tchèque, p. 330–335.  
doi:10.3182/20050703-6-CZ-1902.02016.
- Aufderheide, B. et Bequette, B. W. 2003, «Extension of dynamic matrix control to multiple models», *Computers and Chemical Engineering*, vol. 27, n° 8-9, p. 1079–1096.  
doi:10.1016/S0098-1354(03)00038-3.
- Baldesi, G. 2008, *Modelling, Control Design and Simulation for a Launch Vehicle : from Linear to Nonlinear Methods*, thèse de doctorat, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace.
- Baldick, R. 2006, *Applied Optimization, Formulation and Algorithms for Engineering Systems*, Cambridge University Press, New York, États-Unis.
- Betts, J. T. 1998, «Survey of numerical methods for trajectory optimization», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 21, n° 2, p. 193–207.  
doi:10.2514/2.4231.

- Bittner, H. 1976, «Flat-Earth guidance law using inflight vehicle parameter identification», *Automatica*, vol. 12, n° 5, p. 427–443, ISSN 0005-1098.  
doi:10.1016/0005-1098(76)90004-2.
- Blakelock, J. H. 1991, *Automatic control of Aircraft and Missiles*, 2<sup>e</sup> éd., Wiley-Interscience, New York, États-Unis.
- Bletsos, N. A. 2004, «Launch vehicle guidance, navigation, and control», URL <http://www.aero.org/publications/crosslink/winter2004/06.html>.
- Bouchard, J. 2007, *Commande prédictive basée sur la simulation : Application à la flottation en colonne*, thèse de doctorat, Université Laval.
- Boukarim, G. E. et Chow, J. H. 1998, «Modeling of nonlinear system uncertainties using a linear fractional transformation approach», dans *Proc. of the 1998 American Control Conference*, vol. 5, American Automatic Control Council, Philadelphia, États-Unis, p. 2973–2979.  
doi:10.1109/ACC.1998.688403.
- Brinda, S. et Dasgupta, S. 2006, «Guidance law for an air-breathing launch vehicle using predictive control concept», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 29, n° 6, p. 1460–1463.  
doi:10.2514/1.23221.
- Brown, K. R., Harrold, E. F. et Johnson, G. W. 1969, «Rapid optimization of multiple-burn rocket flights», rapport technique NASA CR-1430, NASA, Marshall Space Flight Center.
- Brusch, R. G. 1974, «A nonlinear programming approach to space shuttle trajectory optimization», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 13, n° 1, p. 94–118.  
doi:10.1007/BF00935611.
- Bruzelius, F. 2004, *Linear Parameter-Varying Systems, an approach to gain scheduling*, thèse de doctorat, Chalmers University of Technology.
- Bryson, Jr., A. E. et Ho, Y.-C. 1969, *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Company, Toronto, Canada.
- Caldeira, A. C. D. et Fontes, F. A. C. C. 2007, «Model predictive control of under-actuated mechanical systems», dans *Workshop on Robotics and Mathematics*, Coimbra, Portugal.
- Caldwell, C. V., Collins, E. G. et Palanki, S. 2006, «Integrated guidance and control of AUVs using shrinking horizon model predictive control», dans *OCEANS 2006*,

- Marine Technology Society, Boston, États-Unis.  
doi:10.1109/OCEANS.2006.306848.
- Cao, Y. Y., Hu, L. et Frank, P. M. 2000, «Model predictive control via piecewise constant output feedback for multirate sampled-data systems», dans *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 1, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Sydney, Australie, p. 650–655.  
doi:10.1109/CDC.2000.912840.
- Chandler, D. C. et Smith, I. E. 1967, «Development of the iterative guidance mode with its application to various vehicles and missions», *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 4, n° 7, p. 898–903.  
doi:10.2514/3.28985.
- Chemori, A. et Alamir, M. 2004, «Nonlinear predictive control of under-actuated mechanical systems, application : The ECP 505 inverted pendulum», dans *16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 299, Leuven, Belgique.
- Cheng, Y. et DeMoor, B. 1994, «A multidimensional realization algorithm for parametric uncertainty modelling and multiparameter margin problems», *International Journal of Control*, vol. 60, n° 5, p. 789–807.  
doi:10.1080/00207179408921495.
- Chenglong, H., Xin, C. et Leni, W. 2008, «Optimizing RLV ascent trajectory using PSO algorithms», dans *Proc. of the 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Shenzhen, Chine, p. 1–4.  
doi:10.1109/ISSCAA.2008.4776380.
- Chou, J. C. K. 1992, «Quaternion kinematic and dynamic differential equations», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, n° 1, p. 53–64.  
doi:10.1109/70.127239.
- Circi, C. 2004, «Hybrid methods and Q-guidance for rocket performance optimization», *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers – Part G – Journal of Aerospace Engineering*, vol. 218, n° 5, p. 353–359.  
doi:10.1243/0954410042467040.
- Cockburn, J. C. et Morton, B. G. 1997, «Linear fractional representations of uncertain systems», *Automatica*, vol. 33, n° 7, p. 1263–1271.  
doi:10.1016/S0005-1098(97)00049-6.

- COESA. 1976, «U.S. standard atmosphere 1976», rapport technique NOAA-S/T 76-1562, National Oceanic and Atmospheric Administration.
- Curtis, H. D. 2010, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 2<sup>e</sup> éd., Aerospace Engineering Series, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, Angleterre.
- Desbiens, A., Hodouin, D. et Plamondon, E. 2000, «Global predictive control : a unified control structure for decoupling setpoint tracking, feedforward compensation and disturbance rejection dynamics», *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, vol. 147, n<sup>o</sup> 4, p. 465–475.  
doi:10.1049/ip-cta:20000443.
- Di Sotto, E. et Teofilatto, P. 2002, «Semi-analytical formulas for launcher performance evaluation», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 25, n<sup>o</sup> 3, p. 538–545.  
doi:10.2514/2.4914.
- Díaz-Mendoza, R. et Budman, H. 2010, «Structured singular valued based robust non-linear model predictive controller using volterra series models», *Journal of Process Control*, vol. 20, n<sup>o</sup> 5, p. 653–663.  
doi:10.1016/j.jprocont.2010.03.001.
- Doyle, John. 1982, «Analysis of feedback systems with structured uncertainties», *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, vol. 129, n<sup>o</sup> 6, p. 242–250.  
doi:10.1049/ip-d:19820053.
- Dukeman, G. A. 2005, *Closed-Loop Nominal and Abort Atmospheric Ascent Guidance for Rocket-Powered Launch Vehicles*, thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.
- Duplain, É. 2012, *Contrôle d'un lanceur de satellite de petite taille*, mémoire de maîtrise, Université Laval.
- Estep, D. J., Hodges, D. H. et Warner, M. 2001, «The solution of a launch vehicle trajectory problem by adaptive finite-element method», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, p. 4677–4690.  
doi:10.1016/S0045-7825(00)00339-X.
- Falcone, P., Borrelli, F., Tseng, H. E., Asgari, J. et Hrovat, D. 2008, «Linear time-varying model predictive control and its application to active steering systems : Stability analysis and experimental validation», *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, n<sup>o</sup> 8, p. 862–875.  
doi:10.1002/rnc.1245.

- Feeley, T. S. et Speyer, J. L. 1994, «Techniques for developing approximate optimal advanced launch system guidance», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 17, n° 5, p. 889–896.  
doi:10.2514/3.21286.
- Gaposchkin, E. M. et Lambeck, K. 1970, «1969 Smithsonian Standard Earth (ii)», rapport technique SAO Special Report 315, Smithsonian Astrophysical Observatory.
- Garcia, C. E., Prett, D. M. et Morari, M. 1989, «Model predictive control : Theory and practice - a survey», *Automatica*, vol. 25, p. 335–348.  
doi:10.1016/0005-1098(89)90002-2.
- Gath, P. F. et Calise, A. J. 2001, «Optimization of launch vehicle ascent trajectories with path constraints and coast arcs», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 24, n° 2, p. 296–304.  
doi:10.2514/2.4712.
- Gill, P. E., Murray, W. et Saunders, M. A. 1997, «SNOPT : An SQP algorithm for large-scale constrained optimization», *SIAM Journal on Optimization*, vol. 12, p. 979–1006.  
doi:10.1137/S0036144504446096.
- Grüne, L. et Pannek, J. 2011, *Nonlinear Model Predictive Control, Theory and Algorithms*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, London, Angleterre.
- Halldorsson, U., Fikar, M. et Unbehauen, H. 2002, «Multirate nonlinear predictive control», dans *Proc. of the 2002 American Control Conference*, vol. 5, American Automatic Control Council, Anchorage, États-Unis, p. 4191–4196.  
doi:10.1109/ACC.2002.1024589.
- Hamilton, W. R. 1866, *Elements of Quaternions*, Longmans, Green, & Co., London, Angleterre.
- Hanson, J. M., Shrader, M. W. et Cruzen, C. A. 1995, «Ascent guidance comparisons», *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 43, n° 3, p. 307–326.
- Higham, N. J. 2002, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2<sup>e</sup> éd., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, États-Unis.
- Hillier, F. S. et Lieberman, G. J. 2010, *Introduction to Operations Research*, 9<sup>e</sup> éd., McGraw-Hill Companies, Inc., New York, États-Unis.

- Huzmezan, M. et Maciejowski, J. 1998, «Reconfiguration and scheduling in flight using quasi-LPV high-fidelity models and MBPC control», dans *Proc. of the 1998 American Control Conference*, vol. 6, American Automatic Control Council, Philadelphia, États-Unis, p. 3649–3653.  
doi:10.1109/ACC.1998.703294.
- Jadbabaie, A. et Hauser, J. 2005, «On the stability of receding horizon control with a general terminal cost», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, n° 5, p. 674–678.  
doi:10.1109/TAC.2005.846597.
- Jaggers, R. F. 1974, «Asymmetrical booster ascent guidance and control, volume 5 - space shuttle powered explicit guidance», rapport technique NAS9-13568, National Aeronautics and Space Administration.
- Jezewski, D. J. 1971, «An optimal, analytic solution to the linear-gravity, constant-thrust trajectory problem», *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 8, n° 7, p. 793–796.  
doi:10.2514/3.30320.
- Johnson, E. N., Calise, A. J. et Corban, J. E. 2001, «Adaptive guidance and control for autonomus launch vehicles», dans *Proc. of IEEE Aerospace Conference*, vol. 6, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Big Sky, États-Unis, p. 2669–2682.  
doi:10.1109/AERO.2001.931288.
- Karsli, G. et Tekinalp, O. 2005, «Trajectory optimization of advanced launch system», dans *Proc. of 2nd International Conference on Recent Advances in Space Technologies*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Istanbul, Turquie, p. 374–378.  
doi:10.1109/RAST.2005.1512595.
- Keerthi, S. S. et Gilbert, E. G. 1988, «Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems : Stability and moving-horizon approximations», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 57, n° 2, p. 265–293.  
doi:10.1007/BF00938540.
- Kolmanovsky, I. et McClamroch, N. H. 1995, «Developments in nonholonomic control problems», *IEEE Control Systems*, vol. 15, n° 6, p. 20–36.  
doi:10.1109/37.476384.
- Kothare, M. V., Mettler, B., Morari, M., Bendotti, P. et Falinower, C.-M. 2000, «Level control in the steam generator of a nuclear power plant», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, n° 1, p. 55–69.  
doi:10.1109/87.817692.

- Kuo, B. C. et Golnaraghi, F. M. 2003, *Automatic Control Systems*, 8<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, États-Unis.
- Kwon, W.H. et Han, S. 2005, *Receding Horizon Control : Model Predictive Control for State Models*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer-Verlag, London, Angleterre.
- Lawden, D. F. 1963, *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworths, London, Angleterre.
- Leung, M. J. et Calise, A. J. 1990, «An approach to optimal guidance of an advanced launch vehicle concept», dans *Proc. of the 1990 American Control Conference*, vol. 2, American Automatic Control Council, San Diego, États-Unis, p. 1824–1828.
- Leung, M. J. et Calise, A. J. 1994, «Hybrid approach to near-optimal launch vehicle guidance», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 17, n<sup>o</sup> 5, p. 881–888.  
doi:10.2514/3.21285.
- Llibre, M. 2000, *Commande optimale des processus déterministes*, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France.
- LM-2C. 1999, *LM-2C User's Manual*, China Academy of Launch Vehicle Technology.
- Lu, P. 1996, «Nonlinear trajectory tracking guidance with application to a launch vehicle», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 19, n<sup>o</sup> 1, p. 99–106.  
doi:10.2514/3.21585.
- Lu, P., Griffin, B. J., Dukeman, G. A. et Chavez, F. R. 2008, «Rapid optimal multiburn ascent planning and guidance», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 31, n<sup>o</sup> 6, p. 1656–1664.  
doi:10.2514/1.36084.
- Lu, P. et Pan, B. 2010, «Highly constrained optimal launch ascent guidance», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 33, n<sup>o</sup> 2, p. 404–14.  
doi:10.2514/1.45632.
- Lu, P., Sun, H. et Tsai, B. 2003, «Closed-loop endoatmospheric ascent guidance», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 26, n<sup>o</sup> 2, p. 283–294.  
doi:10.2514/2.5045.
- Lu, Y. et Arkun, Y. 2000, «Quasi-min-max MPC algorithms for LPV systems», *Automatica*, vol. 36, n<sup>o</sup> 4, p. 527–540.  
doi:10.1016/S0005-1098(99)00176-4.
- Maciejowski, J. M. 2002, *Predictive Control with Constraints*, Prentice Hall, Essex, Angleterre.

- Magni, J.-F. 2006, «User manual of the linear fractional representation toolbox, version 2.0», rapport technique TR 5/10403.01F DCSD, ONERA, The French Aerospace Lab.
- Maki, S. C. 1990, «A low-cost GPS inertial guidance (GPSIG) for space boosters», dans *IEEE Symposium on Position Location and Navigation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Las Vegas, États-Unis, p. 176–183.  
doi:10.1109/PLANS.1990.66174.
- Marcos, A. et Balas, G. 2004, «Development of linear-parameter-varying models for aircraft», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 27, n° 2, p. 218–228.  
doi:10.2514/1.9165.
- Marcos, A., Bates, D. G. et Postlethwaite, I. 2005, «Exact nonlinear modelling using symbolic linear fractional transformations», dans *Proc. of 16th IFAC World Congress*, vol. 16, International Federation of Automatic Control, Prague, République Tchèque, p. 330–335.  
doi:10.3182/20050703-6-CZ-1902.00032.
- Marquez, H. J. 2003, *Nonlinear Control System : Analysis and Design*, Wiley-Interscience, Hoboken, États-Unis.
- Marrdonny, M. et Mobed, M. 2009, «A guidance algorithm for launch to equatorial orbit», *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 81, n° 2, p. 137–148.  
doi:10.1108/00022660910941839.
- Michalska, H. et Mayne, D. Q. 1993, «Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, n° 11, p. 1623–1633.  
doi:10.1109/9.262032.
- Moin, P. 2010, *Fundamentals of engineering numerical analysis*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, New York, États-Unis.
- Morari, M. et Lee, J. H. 1999, «Model predictive control : past, present and future», *Computers and Chemical Engineering*, vol. 23, n° 4-5, p. 667–682.  
doi:10.1016/S0098-1354(98)00301-9.
- Morton, B. G. 1985, «New applications of mu to real-parameter variation problems», dans *Proc. of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 24, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Fort Lauderdale, États-Unis, p. 233–238.  
doi:10.1109/CDC.1985.268816.

- Mukai, H. et Polak, E. 1978, «A second-order method for the general nonlinear programming problem», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 26, n° 4, p. 515–532.  
doi:10.1007/BF00933150.
- Murray, R. M, Li, X. et Sastry, S. S. 1994, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Boca Raton, États-Unis.
- de Nicolao, G., Magni, L. et Scattolini, R. 1998, «Stabilizing receding-horizon control of nonlinear time-varying systems», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, n° 7, p. 1030–1036.  
doi:10.1109/9.701133.
- Oh, S. R. et Sun, J. 2010, «Path following of underactuated marine surface vessels using line-of-sight based model predictive control», *Ocean Engineering*, vol. 37, n° 2-3, p. 289–295.  
doi:10.1016/j.oceaneng.2009.10.004.
- Oriolo, G. et Nakamura, Y. 1991, «Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints : underactuated manipulators», dans *Proc. of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, Brighton, Angleterre, p. 2398–2403.  
doi:10.1109/CDC.1991.261620.
- Packard, A. 1994, «Gain scheduling via linear fractional transformations», *Systems & Control Letters*, vol. 22, n° 2, p. 79–92.  
doi:10.1016/0167-6911(94)90102-3.
- Pan, B. et Lu, P. 2010, «Improvements to optimal launch ascent guidance», dans *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, AIAA 10-8174, Toronto, Canada.
- Park, M.-J. et Rhee, H.-K. 2001, «LMI-based robust model predictive control for a continuous MMA polymerization reactor», *Computers and Chemical Engineering*, vol. 25, n° 11-12, p. 1513–1520.  
doi:10.1016/S0098-1354(01)00715-3.
- Pong, C. M., Saenz-Otero, A. et Miller, D. W. 2011, «Autonomous thruster failure recovery on underactuated spacecraft using model predictive control», dans *AAS Guidance and Control Conference*, AAS 11-033, Breckenridge, États-Unis.
- Pontryagin, L. S. 1986, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Classics of Soviet Mathematics, Gordon and Breach Science Publishers, Montreux, Suisse.
- Prussing, J. E. et Conway, B. A. 1993, *Orbital Mechanics*, Oxford University Press, Inc., New York, États-Unis.

- Robbins, H. M. 1965, «Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories», *AIAA Journal*, vol. 3, n° 6, p. 1094–1098.  
doi:10.2514/3.3060.
- Roh, W. et Kim, Y. 2002, «Trajectory optimization for a multi-stage launch vehicle using time finite element and direct collocation methods», *Engineering Optimization*, vol. 37, n° 1, p. 15–32.  
doi:10.1080/03052150210912.
- Rugh, W. J. et Shamma, J. S. 2000, «Research on gain scheduling», *Automatica*, vol. 36, n° 10, p. 1401–1425.  
doi:10.1016/S0005-1098(00)00058-3.
- Scattolini, R. et Schiavoni, N. 1995, «A multirate model-based predictive controller», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, n° 6, p. 1093–1097.  
doi:10.1109/9.388691.
- Sellers, J. J. 2005, *Understanding Space, An Introduction to Astronautics*, 3<sup>e</sup> éd., Space Technology Series, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, États-Unis.
- Shamma, J. S. et Cloutier, J. R. 1993, «Gain-scheduling missile autopilot design using linear parameter varying transformations», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 16, n° 2, p. 256–263.  
doi:10.2514/3.20997.
- Shaver, D. A. et Hull, D. G. 1990, «Advanced launch system trajectory optimization using suboptimal control», dans *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Portland, États-Unis.
- Shi, H., Zhu, J. et Sun, Z. 2005, «INS/GPS integrated system state estimation based on hopfield neural network», dans *International Conference on Neural Networks and Brain*, vol. 2, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Beijing, China, p. 975–979.  
doi:10.1109/ICNNB.2005.1614782.
- Shrivastava, S. K., Seetharama Bhat, M. et Sinha, S. K. 1986, «Closed loop guidance of satellite launch vehicle - an overview», *Journal of the Institution of Engineers (India) : Aerospace Engineering Journal*, vol. 66, n° 2, p. 62–76.
- Sinha, S. K. et Shrivastava, S. K. 1989, «Optimal explicit guidance for three-dimensional launch trajectory», *Acta Astronautica*, vol. 19, n° 6-7, p. 555–560.  
doi:10.1016/0094-5765(89)90123-9.

- Sinha, S. K. et Shrivastava, S. K. 1990, «Optimal explicit guidance of multistage launch vehicle along three-dimensional trajectory», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 13, n° 3, p. 394–403.  
doi:10.2514/3.25350.
- Stoer, J. et Bulirsch, R. 2002, *Introduction to Numerical Analysis, Texts in Applied Mathematics*, vol. 12, 3<sup>e</sup> éd., Springer, New York, États-Unis.
- von Stryk, O. et Bulirsch, R. 1992, «Direct and indirect methods for trajectory optimization», *Annals of Operations Research*, vol. 37, n° 1, p. 357–373.  
doi:10.1007/BF02071065.
- Su, S. 2008, *Advanced Guidance Algorithms for the ARES V Cargo Launch*, mémoire de maîtrise, University of Missouri-Columbia.
- Suresh, S., Hai-Jun, R. et Sundararajan, N. 2009, «Bio-inspired computing for launch vehicle design and trajectory optimization», dans *IEEE Symposium on Computational Intelligence for Security and Defense Applications*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Ottawa, Canada.  
doi:10.1109/CISDA.2009.5356548.
- Teofilatto, P. et De Pasquale, E. 1998, «A fast guidance algorithm for an autonomous navigation system», *Planetary and Space Science*, vol. 46, n° 11-12, p. 1627–1632.  
doi:10.1016/S0032-0633(97)00233-X.
- Tewari, A. 2007, *Atmospheric and Space Flight Dynamics, Modeling and Simulation with MATLAB and Simulink*, 1<sup>re</sup> éd., Birkhäuser, Boston, États-Unis.
- Tournes, C. et Shtessel, Y. 2006, «Predictive launcher guidance using second order sliding mode control», dans *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, AIAA 2006-6799, Keystone, États-Unis.
- Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2011, «Comparaison of space launcher equations of translation using a full quaternion», *Canadian Aeronautics and Space Journal*, vol. 57, n° 1, p. 75–84.  
doi:10.5589/q11-013.
- Vachon, A., Desbiens, A., Gagnon, E. et Bérard, C. 2012, «Exo-atmospheric launch trajectory using direct optimization and slack variables», *Canadian Aeronautics and Space Journal*. Soumis pour révision.
- VEGA. 2006, *VEGA, User's Manual, Issue 3/Revision 0*, ArianeSpace.
- de Villers, M.-É. 1997, *Multidictionnaire de la langue française*, 3<sup>e</sup> éd., Québec Amérique, Montréal, Canada.

- Vittal, R. V. et Bhat, M. S. 1991, «An explicit closed-loop guidance for launch vehicles», *Acta Astronautica*, vol. 25, n° 3, p. 119–129.  
doi:10.1016/0094-5765(91)90139-V.
- Vittal, R. V. et Bhat, M. S. 1993, «Optimal explicit terminal guidance for a launch vehicle», *Acta Astronautica*, vol. 29, n° 4, p. 249–262.  
doi:10.1016/0094-5765(93)90138-M.
- Volver, P. 2008, «Destination orbite», <http://www.destination-orbite.net/>, consulté en-ligne le 5 janvier 2011.
- Well, K., Fischer, D., Markl, A., Wiegand, A., Gath, P., Paus, M., Weikert, S., Cremaschi, F. et Schaeff, S. 2008, «ASTOS<sup>®</sup> 6, user manual», rapport technique, ASTOS Solutions.
- Wen, J. T., Seereeram, S. et Bayard, D. S. 1997, «Nonlinear predictive control applied to spacecraft attitude control», dans *Proc. of the 1997 American Control Conference*, vol. 3, American Automatic Control Council, Albuquerque, États-Unis, p. 1899–1903.  
doi:10.1109/ACC.1997.610915.
- Wie, B. 2008, *Space Vehicle Dynamics and Control*, 2<sup>e</sup> éd., AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, États-Unis.
- Wirtham, D. J. et Park, S.-Y. 1995, «Trajectory optimization using parallel shooting method on parallel computer», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 18, n° 2, p. 377–379.  
doi:10.2514/3.21397.
- X PRIZE Foundation. 2011, «Ansari X PRIZE | X PRIZE foundation», <http://space.xprize.org/ansari-x-prize>, consulté en-ligne le 5 janvier 2012.
- Xu, Zuhua, Zhao, Jun, Qian, Jixin et Zhu, Yucai. 2009, «Nonlinear MPC using an identified LPV model», *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 48, n° 6, p. 3043–3051.  
doi:10.1021/ie801057q.
- Zhou, K., Doyle, J. C. et Glover, K. 1996, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, États-Unis.
- Zipfel, P. H. 2007, *Modelling and Simulations of Aerospace Vehicle Dynamics Second Edition*, 2<sup>e</sup> éd., AIAA Education Series, AIAA, Inc., Reston, États-Unis.

# Annexe A

## Algèbre des quaternions

La section 2.3.3 présente le développement des équations de la dynamique de translation d'un lanceur utilisant un quaternion complet. La présentation présume cependant une certaine connaissance du quaternion unitaire. Cette annexe constitue une courte introduction aux opérations mathématiques réalisables sur et avec celui-ci. Elle reprend les principales notions utiles au développement de la section 2.3.3. Le livre de Hamilton (1866) est conseillé pour une présentation plus exhaustive incluant les démonstrations de l'objet mathématique et l'article de Chou (1992) pour une introduction de la dynamique et la cinématique d'un quaternion.

### A.1 Définition d'un quaternion

Un quaternion constitue une représentation, dans un espace à quatre dimensions, d'une rotation. Il est défini par un nombre complexe :

$$\{Q\} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad (\text{A.1})$$

où les vecteurs  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  représentent une base orthonormée. On peut ainsi voir le quaternion  $\{Q\}$  comme la combinaison d'un scalaire  $q_0$  et d'un vecteur  $\mathbf{q}$  :

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, le scalaire et le vecteur sont des quaternions. De par ce commentaire, pour fin de lisibilité, la notation  $\{\}$  pour marquer le quaternion peut être éliminée de l'écriture.

Le lien entre le quaternion avec les paramètres d'Euler, la rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe  $\mathbf{n}$ , s'écrit :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ n_x \sin \theta/2 \\ n_y \sin \theta/2 \\ n_z \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

## A.2 Opérations mathématique de base sur le quaternion

### A.2.1 Addition, soustraction

L'addition et la soustraction de quaternions consistent à effectuer les opérations sur la partie scalaire et sur la partie vectorielle séparément :

$$A \pm B = a_0 \pm b_0 + \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \quad (\text{A.4})$$

Ces opérations sont ainsi commutatives et associatives.

### A.2.2 Multiplication

La multiplication de quaternions est notée par  $\otimes$  et se résout :

$$A \otimes B = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\text{A.5})$$

La multiplication de quaternions est associative et distributive sur l'addition mais, de par la présence du produit vectoriel, non commutative.

### A.2.3 Conjugué

Le conjugué d'un quaternion,  $A^*$  est similaire à celui d'un nombre complexe. Il s'obtient en inversant le signe de la partie vectorielle :

$$A^* = a_0 - \mathbf{a} \quad (\text{A.6})$$

Une propriété intéressante et utile pour le développement de la dynamique d'un lanceur est la distributivité du conjugué sur la multiplication :

$$(A \otimes B)^* = B^* \otimes A^* \quad (\text{A.7})$$

### A.2.4 Norme

La définition de la norme d'un quaternion est identique à celle d'un vecteur. Elle s'obtient en prenant la racine carrée de la somme du carré de chacune des composantes de ce quaternion :

$$|A| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (\text{A.8})$$

### A.2.5 Inverse

L'inverse d'un quaternion est similaire à celle d'une matrice. Il s'agit de calculer le conjugué et de le diviser par le carré de la norme du quaternion :

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|^2} \quad (\text{A.9})$$

## A.3 Rotations

L'utilisation principale du quaternion est de modéliser une rotation. Dans le développement de la section 2.3.3, la rotation modélisée est le passage d'un vecteur exprimé dans un système de coordonnées  $A$  vers un second système de coordonnées  $B$  :

$$\mathbf{v}_B = Q \otimes \mathbf{v}_A \otimes Q^* \quad (\text{A.10})$$

Cette opération est équivalente à la multiplication par la matrice de rotation  $\mathbf{T}_A^B$ . Il existe donc une relation directe entre les quaternions et les matrices de rotation. La matrice suivante, tirée de Zipfel (2007), présente cette relation :

$$\mathbf{T}_B^A = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

## A.4 Écriture matricielle

Les matrices  $\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{A}^-$  permettent d'écrire la multiplication de quaternions sous une forme matricielle.

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{A}^- = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Ces matrices transforment la multiplication de quaternion en multiplication d'une matrice par un vecteur colonne :

$$A \otimes B = \mathbf{A}^+ B = \mathbf{B}^- A \quad (\text{A.14})$$

où  $A$  et  $B$  sont des quaternions écrits sous la forme d'une matrice colonne.

Cette forme matricielle allège l'écriture des multiplications et, pour le développement de la section 2.3.3, fait ressortir les liens entre le résultat de la multiplication et ses composantes.

# Annexe B

## Forces fictives

Les forces fictives sont des forces qui apparaissent lorsqu'un objet est observé à partir d'un système de coordonnées en mouvement par rapport au système de coordonnées inertiel. Dans le cas d'un lanceur, le système de coordonnées d'observation est le repère terrestre, qui n'est pas inertiel puisqu'il est en rotation avec la Terre. Le système de coordonnées inertiel est plutôt le système J2000. Ainsi, les équations de la dynamique de translation, lorsqu'elles sont développées dans un système de coordonnées autre que le système J2000, doivent inclure la force centrifuge et l'accélération (force) de Coriolis.

Ainsi, elles ne doivent pas apparaître dans l'approche vectorielle (section 2.3.1) qui est développée dans le système de coordonnées inertiel. Pour l'approche angulaire (section 2.3.2), bien que les équations soient développées dans un système de coordonnées non inertiel, l'accélération utilisée dans la seconde loi de Newton est inertielle. La vitesse de rotation de la Terre, d'où proviennent les forces fictives, est incluse (équation (2.56)) dans l'accélération ce qui permet de ne pas ajouter les forces fictives dans la somme des forces. Cependant, l'approche avec quaternion complet (section 2.3.3) nécessite l'inclusion des forces fictives dans les forces appliquées au lanceur (équation (2.117)).

### B.1 Force fictives présentes dans le système de coordonnées terrestre

La présente section explique mathématiquement la présence des forces fictives lorsque le système de coordonnées de développement est en rotation à vitesse constante par rapport au système de référence. Cette explication est inspirée du chapitre 5 du

livre de Zipfel (2007).

Dans un premier temps, il convient de rappeler que la transformation de la dérivée temporelle d'un vecteur exprimé dans un système de coordonnées  $A$  vers un système de coordonnées  $B$  fait intervenir la vitesse angulaire ( $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ ) entre les deux systèmes de coordonnées :

$$D_A \mathbf{r} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_A = D_B \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r} \quad (\text{B.1})$$

Le but du développement suivant est de calculer la seconde loi de Newton dans un système de coordonnées non-inertiel. La différence est additionnée aux forces par un terme de corrections  $\mathbf{F}_{fic}$  :

$$\mathbf{F}_{fic_E} + \sum \mathbf{F}_E = m D_E \mathbf{v}_E \quad (\text{B.2})$$

Pour y parvenir, la distance ( $\mathbf{r}_G^L$ ) entre le centre de masse du lanceur exprimé dans le système de coordonnées local et le point  $G$ , un point quelconque exprimé dans le système de coordonnées inertiel J2000, est, en introduisant un point intermédiaire quelconque écrit dans le système de coordonnées terrestre, divisée en deux sous-vecteurs :

$$\mathbf{r}_G^L = \mathbf{r}_G^E + \mathbf{r}_E^L \quad (\text{B.3})$$

La seconde loi de Newton :

$$\sum \mathbf{F}_G = m D_G D_G \mathbf{r}_G^L \quad (\text{B.4})$$

s'écrit alors :

$$\sum \mathbf{F}_G = m D_G D_G \mathbf{r}_G^E + m D_G D_G \mathbf{r}_E^L \quad (\text{B.5})$$

Le premier terme de la partie de droite de l'équation représente l'accélération linéaire du système de coordonnées  $E$  et le développement du second terme, en utilisant le rappel de la dérivée (équation (B.1)), donne :

$$\begin{aligned} D_G D_G \mathbf{r}_E^L &= D_G (D_E \mathbf{r}_E^L + \boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{r}_E^L) \\ &= D_E D_E \mathbf{r}_E^L + D_E (\boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{r}_E^L) + \boldsymbol{\omega}_{GE} \times D_E \mathbf{r}_E^L + \boldsymbol{\omega}_{GE} \times (\boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{r}_E^L) \\ &= D_E D_E \mathbf{r}_E^L + (D_E \boldsymbol{\omega}_{GE}) \times \mathbf{r}_E^L + 2\boldsymbol{\omega}_{GE} \times D_E \mathbf{r}_E^L + \boldsymbol{\omega}_{GE} \times (\boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{r}_E^L) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En introduisant ce résultat et en isolant l'accélération linéaire du système de coordonnées local ( $D_E D_E \mathbf{r}_E^L$ ), dans l'équation (B.5), cette dernière devient :

$$\begin{aligned} m D_E D_E \mathbf{r}_E^L &= \sum \mathbf{F}_G - m (2\boldsymbol{\omega}_{GE} \times D_E \mathbf{r}_E^L + \boldsymbol{\omega}_{GE} \times (\boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{r}_E^L) \\ &\quad + (D_E \boldsymbol{\omega}_{GE}) \times \mathbf{r}_E^L + D_G D_G \mathbf{r}_G^E) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

La vitesse relative de déplacement du lanceur (notée  $\mathbf{v}$  dans le reste de la thèse) correspond à la dérivée temporelle de la position relative au centre de la Terre ( $\mathbf{v}_E^L = D_E \mathbf{r}_E^L$ ). La comparaison des équations (B.7) et (B.2) donne la définition du terme  $\mathbf{F}_{fict}$  :

$$\mathbf{F}_{fict} = -m \begin{cases} 2\boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{v}_E^L & \text{accélération Coriolis} \\ \boldsymbol{\omega}_{GE} \times (\boldsymbol{\omega}_{GE} \times \mathbf{r}_E^L) & \text{accélération centrifuge} \\ (D_E \boldsymbol{\omega}_{GE}) \times \mathbf{r}_E^L & \text{accélération angulaire} \\ D_G D_G \mathbf{r}_G^E & \text{accélération linéaire} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Pour un système en rotation à vitesse constante, l'accélération linéaire est nulle car les systèmes de coordonnées inertiel et terrestre se déplacent à la même vitesse. Également, l'accélération angulaire est également nulle, car la vitesse de rotation de la Terre ( $\omega_e$ ) est constante. L'équation (B.7) se simplifie à :

$$m\dot{\mathbf{v}}_E = \sum \mathbf{F}_E - m(2\boldsymbol{\omega}_{eE} \times \mathbf{v}_E + \boldsymbol{\omega}_{eE} \times (\boldsymbol{\omega}_{eE} \times \mathbf{r}_E)) \quad (\text{B.9})$$

où  $\boldsymbol{\omega}_e$  est le vecteur de vitesse de rotation de la Terre de norme  $\omega_e$  et pointant dans la direction de l'axe  $z_E$ ,  $r$  est la distance entre le centre de la Terre et le centre de masse du lanceur et  $v$  est la vitesse relative du lanceur. Dans l'équation (B.9), tous les vecteurs sont exprimés dans le système de coordonnées terrestre, mais, puisqu'aucune dérivée rotationnelle n'est présente, cette équation peut s'écrire dans n'importe quel système de coordonnées en la multipliant par la matrice de rotation, comme dans l'équation (2.117).

# Annexe C

## Résolution d'un problème aux deux bouts par la commande optimale

Cette annexe discute du principe de résolution d'un problème aux deux bouts en utilisant la théorie de la commande optimale. Plus précisément, elle décrit l'application du principe du maximum à un système déterministe continu. Cette théorie n'est pas directement utilisée dans les algorithmes développés dans cette thèse. Elle constitue cependant la principale méthode de résolution d'un problème de trajectographie. De plus, la méthode de comparaison (annexe E) et la preuve des connaissances *a priori* (annexe F) sont basées sur cette théorie.

Cette théorie découle du principe de Pontryagin (Pontryagin, 1986). Cette annexe introduit les principaux résultats provenant d'une résolution par le revenu optimal de la trajectoire de Llibre (2000). Cette annexe ne présente pas la démonstration permettant d'obtenir ces résultats, cette dernière se retrouve dans l'ouvrage précédent. Une description plus complète de la commande optimale et du principe de Pontryagin est également couverte dans les livres de Bryson et Ho (1969) et de Pontryagin (1986).

Le but d'un problème aux deux bouts est d'amener un système, dont sa dynamique est régie par l'équation (C.1), de son état initial vers un état final en minimisant le critère (C.2). Les états, initial et final sont soit libres, soit contraints (équations (C.3) et (C.4)). Le nombre de composantes de l'état qui sont contraintes influe sur la résolution des conditions aux limites du problème.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{C.1})$$

$$J = p_0(\mathbf{x}_0, t_0) + p_f(\mathbf{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} p_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{l}_0(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{0} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{l}_f(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{0} \quad (\text{C.4})$$

Le système peut également être soumis à des contraintes instantanées :

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq \mathbf{0} \quad (\text{C.5})$$

La théorie de la programmation non-linéaire (Hillier et Lieberman, 2010) définit le Lagrangien d'un problème de recherche de minimum d'un problème contraint comme étant :

$$\mathcal{L} = p_i(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu} \mathbf{l}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{C.6})$$

Le Hamiltonien du problème aux deux bouts est :

$$H = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{f} - \mathcal{L} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{f} - p_i(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu} \mathbf{l}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{C.7})$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur adjoint du système. À partir de cette définition et de l'optimalité du revenu par rapport au temps, la commande optimale est celle qui maximise le Hamiltonien :

$$\hat{\mathbf{u}} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Le vecteur adjoint introduit dans l'équation (C.7) provient de l'optimalité du revenu par rapport à l'état. Son équation d'évolution vaut ainsi :

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{C.9})$$

Le problème devient alors l'intégration de deux séries d'équations différentielles :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [H(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\tau}, t)] \quad (\text{C.11})$$

dont les conditions aux limites sont fixées par la définition de la mission.

L'ouvrage de référence utilise le lien avec l'optimalité du revenu pour définir les conditions aux limites. Les différents cas au temps initial sont résumés dans le tableau C.1 et dans le tableau C.2 pour ceux au temps final.

L'appellation problème aux deux bouts provient justement de la nécessité d'intégrer deux systèmes d'équations différentielles dont les extrémités sont contraintes. La majorité des problèmes de trajectographie consiste à amener le véhicule d'un état initial entièrement fixé vers un état final partiellement fixé par des contraintes. Dans ce cas,

données	paramètres libres	conditions
$\mathbf{x}_0$ et $t_0$ fixés	$\tau_0$ et $H_0$	$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0_d}$ et $t_0 = t_{0_d}$
$\mathbf{x}_0$ fixé	$\tau_0$ et $t_0$	$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0_d}$ et $H_0 = - \left. \frac{\partial p_0}{\partial t} \right _{t_0}$
$t_0$ fixé	$\mathbf{x}_0$ et $H_0$	$t_0 = t_{0_d}$ et $\tau_0 = \left. \frac{\partial p_0}{\partial x} \right _{t_0}$
tout libre	$\mathbf{x}_0$ et $t_0$	$\tau_0 = \left. \frac{\partial p_0}{\partial x} \right _{t_0}$ et $H_0 = \left. \frac{\partial p_0}{\partial t} \right _{t_0}$
$\mathbf{l}_0(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{0}$	$\xi_0$	$\tau_0 = \left. \frac{\partial p_0}{\partial x} \right _{t_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial x} \right _{t_0}^T \xi_0$

TABLEAU C.1 – Conditions de transversalité initiales

données	paramètres libres	conditions
$\mathbf{x}_f$ et $t_f$ fixés	$\tau_f$ et $H_f$	$\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_{f_d}$ et $t_f = t_{f_d}$
$\mathbf{x}_f$ fixé	$\tau_f$ et $t_f$	$\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_{f_d}$ et $H_f = \left. \frac{\partial p_f}{\partial t} \right _{t_f}$
$t_f$ fixé	$\mathbf{x}_f$ et $H_f$	$t_f = t_{f_d}$ et $\tau_f = - \left. \frac{\partial p_f}{\partial x} \right _{t_f}$
tout libre	$\mathbf{x}_f$ et $t_f$	$\tau_f = - \left. \frac{\partial p_f}{\partial x} \right _{t_f}$ et $H_f = \left. \frac{\partial p_f}{\partial t} \right _{t_f}$
$\mathbf{l}_f(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{0}$	$\xi_f$	$\tau_f = - \left. \frac{\partial p_f}{\partial x} \right _{t_f} + \left. \frac{\partial \mathbf{l}_f}{\partial x} \right _{t_f}^T \xi_f$

TABLEAU C.2 – Conditions de transversalité finales

le système d'état s'intègre en sens direct alors que le système adjoint s'intègre en sens indirect. L'inversion de ce dernier afin d'obtenir deux résolutions directes est impossible sauf dans des cas où la dynamique est linéaire et le critère quadratique. Les autres possibilités se résolvent par un problème d'optimisation qui consiste à trouver la valeur des paramètres libres qui vérifie toutes les équations. Ce type de problème d'optimisation est un problème qui se résout par des méthodes de Gauss-Newton. La solution de comparaison (annexe E) est d'ailleurs un exemple nécessitant ce type de résolution.

L'étude des contraintes instantanées et les paramètres de Kuhn-Tucker s'effectue également en posant *a priori* soit la valeur du paramètre soit la contrainte nulle et en vérifiant *a posteriori* que l'autre paramètre respecte sa condition. Si la contrainte est saturée ( $= 0$ ), le paramètre de Kuhn-Tucker correspondant doit être positif et si ce dernier est nul, la contrainte doit être strictement négative.

# Annexe D

## Résolution du problème de Kepler

La section 2.4 a défini une caractérisation instantanée de la position et de la vitesse de l'objet sur une orbite. Cette représentation est composée de cinq paramètres fixes et un, l'anomalie, paramètre variant. Cependant, dans cette section, cette variation n'était pas liée au temps, mais à la position de l'objet sur l'orbite. Le but de cette annexe est d'introduire la relation temporelle. Cette relation correspond à la solution du problème de Kepler, qui dans le cas d'orbite elliptique, doit être résolue de façon itérative par le biais d'une méthode de Newton. Ce type de résolution est principalement utilisé pour connaître où se retrouvera un objet orbitant autour de la Terre. Dans le cadre de l'étude de la trajectographie d'un lanceur, elle est utilisée pour prédire rapidement, sans intégration numérique, la position de l'objet à la fin de la phase de dérive. Notamment, dans la solution basée sur l'approximation de Schuler (annexe E), elle améliore la précision sur le vecteur d'état à la fin des phases non-propulsées du schéma de découplage multiple.

### D.1 Obtention de l'équation de Kepler

L'équation (2.156) correspond à la version vectorielle de la solution du problème d'attraction à deux corps. La solution scalaire (équation (D.1)) est la base des développements de cette annexe. Ceux-ci s'effectuent uniquement avec des valeurs scalaires.

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu_e}}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{D.1})$$

La définition des vecteurs du moment angulaire, du rayon et de l'anomalie vraie permettent, via l'équation (2.154), d'obtenir le moment angulaire en fonction du taux de

variation de l'anomalie vraie (Curtis, 2010) :

$$h = r^2 \frac{\partial \nu}{\partial t} \quad (\text{D.2})$$

En utilisant la solution du problème d'attraction à deux corps, cette équation devient :

$$\frac{\mu_e^2}{h^3} \partial t = \frac{\partial \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\mu_e^2}{h^3} (t - t_p) = \int_0^\nu \frac{\partial z}{(1 + e \cos z)^2} \quad (\text{D.4})$$

où  $t_p$  est le temps de passage au périégée correspondant à une anomalie vraie nulle. L'origine du temps étant arbitraire, pour le mouvement orbital, il est d'usage de le mesurer à partir du passage au périégée ( $t_p = 0$ ).

L'intégrale du terme de droite de l'équation (D.4) vaut (Curtis, 2010) :

$$\int_0^\nu \frac{\partial z}{(1 + e \cos z)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1 - e}{1 + 2}} \tan \frac{\nu}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \right] \quad (\text{D.5})$$

En définissant l'anomalie moyenne ( $M$ ) comme étant :

$$M = \frac{\mu_e^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} t \quad (\text{D.6})$$

l'équation (D.4) devient :

$$M = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1 - e}{1 + 2}} \tan \frac{\nu}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{D.7})$$

Le choix de la valeur de l'anomalie moyenne peut sembler quelconque. Cependant, la période de l'orbite elliptique ( $T_o$ ) vaut (Sellers, 2005) :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}} = \frac{2\pi}{\frac{\mu_e^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{D.8})$$

L'anomalie moyenne devient ainsi :

$$M = \frac{2\pi}{T_o} t \quad (\text{D.9})$$

La vitesse angulaire sur une orbite elliptique n'est pas constante, mais un angle de  $2\pi$  correspond à une tour complet qui s'effectue en une période orbitale. Le rapport  $\frac{2\pi}{T_o}$  est

ainsi la vitesse moyenne ( $n$ ) sur l'orbite. Ce qui permet de lier directement le temps à l'anomalie moyenne :

$$M = nt \quad (\text{D.10})$$

L'introduction d'une troisième anomalie, l'anomalie excentrique ( $E$ ) permet de simplifier l'équation (D.7). Cette anomalie correspond à l'angle entre l'origine et la projection de la position courante sur le cercle circonscrivant l'ellipse orbitale (voir figure D.1).

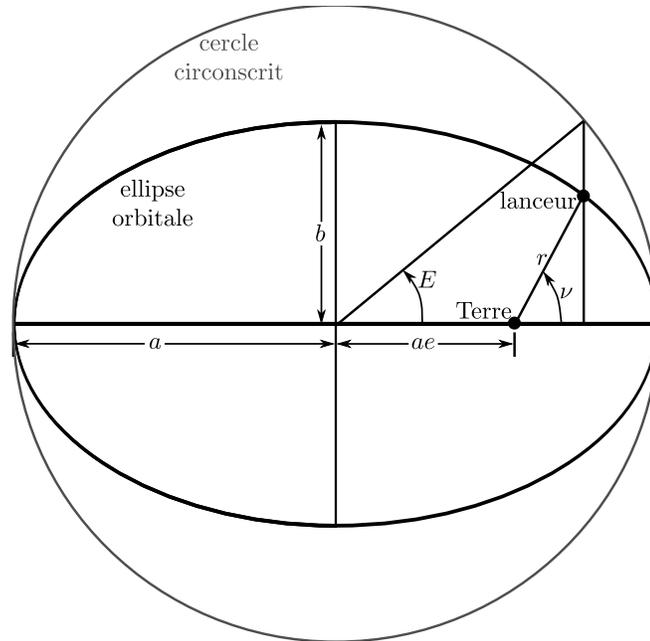


FIGURE D.1 – Ellipse orbitale et son cercle circonscrit

De cette figure, il est possible d'obtenir une relation trigonométrique liant les deux anomalies aux dimensions de l'ellipse :

$$a \cos E = ae + r \cos \nu \quad (\text{D.11})$$

L'équation liant les dimensions de l'ellipse au rayon

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{D.12})$$

permet d'obtenir la valeur du sinus de l'anomalie excentrique :

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{D.13})$$

et de son cosinus :

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{D.14})$$

De plus, pour résoudre le problème d'ambiguïté du quadrant, l'identité trigonométrique ( $\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E}$ ) donne :

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \quad (\text{D.15})$$

La substitution des équations (D.13) et (D.15) dans l'équation (D.7) permet d'obtenir l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E \quad (\text{D.16})$$

## D.2 Prédiction de la position future

La position future du lanceur sur l'orbite en fonction du temps s'obtient à partir de ces équations. Pour ce faire, il faut débiter en calculant le temps écoulé entre le dernier passage au périégée et la position initiale. La position initiale sur l'orbite étant connue, les paramètres orbitaux le sont également. Avec ceux-ci, l'anomalie excentrique initiale s'obtient en appliquant l'équation (D.15) :

$$E_0 = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu_0}{2} \right) \quad (\text{D.17})$$

Par la suite, l'équation de Kepler (équation (D.16)) donne l'anomalie moyenne initiale :

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0 \quad (\text{D.18})$$

Ensuite, en utilisant la vitesse moyenne (équation (D.10)), l'anomalie moyenne finale est :

$$M_f = n(t_f - t_0) + M_0 \quad (\text{D.19})$$

Pour obtenir l'anomalie vraie finale, il suffit d'effectuer le chemin inverse. Il faut donc commencer par appliquer l'équation de Kepler :

$$E_f = M_f + e \sin E_f \quad (\text{D.20})$$

Cette équation est une équation transcendante qu'il faut résoudre itérativement. L'utilisation de  $M_f$  fournit une bonne estimation initiale de  $E_f$ . Ce qui permet d'amorcer le schéma itératif consistant à calculer, par l'équation (D.20), la valeur de l'itération suivante. Il y a convergence lorsque la différence entre deux itérations successives est faible. Par la suite, l'utilisation de l'équation (D.15) permet d'obtenir l'anomalie vraie finale :

$$\nu_f = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E_f}{2} \right) \quad (\text{D.21})$$

Les cinq autres paramètres orbitaux n'étant pas modifiés, tous les paramètres orbitaux définissant la position finale sont connus. Il est alors possible de passer vers la représentation utilisée (angulaire, vectorielle ou quaternion). Il convient de mentionner que, puisque cette annexe utilise les paramètres orbitaux, la prédiction considère l'accélération gravitationnelle terrestre comme étant proportionnelle à l'inverse du carré du rayon.

# Annexe E

## Solution pour l'hypothèse de la gravité linéaire

Ce chapitre développe la solution utilisée comme méthode de comparaison dans l'étude des algorithmes de guidage. Cette solution est une méthode par adaptation itérative basée sur la conversion du problème aux deux bouts en un système d'équations carré résoluble par une méthode de Newton-Raphson. Le système s'obtient par des simplifications du problème.

Dans cette solution, la modélisation vectorielle des équations de translation du lanceur (équations (2.45)) est utilisée.

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{v}_G \quad (\text{E.1a})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_G = \mathbf{g}_G(\mathbf{r}_G) + \frac{T}{m} \mathbf{v}_{PG} \quad (\text{E.1b})$$

$$\dot{m} = -\Delta_m \quad (\text{E.1c})$$

L'hypothèse principale sur laquelle repose le développement est l'utilisation d'une accélération gravitationnelle proportionnelle au rayon :

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{r}_G) = -\frac{\mu_e}{r_{ref}^2} \frac{\mathbf{r}_G}{r_{ref}} = -\omega^2 \mathbf{r}_G \quad (\text{E.2})$$

où  $\omega$  est la fréquence de Schuler à  $r_{ref}$  et vaut  $\sqrt{\frac{\mu_e}{r_{ref}^3}}$ . Selon Lu *et al.* (2008), cette approximation préserve la caractéristique la plus importante de l'accélération gravitationnelle, à savoir sa direction. Elle permet également d'obtenir une solution analytique du système adjoint (équation (E.15)).

Afin de limiter les problèmes numériques provenant de l'utilisation de valeurs très différentes dans l'état, les dimensions doivent être normalisées : les distances par un

facteur  $r_m$ , les vitesses par  $\sqrt{r_m g_0}$  et les temps par  $\sqrt{\frac{r_m}{g_0}}$ . Les équations de mouvement deviennent ainsi :

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{v}}_G \quad (\text{E.3a})$$

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = -\bar{\omega}^2 \bar{\mathbf{r}}_G + \frac{T}{\bar{m} g_0} \mathbf{v}_{PG} \quad (\text{E.3b})$$

$$\dot{\bar{m}} = -\frac{T}{\bar{c}} \quad (\text{E.4})$$

Il faut noter que, dans le développement, la notation point ( $\dot{\phantom{x}}$ ) est un abus de notation puisque la dérivée s'effectue par rapport au temps normalisé. La fréquence de Schuler normalisée,  $\bar{\omega}$ , vaut  $\sqrt{\frac{r_0}{r_{ref}^3}}$ . Dans la suite du développement, la masse est retirée de l'état puisqu'elle n'est pas directement utilisée et, lorsque nécessaire, une relation de proportionnalité la lie au temps. L'état du système devient donc  $[\bar{\mathbf{r}}_G \ \bar{\mathbf{v}}_G]^T$ .

Le but du lanceur est d'atteindre son orbite finale en consommant le moins de carburant possible. En posant l'hypothèse que la consommation instantanée du moteur est constante, le problème de minimisation de la consommation devient un problème à temps minimum où le critère à minimiser est :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (\text{E.5})$$

Le Hamiltonien de ce problème (Bryson et Ho, 1969) est donc :

$$H = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{f} - 1 \quad (\text{E.6})$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur adjoint et  $\mathbf{f}$  sont les relations  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{PL}, t)$  des équations (E.3). En séparant le vecteur adjoint ( $\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\boldsymbol{\tau}_v$ ), ce Hamiltonien s'écrit :

$$H = \boldsymbol{\tau}_r^T \bar{\mathbf{v}}_G + \boldsymbol{\tau}_v^T \left( -\bar{\omega}^2 \bar{\mathbf{r}}_G + \frac{T}{\bar{m} g_0} \mathbf{v}_{PG} \right) - 1 \quad (\text{E.7})$$

La première étape de la commande optimale consiste à définir les équations d'évolution du vecteur adjoint. Par définition, elles correspondent à la dérivée du Hamiltonien par rapport à l'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\tau}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \\ \frac{\partial H}{\partial \bar{\mathbf{v}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\omega}^2 \boldsymbol{\tau}_v \\ -\boldsymbol{\tau}_r \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

L'introduction de la seconde ligne dans la dérivée temporelle de la première ligne donne l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$\ddot{\boldsymbol{\tau}}_r + \bar{\omega}^2 \boldsymbol{\tau}_r = 0 \quad (\text{E.9})$$

Cette équation différentielle linéaire homogène a pour solution :

$$\boldsymbol{\tau}_r = \mathbf{k}_1 \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) + \mathbf{k}_2 \sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \quad (\text{E.10})$$

Les constantes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  s'obtiennent en résolvant l'équation au temps initial  $\bar{t}_0$  :

$$\boldsymbol{\tau}_{r0} = \mathbf{k}_1 \cos(\bar{\omega}(\bar{t}_0 - \bar{t}_0)) + \mathbf{k}_2 \sin(\bar{\omega}(\bar{t}_0 - \bar{t}_0)) \quad (\text{E.11})$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{r0} = -\bar{\omega}\mathbf{k}_1 \sin(\bar{\omega}(\bar{t}_0 - \bar{t}_0)) + \bar{\omega}\mathbf{k}_2 \cos(\bar{\omega}(\bar{t}_0 - \bar{t}_0)) \quad (\text{E.12})$$

En supposant les conditions initiales ( $\bar{t}_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{r0}$  et  $\dot{\boldsymbol{\tau}}_{r0} = \bar{\omega}^2 \boldsymbol{\tau}_{v0}$ ) connues, ce système carré à deux inconnues ( $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ ) a une solution unique. En injectant cette solution dans l'équation (E.10), l'expression de la solution complète de l'équation différentielle devient :

$$\boldsymbol{\tau}_r = \boldsymbol{\tau}_{r0} \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) + \bar{\omega} \boldsymbol{\tau}_{v0} \sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \quad (\text{E.13})$$

Avec la connaissance des conditions initiales, cette équation permet l'obtention de la partie du vecteur adjoint liée au rayon ( $\boldsymbol{\tau}_r$ ) à tout instant.

De par sa définition (équation (E.8)), la partie du vecteur adjoint lié à la vitesse ( $\boldsymbol{\tau}_v$ ) s'obtient en divisant la dérivée temporelle de l'équation (E.13) par  $\bar{\omega}^2$  :

$$\boldsymbol{\tau}_v = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}_r}{\bar{\omega}^2} = -\frac{\boldsymbol{\tau}_{r0}}{\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) + \boldsymbol{\tau}_{v0} \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \quad (\text{E.14})$$

En combinant ces deux derniers résultats, l'expression analytique du système d'état adjoint est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\tau}_r}{\bar{\omega}} \\ \boldsymbol{\tau}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 & \sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 \\ -\sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 & \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\tau}_{r0}}{\bar{\omega}} \\ \boldsymbol{\tau}_{v0} \end{bmatrix} \quad (\text{E.15})$$

où  $\mathbf{I}_3$  est la matrice identité  $3 \times 3$ .

La théorie de la commande optimale stipule que la commande  $\boldsymbol{\nu}_{PG}$  est optimale lorsque :

$$\mathbf{0} = \frac{\partial H}{\partial \widehat{\boldsymbol{\nu}}_{PG}} \quad (\text{E.16})$$

Avant de calculer cette dérivée, il faut inclure, dans le Hamiltonien, une contrainte supplémentaire assurant que le vecteur d'orientation soit unitaire :

$$H = \boldsymbol{\tau}_r^T \bar{\mathbf{v}}_G - \bar{\omega} \boldsymbol{\tau}_v^T \bar{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\tau}_v^T \boldsymbol{\nu}_{PG} \frac{T}{\bar{m}g_0} - 1 + \nu \left( \boldsymbol{\nu}_{PG_x}^2 + \boldsymbol{\nu}_{PG_y}^2 + \boldsymbol{\nu}_{PG_z}^2 - 1 \right) \quad (\text{E.17})$$

L'équation (E.16) vaut donc :

$$\mathbf{0} = \frac{T}{\bar{m}g_0} \boldsymbol{\tau}_v + 2\nu \widehat{\boldsymbol{\nu}}_{PG} \quad (\text{E.18})$$

où  $\widehat{\mathbf{v}}_{PG}$  est le vecteur  $\mathbf{v}_{PG}$  sur la trajectoire optimale. À l'aide de la condition de Weierstrass et de l'équation (E.18), il est possible de démontrer (Lawden, 1963) que :

$$\boldsymbol{\tau}_v \cdot \widehat{\mathbf{v}}_{PG} \geq \boldsymbol{\tau}_v \cdot \widehat{\mathbf{v}}_{PG} \quad (\text{E.19})$$

Cette condition est satisfaite si, et seulement si, le produit scalaire entre  $\boldsymbol{\tau}_v$  et  $\widehat{\mathbf{v}}_{PG}$  est maximal. Ce qui s'obtient lorsque les deux vecteurs sont parallèles. En ramenant la contrainte stipulant que le vecteur d'orientation de la poussée est unitaire, ce dernier vaut :

$$\widehat{\mathbf{v}}_{PG} = \frac{\boldsymbol{\tau}_v}{|\boldsymbol{\tau}_v|} \quad (\text{E.20})$$

Comme pour le système adjoint, il est possible d'obtenir une équation différentielle linéaire du second ordre pour exprimer l'évolution du vecteur rayon. Cette équation s'obtient en dérivant l'équation (E.3a) par rapport au temps et en introduisant la seconde partie des équations d'évolution de l'état (équation (E.3b)) dans le résultat :

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_G + \omega^2 \bar{\boldsymbol{r}}_G = \mathbf{v}_{PG} \frac{T}{\bar{m}g_0} \quad (\text{E.21})$$

En incluant la direction de la poussée optimale (équation (E.20)), et la solution analytique du système adjoint (équation (E.15)), cette équation devient :

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_G + \omega^2 \bar{\boldsymbol{r}}_G = \frac{T}{\bar{m}g_0} \frac{\boldsymbol{\tau}_v}{|\boldsymbol{\tau}_v|} \quad (\text{E.22})$$

Cette équation différentielle a la même forme que l'équation (E.9), mais avec un second membre. La solution homogène associée est donc de la même forme. Un terme supplémentaire, la solution particulière, y est ajouté. Le calcul de cette solution particulière s'effectue par la méthode de variation des constantes, par exemple. La solution finale obtenue est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{r}}_G \\ \frac{\bar{\boldsymbol{v}}_G}{\bar{\omega}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 & \sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 \\ -\sin(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 & \cos(\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{t}_0)) \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{r}}_{G0} \\ \frac{\bar{\boldsymbol{v}}_{G0}}{\bar{\omega}} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{\bar{\omega}} \begin{bmatrix} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \mathbf{I}_3 & -\cos(\bar{\omega}\bar{t}) \mathbf{I}_3 \\ \cos(\bar{\omega}\bar{t}) \mathbf{I}_3 & \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_c(\bar{t} - \bar{t}_0) \\ \mathbf{I}_s(\bar{t} - \bar{t}_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

où  $\mathbf{I}_c(\bar{t} - \bar{t}_0)$  et  $\mathbf{I}_s(\bar{t} - \bar{t}_0)$  sont les termes supplémentaires correspondant aux intégrales du second membre de l'équation différentielle. Ils sont liés au terme de poussée et valent respectivement  $\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \mathbf{1}_T(\zeta) \cos(\bar{\omega}\zeta) a_T(\zeta) d\zeta$  et  $\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \mathbf{1}_T(\zeta) \sin(\bar{\omega}\zeta) a_T(\zeta) d\zeta$ . Lu *et al.* (2008) suggèrent l'évaluation de ces intégrales par la formule de Milne. Cette formule est un cas spécifique des formules de Newton-Cotes pour l'évaluation numérique d'une intégrale.

Ces formules aont la sommation de la valeur pondérée du terme intégré évalué en certains points à l'intérieur de l'intervalle d'intégration :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^N w_k f(x_k) \quad (\text{E.24})$$

Les pondérations proviennent des polynômes de Lagrange. Le développement et l'évaluation des pondérations peut notamment se retrouver dans Stoer et Bulirsch (2002) aux pages 118-123. Le cas où  $N = 2$  (développement de Simpson) est le plus connu de ces formules. Celui-ci utilise une évaluation en trois points, la formule de Milne en utilise cinq points. Ces évaluations supplémentaires permettent de diminuer le terme d'erreur à l'ordre 7 en comparaison à l'ordre 5 pour le développement de Simpson. Ce qui explique que, dans le cas de l'intégrale de poussée, la durée de validité de l'estimation soit allongée (Lu *et al.*, 2008). La valeur des pondérations de Milne donne l'estimation suivante de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{90} & \left( 7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + \frac{2b-a}{2}\right) \right. \\ & \left. + 32f\left(a + \frac{3b-3a}{4}\right) + 7f(b) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Cette relation permet une estimation précise pour des phases propulsées de quelques centaines de secondes (Lu *et al.*, 2008).

À ce point, à partir d'un point initial connu, les expressions analytiques du système d'état, du système adjoint et de la commande sont toutes trois disponibles. Pour compléter la définition du problème, il faut poser les limites des intégrations. Ces conditions diffèrent selon que l'état soit partiellement fixé, entièrement fixé ou entièrement libre (annexe C). Le point commun de tous les cas est que la moitié des variables (le temps ; le Hamiltonien ; et les composantes de l'état et de l'adjoint) doit être fixée et l'autre moitié libre.

Pour un lanceur, l'état initial et le temps sont fixés, les variables de l'adjoint initial et le Hamiltonien initial sont donc libres. Au temps final, les conditions dépendent de l'objectif de la mission. Dans cette étude, trois paramètres orbitaux sont considérés, le demi-grand axe ( $a$ ), l'excentricité ( $e$ ) et l'inclinaison orbitale ( $i$ ). Ces paramètres orbitaux définissent les contraintes au temps final :

$$\phi(\tilde{\mathbf{r}}_f, \tilde{\mathbf{v}}_f) - \mathbf{o}_d = \begin{bmatrix} a(\tilde{\mathbf{r}}_f, \tilde{\mathbf{v}}_f) \\ e(\tilde{\mathbf{r}}_f, \tilde{\mathbf{v}}_f) \\ \cos(i(\tilde{\mathbf{r}}_f, \tilde{\mathbf{v}}_f)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_d \\ e_d \\ \cos(i_d) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.26})$$

La théorie de la commande optimale stipule que la relation suivante fixe entièrement le

vecteur adjoint final :

$$\boldsymbol{\tau}_f = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_f} \boldsymbol{\xi} \quad (\text{E.27})$$

$\boldsymbol{\xi}$  sont des constantes dont leur valeur est libre. Pour obtenir cette expression, il faut donc exprimer les paramètres orbitaux en fonction de l'état du système et, par la suite, calculer la dérivée des relations obtenues par rapport à l'état. L'état utilisé dans la solution analytique du système (équation (E.23)) n'est pas directement la position et la vitesse, mais leurs équivalents normalisés. Cependant, les développements suivants sont effectués sur les valeurs réelles. L'utilisation des valeurs réelles allège l'écriture et assure une lisibilité aux équations et ne modifie pas la validité des équations. Il faut simplement les implémenter avec le facteur de normalisation. Les équations définissant le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison orbitale de la section 2.4.1 seront légèrement modifiés pour être utilisés avec les vecteurs du rayon et de la vitesse. Ainsi, l'excentricité (équation (2.164)) est réécrite comme :

$$e = \frac{1}{\mu_e} \sqrt{\left(v^2 - \frac{\mu_e}{r}\right)^2 r^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 v^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 \left(v^2 - \frac{\mu_e}{r}\right)} \quad (\text{E.28})$$

Le demi-grand axe demeure l'équation (2.162). Cependant, puisque le développement de cette solution s'effectue dans le système de coordonnées inertiel, la vitesse de la rotation de la Terre n'a pas à être explicitée comme dans la section 2.4.1 :

$$a = \frac{r\mu_e}{2\mu_e - rv^2} \quad (\text{E.29})$$

Pour sa part, l'inclinaison orbitale (équation (2.170)) devient :

$$\cos i = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \quad (\text{E.30})$$

Ces trois équations sont dérivables analytiquement par rapport à  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ . Ces dérivées définissent les six valeurs finales du vecteur adjoint :

$$\boldsymbol{\tau}_f = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \cos i}{\partial \mathbf{x}} \end{array} \right] \Big|_{t_f} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.31})$$

L'élimination de la masse du vecteur d'état se justifie par une analyse de l'équation (E.31). Les trois paramètres orbitaux fixés dans cette étude sont indépendants de la masse finale. Leur dérivée par rapport à cette dernière est donc nulle et, par extension,

la composante du vecteur adjoint qui lui est associée aussi. Combiné avec l'équation d'évolution ( $\dot{\tau}_m = 0$ ), l'adjoint lié à la masse est donc nul sur toute la trajectoire (Dukeman, 2005).

Le dernier point à traiter pour les conditions de transversalité finales concerne le temps. Ce dernier étant libre, le Hamiltonien optimal au temps final est nul. En utilisant les résultats précédents (équations (E.15) et (E.20)), le Hamiltonien (équation (E.7)) calculé au temps final est :

$$H_f = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{r}_f}^T \bar{\mathbf{v}}_{Gf} - \bar{\omega}^2 \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{v}_f}^T \bar{\mathbf{r}}_{Gf} + \frac{T}{\bar{m}_f g_0} |\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{v}_f}| - 1 \quad (\text{E.32})$$

Il convient de mentionner que la masse apparait dans cette équation même si elle ne constitue pas un état du problème. Cependant, il est possible de l'obtenir uniquement à partir de la connaissance de la masse initiale et des paramètres de consommation du moteur. ( $m_f = m_0 - (t_f - t_0) \frac{T}{\bar{c}}$ ). De plus, la composante du vecteur adjoint qui lui serait liée est nulle en tout point de la trajectoire (voir équation (E.31)). Pour un problème à étage unique, il ne poserait pas de problème de l'ajouter dans l'état. Cependant, dans le cas d'un problème multi-étages avec discontinuité dans la masse, son ajout entraînerait une perte de propriétés intéressantes permettant de simplifier la résolution du problème (Dukeman, 2005).

Avec cette équation, toutes les équations nécessaires à la résolution du problème sont définies. Il reste à convertir ces équations en un système d'équations carré permettant leur résolution. Deux problèmes sont considérés, chacun correspondant à une phase différente de la trajectoire de lancement. Le premier est le cas où il n'y a qu'un étage propulsif. Ce problème correspond au brûlage du troisième étage. Sa résolution consiste à résoudre un système d'équations carré à dix inconnues. Les trois contraintes sur l'orbite désirée (équation (E.26)), les six conditions de transversalité finales (équation (E.31)) et le Hamiltonien final (équation (E.32)) composent les équations du système. Quant à elles, les variables définies libres sont les inconnues. Ces variables sont les six composantes de l'adjoint initial ( $\boldsymbol{\tau}_0$ ), le temps final ( $t_f$ ) et les trois constantes de transversalité ( $\boldsymbol{\xi}$ ).

Le second problème, correspondant au brûlage du deuxième étage suivi de la phase de dérive et du brûlage du dernier étage, est plus complexe à résoudre puisqu'il présente une discontinuité dans la masse et des changements dans la force de poussée. Dans ce cas, il convient d'appliquer une technique de découplage multiple (figure E.1). Cette technique consiste à diviser le temps en sous-intervalles et à les lier entre eux par l'ajout de contraintes de continuité sur l'état et l'adjoint (Bryson et Ho, 1969). Dans le cas d'un lancement multi-étages, le choix des instants de séparation s'impose de lui-même. En

prenant une phase par intervalle, chaque point de liaison a une signification physique dans le problème, facilitant ainsi l'implémentation.

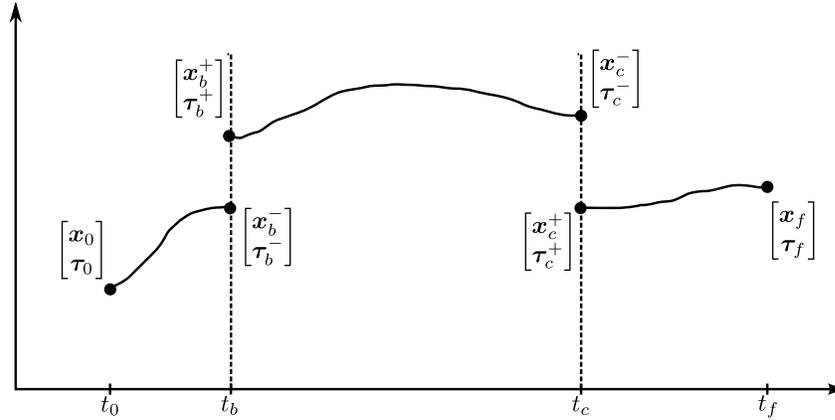


FIGURE E.1 – Découplage multiple

Ainsi, le passage du problème à étage unique vers le problème deux étages se résume par l'ajout de vingt-cinq équations : douze pour les conditions de continuité à  $t_b$ , douze pour les conditions de continuité à  $t_c$  et une pour déterminer la fin de la phase de dérive. L'extension est complétée par l'ajout de vingt-cinq variables libres cohérentes avec les équations ajoutées. Puisque l'état et l'adjoint initiaux sont connus ou inclus dans les variables libres, l'état et l'adjoint à la fin de la première phase de brûlage ( $\mathbf{x}_b^-$  et  $\boldsymbol{\tau}_b^-$ ) sont, de par les équations (E.15) et (E.23), fixés. De même, en incluant l'état et l'adjoint au début de la phase de dérive ( $\mathbf{x}_b^+$  et  $\boldsymbol{\tau}_b^+$ ) dans les variables libres, l'état et l'adjoint à la fin de la phase de dérive ( $\mathbf{x}_c^-$  et  $\boldsymbol{\tau}_c^-$ ) deviennent fixés. Pour la seconde phase de brûlage, l'inclusion de l'état et l'adjoint au début de la phase ( $\mathbf{x}_c^+$  et  $\boldsymbol{\tau}_c^+$ ) dans les variables libres du problème permet le calcul des valeurs au temps final et, par extension, des conditions de transversalité finales. Dans le cas étudié dans ce document, le temps  $t_b$  est fixé et correspond à la durée maximale de brûlage de l'étage. À l'opposé, la fin de la phase de dérive,  $t_c$ , est laissée libre et constitue la vingt-cinquième inconnue à ajouter au problème pour compléter le passage. En notant l'équation (E.23) par  $\mathbf{s}$  et l'équation (E.15) par  $\mathbf{c}$ , les dépendances du problème peuvent être schématisées par la figure E.2.

Une séparation du Hamiltonien (équation (E.7)) en deux parties permet de calculer la fin de la phase de dérive. La partie regroupée sous  $H_0$  est indépendante de la force de poussée alors que la partie regroupée dans le terme  $H_T$  est multipliée par la force de poussée :

$$H = \boldsymbol{\tau}_r^T \bar{\mathbf{v}}_G - \bar{\omega}^2 \boldsymbol{\tau}_v^T \bar{\mathbf{r}}_G - 1 + \frac{T}{\bar{m}g_0} |\boldsymbol{\tau}_v| \quad (\text{E.33})$$

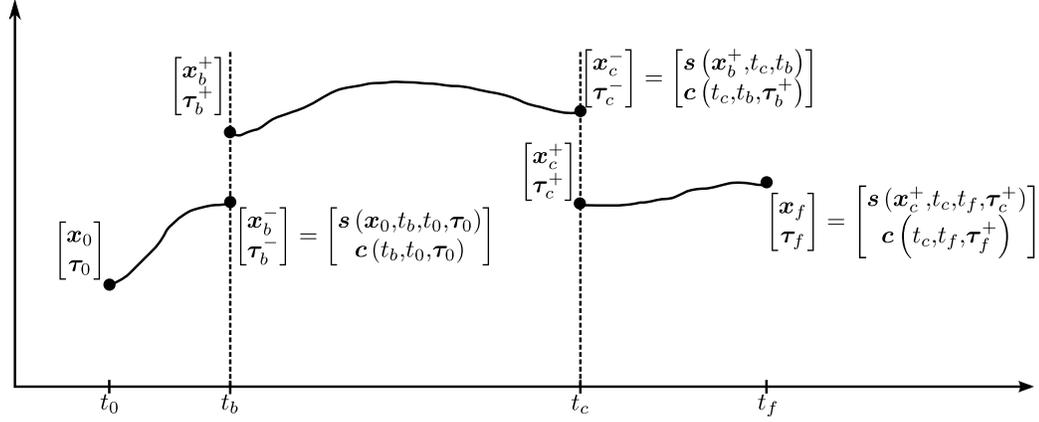


FIGURE E.2 – Schématisation des dépendances

$$= H_0 \quad + TH_T \quad (\text{E.34})$$

Cette séparation sert à définir les conditions de passage de la phase de dérive à la phase propulsée. Selon Robbins (1965), pour la partie exo-atmosphérique d'une trajectoire de lancement, l'utilisation d'une poussée prenant des valeurs intermédiaires n'est pas optimale. Ainsi, la poussée doit être considérée de type tout ou rien :

$$T = \begin{cases} T_{max} & \text{si } H_T > 0 \\ 0 & \text{si } H_T < 0 \end{cases} \quad (\text{E.35})$$

où  $T_{max}$  est la poussée maximale de l'étage. Le cas intermédiaire ( $H_T = 0$  pour une durée finie) n'est pas considéré puisqu'il correspond à une poussée prenant une valeur intermédiaire. Ainsi, le seul instant où  $H_T$  est nul est à l'instant du passage de la phase de dérive à la phase propulsée. Pour un problème stationnaire à horizon libre, le Hamiltonien est nul à tout instant de la trajectoire optimale (Bryson et Ho, 1969). Au changement de phase, en plus de  $H_T$ ,  $H_{0c}$  doit donc également être nul :

$$H_{0c} = \mathbf{0} = \tau_{r_c}^T \bar{\mathbf{v}}_{Gc} - \bar{\omega}^2 \tau_{v_c}^T \bar{\mathbf{r}}_{Gc} - 1 \quad (\text{E.36})$$

Lorsque le temps de fin du premier brûlage est fixe, cette équation correspond à la condition de passage vers la phase propulsée. Dans le cas contraire, cette condition est beaucoup plus complexe (Dukeman, 2005). Cependant, cette condition complexe n'est pas utile puisque ne pas brûler toute la quantité de carburant disponible dans les premiers étages n'est, pour un lanceur de satellite, pas souhaitable. L'arrêt des moteurs avant le temps maximal entraîne une perte importante d'énergie (Dukeman, 2005).

Ainsi, le problème se formule comme un système d'équations carré à trente-cinq inconnues. Il se compose des dix équations du problème à étage unique, des douze conditions de continuité au début de la phase de dérive ( $\mathbf{x}_b^- = \mathbf{x}_b^+$  et  $\tau_b^- = \tau_b^+$ ), des

douze conditions à la fin de la dérive ( $\mathbf{x}_c^- = \mathbf{x}_c^+$  et  $\boldsymbol{\tau}_c^- = \boldsymbol{\tau}_c^+$ ) et de l'équation du Hamiltonien au changement de phase (équation (E.36)). Pour leur part, les trente-cinq inconnues sont les variables libres du problème, à savoir  $\boldsymbol{\tau}_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^+$ ,  $\mathbf{x}_b^+$ ,  $\boldsymbol{\tau}_c^+$ ,  $\mathbf{x}_c^+$ ,  $t_c$ ,  $t_f$  et  $\boldsymbol{\xi}$ .

Comme le mentionne Bryson et Ho (1969), l'adjoint de la masse et la masse n'ont pas à être propagés puisqu'ils n'apparaissent pas dans les équations. Lorsque la masse apparaît, dans le calcul de l'accélération provenant de la poussée, il est possible de l'obtenir à partir des connaissances *a priori*. Ainsi, les problèmes pouvant survenir lors des discontinuités de la masse sont éliminées et la propriété du Hamiltonien nul sur la trajectoire optimale demeure valide puisque le problème est stationnaire, à horizon libre et sans discontinuités.

# Annexe F

## Preuve de l'optimalité de la solution à tangente de l'angle de tangage linéaire

Cette annexe constitue la preuve que l'angle de tangage est, sous certaines hypothèses, optimal lorsque sa tangente est linéaire. Cette preuve est l'application de la théorie de la commande optimale aux équations de translation modélisées par l'approche vectorielle (section 2.3.1).

L'obtention d'une solution analytique du problème aux deux bouts est possible uniquement en posant des hypothèses simplificatrices dans la modélisation. Dans cette annexe, deux de ces hypothèses sont utilisées. La première est de considérer l'accélération gravitationnelle uniforme pour toute la durée du lancement. La seconde est d'utiliser une Terre plate. Cette dernière permet d'assimiler le système de coordonnées inertiel au système de coordonnées local et d'écrire les équations de translation directement dans ce dernier :

$$\dot{m} = \Delta_m \tag{F.1}$$

$$\dot{v}_L = \mathbf{g}_L + \frac{T}{m} \mathbf{i}_{PL} \tag{F.2}$$

$$\dot{r}_L = \mathbf{v}_L \tag{F.3}$$

où  $\mathbf{i}_{PL}$  est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe  $x_P$ , à savoir dans la direction d'action de la force de poussée. Puisque la Terre est considérée plate avec une accélération gravitationnelle uniforme, le vecteur  $\mathbf{g}_L$  est constant, en orientation et en dimension et vaut :

$$\mathbf{g}_L = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{F.4}$$

Le but est d'atteindre une orbite définie par des contraintes sur l'état final en maximisant la masse finale. Une hypothèse concernant la propulsion est également utilisée. Celle-ci suggère que la consommation instantanée des moteurs est constante. La masse devient ainsi directement proportionnelle au temps. Cette hypothèse permet de convertir le problème en un problème à temps minimal :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (\text{F.5})$$

De plus, elle permet d'éliminer la masse de l'état du système. En émettant l'hypothèse que la poussée est parallèle au lanceur et que le roulis de celui est nul, les équations d'évolution du système deviennent :

$$\dot{r}_{Lx} = v_{Lx} \quad (\text{F.6a})$$

$$\dot{r}_{Ly} = v_{Ly} \quad (\text{F.6b})$$

$$\dot{r}_{Lz} = v_{Lz} \quad (\text{F.6c})$$

$$\dot{v}_{Lx} = g + \frac{T}{m} \sin \Theta \quad (\text{F.6d})$$

$$\dot{v}_{Ly} = \frac{T}{m} \cos \Theta \sin \Psi \quad (\text{F.6e})$$

$$\dot{v}_{Lz} = \frac{T}{m} \cos \Theta \cos \Psi \quad (\text{F.6f})$$

Le Hamiltonien, tel que défini par la théorie de la commande optimale, est alors :

$$H = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{f} - 1 \quad (\text{F.7})$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur adjoint et  $\mathbf{f}$  sont les relations  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{PL}, t)$  des équations (F.6).

Les équations différentielles gouvernant le système adjoint correspondent au Jacobien du du Hamiltonien par rapport à l'état du système :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\tau}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\boldsymbol{\tau}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\boldsymbol{\tau}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Avec le problème tel qu'il est posé, la définition d'une orbite se limite à définir le vecteur vitesse et une position verticale. Ainsi, les conditions de transversalité finales stipulent

que le vecteur adjoint au temps final est constant et libre pour ces quatre composantes, mais nul pour les deux composantes non fixées. Les équations d'évolution temporelle du système adjoint en fonction de ces constantes au temps final sont ainsi :

$$\tau_{rx}(t) = \tau_{rx_f} \quad (\text{F.9a})$$

$$\tau_{ry}(t) = 0 \quad (\text{F.9b})$$

$$\tau_{rz}(t) = 0 \quad (\text{F.9c})$$

$$\tau_{vx}(t) = \tau_{rx_f}(t - t_f) + \tau_{vx_f} \quad (\text{F.9d})$$

$$\tau_{vy}(t) = \tau_{vy_f} \quad (\text{F.9e})$$

$$\tau_{vz}(t) = \tau_{vz_f} \quad (\text{F.9f})$$

De plus, l'orientation optimale est celle qui maximise le Hamiltonien. Celle qui annule sa dérivée première :

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \hat{\theta}} & \frac{\partial H}{\partial \hat{\psi}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{T}{m} \cos \hat{\theta} & 0 \\ -\frac{T}{m} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\psi} & \frac{T}{m} \cos \hat{\theta} \cos \hat{\psi} \\ -\frac{T}{m} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\psi} & -\frac{T}{m} \cos \hat{\theta} \sin \hat{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{F.10})$$

De cette équation, il est possible d'écrire un système d'équations carré à deux inconnues :

$$\frac{T}{m} \left( \tau_{vx} \cos \hat{\theta} - \tau_{vy} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\psi} - \tau_{vz} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\psi} \right) = 0 \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{T}{m} \left( \tau_{vy} \cos \hat{\theta} \cos \hat{\psi} - \tau_{vz} \cos \hat{\theta} \sin \hat{\psi} \right) = 0 \quad (\text{F.12})$$

dont la solution est :

$$\tan \hat{\psi} = \frac{\tau_{vy}}{\tau_{vz}} \quad (\text{F.13})$$

$$\tan \hat{\theta} = \frac{\tau_{vx}}{\tau_{vy} \sin \hat{\psi} + \tau_{vz} \cos \hat{\psi}} \quad (\text{F.14})$$

En utilisant les relations temporelles du système adjoint (équations (F.9)), la solution devient :

$$\tan \hat{\psi} = \frac{\tau_{vy_f}}{\tau_{vz_f}} \quad (\text{F.15})$$

$$\tan \hat{\theta} = \frac{\tau_{rx_f}(t - t_f) + \tau_{vx_f}}{\tau_{vy_f}^2 + \tau_{vz_f}^2} \quad (\text{F.16})$$

Cette dernière équation prouve que la tangente de l'angle de tangage ( $\Theta$ ) optimal est linéaire en fonction du temps. Cette affirmation est utilisée dans le chapitre 3 pour introduire des connaissances *a priori* dans le critère d'optimisation afin d'améliorer les propriétés de convergence de l'optimisation.