**Université de Montréal**

PLACE ET FONCTIONS DE LA VALIDATION
CHEZ LES FUTURS ENSEIGNANTS DES MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE

par
CLAUDINE MARY

DÉPARTEMENT DE DIDACTIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de
PHILOSOPHIAE DOCTOR (PH. D.) EN SCIENCES DE L'ÉDUCATION
OPTION DIDACTIQUE

août, 1999

0-612-51967-8

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

PLACE ET FONCTIONS DE LA VALIDATION
CHEZ LES FUTURS ENSEIGNANTS DES MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE

Présentée par
CLAUDINE MARY

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Gisèle Lemoyne..........................présidente du jury

Sophie René de Cotret...................directrice de recherche

Linda Gattuso............................co-directrice de recherche

Louise Poirier.............................membre du jury

Nicolas Balacheff.........................examinateur externe

Jean M. Turgeon..........................représentant du doyen

Thèse acceptée le: 18 novembre 1999

## SOMMAIRE

Plusieurs recherches montrent que des étudiants universitaires ou de futurs enseignants ont des lacunes par rapport à la preuve en mathématiques et qu'ils évaluent mal son rôle ou celui de différents arguments de validation (Buckland, 1969; Eisenberg, 1977; Galbraith, 1982; Schoenfeld, 1983; Vinner, 1988; Martin et Harel, 1989; Moore, 1994; Vollrath, 1994; Knuth & Elliot, 1997). Une recherche réalisée auprès de futurs enseignants des mathématiques au secondaire, étudiants de l'Université du Québec à Montréal (Bednarz, Gattuso, Mary, 1996) montre que les conceptions des étudiants peuvent évoluer durant leur formation vers une conception des mathématiques moins formelle et moins procédurale et un enseignement qui accorde une plus grande place à l'exploration à partir de matériel, à la représentation, à des raisonnements différents et à la participation des élèves à leur apprentissage. Ces nouvelles conceptions vont aussi dans le sens des orientations du programme d'études du secondaire au Québec. Dans ce contexte, avec d'une part les lacunes observées par rapport à la preuve en mathématiques et, d'autre part, les nouvelles orientations du programme et l'évolution observée chez nos étudiants, nous nous sommes demandé quelle place et quelles fonctions les futurs enseignants accordaient à la validation dans la classe.

Pour répondre à cette question, nous avons analysé les leçons de quinze étudiants de l'UQAM, préparées lors de leur stage d'enseignement. Les stagiaires devaient présenter par écrit au moins trois leçons consécutives et filmer au moins une leçon en classe. Ce sont ces planifications et prestations que nous avons analysées. Au moment de leur stage, les étudiants avaient suivi minimalement onze crédits en cours de didactique les préparant à la planification de leçons et à l'enseignement de différents concepts surtout du premier cycle du secondaire. Nous nous sommes limitée aux leçons portant sur des objectifs identifiés comme algébriques ou préparant à l'algèbre dans le programme d'études du Ministère de l'éducation, au premier cycle du secondaire.

Pour analyser les leçons, nous avons jumelé les idées maîtresses de plusieurs didacticiens: en particulier celles de projets de preuve ou de vraisemblance de Margolinas (1989), de niveaux de preuve de Balacheff (1988), de validation lors de la transmission d'un modèle en sciences expérimentales de Joshua et Joshua (1987) et de

fonctions de la preuve chez Barbin (1989), Hanna (1989) et de Villiers (1990).

Nos résultats montrent que le mode de validation le plus utilisée consiste en expériences répétées souvent à l'aide d'une illustration. Ces expériences ont un potentiel de preuve. Cependant plusieurs observations nous laissent penser que les futurs enseignants ne sont pas engagés dans le projet de montrer la nécessité des règles mais plutôt dans un projet de vraisemblance ou de "bon sens" (Margolinas, 1989), sans préoccupation articulée de rigueur. Plusieurs stagiaires veulent faire en sorte que les élèves comprennent sans pour autant s'appuyer sur les propriétés mathématiques connues des élèves pour justifier les résultats. Ainsi, pour trouver ou vérifier un résultat, plusieurs utilisent une argumentation centrée sur la réponse plutôt que sur les propriétés qui y mènent. Des arguments à potentiel de preuve sont sous-estimés ou ils ne sont pas récupérés par des stagiaires. Des situations qui auraient pu facilement donner lieu à une argumentation, semblent bien plutôt utilisées pour améliorer des habiletés de calculs. Nous avons également observé des glissements d'arguments de validation reposant sur les propriétés générales dans la planification, vers des arguments reposant sur des vérifications ponctuelles de réponses, dans la prestation. De plus, nous avons observé que des stagiaires utilisent un exemple pour justifier un énoncé de la même manière qu'ils utilisent un contre-exemple pour l'invalider et que les contre-exemples ne sont pas l'occasion de comprendre. Nous avons pu constater que dans leurs planifications, les stagiaires élaborent peu sur les fondements eux-mêmes des règles et surtout sur comment ils comptent en parler en classe. En général, les stagiaires ne s'interrogent et n'interrogent pas les élèves sur la généralité du résultat ou sur les arguments utilisés. Le projet de rigueur explicite semble se limiter à l'utilisation du symbolisme algébrique avec ses conventions d'écriture.

Quant aux fonctions de la validation, deux catégories ressortent de notre analyse: il y a des fonctions plus strictement liées au besoin de validation de l'objet mathématique et des fonctions liées davantage à la présentation des contenus et à la progression du groupe-classe. Ces fonctions de la validation varient selon la place des étapes dans le déroulement de la leçon, place qui est déterminée par les objectifs de cette leçon. Par exemple, les validations qui ont lieu dans une période d'introduction à un concept pourraient davantage vouloir faire comprendre et faire partager la compréhension alors que celles qui ont lieu en conclusion pourraient se préoccuper surtout d'efficacité. L'étape de conclusion apparaît aussi comme une étape charnière dans la progression de la leçon, pour revenir sur la tâche, lancer de nouvelles questions et passer à autre chose. L'identification de deux types de validation nous a permis d'apporter des explications à certains phénomènes observés en classe notamment aux glissements des arguments de validation dont nous avons parlé plus haut. Nous avons également émis l'hypothèse que les étapes de validation pouvaient parfois servir bien plus la progression du groupe-classe que la stricte validation de l'objet mathématique.

Nos résultats nous conduisent à la conclusion que les futurs enseignants des mathématiques au secondaire, dont nous avons analysé les leçons, n'incluent pas dans leur contrat d'enseignement de faire en sorte que les élèves améliorent leur habileté de validation et passent au niveau des preuves intellectuelles. Nous pensons également qu'il manque à leur réflexion sur ce qui valide en mathématiques, une réflexion articulée sur ce qui valide dans la classe.

## TABLE DES MATIÈRES

# LISTE DES TABLEAUX

## LISTE DES FIGURES

## REMERCIEMENTS

Nous aimerions d'abord exprimer notre reconnaissance à madame Sophie René de Cotret, professeure à l'Université de Montréal, et à madame Linda Gattuso, professeure à l'Université du Québec à Montréal, qui nous ont accompagnée tout au long de notre démarche et qui ont su nous faire avancer par leurs critiques, leurs conseils et leurs encouragements.

Nous aimerions aussi remercier les professeures Bernadette Janvier, Nadine Bednarz et Linda Gattuso, et le professeur Claude Janvier, à titre posthume, de l'Université du Québec à Montréal, avec qui nous avons donné des cours de didactique, durant les sept dernières années, et avec qui nous avons travaillé dans différents projets de recherche. Ils nous ont fait confiance et nous ont permis indirectement de réaliser cette thèse.

Nous disons un merci spécial à tous les étudiants du baccalauréat en enseignement secondaire, de l'Université du Québec à Montréal, qui ont contribué à cette recherche en fournissant leurs planifications et enregistrements de leçons.

Nous voulons également remercier madame Line Mary qui a bien voulu apporter sa collaboration à la mise en page et au graphisme.

Enfin, nous remercions tous nos parents et amis qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de cette thèse, que ce soit en effectuant des corrections et des vérifications de dernières minutes, en participant à la reliure du document ou simplement en nous accordant leur support constant. Nous remercions en particulier Wayne, José et Cécilia qui nous ont accompagnée durant toutes ces années.

# INTRODUCTION

Initier les élèves à la rigueur mathématique tout en appelant à la signification des concepts dans différentes situations, n'est pas tâche facile. Nous avons d'abord été intéressée par cette double tâche. C'est dans la perspective de donner du sens à l'activité mathématique et aux concepts, que du matériel concret, des illustrations et des contextes de la vie courante peuvent être utilisés pour supporter des raisonnements qui autrement seraient difficiles et pour enrichir les concepts d'images, de mots et de symboles qui seront fructueux. Dans cette même perspective, le programme d'études en mathématiques au secondaire recommande de partir de situations concrètes et de faire manipuler les élèves pour induire ou déduire des règles. Le programme insiste aussi sur la nécessité de faire raisonner l'élève et de développer chez-lui l'esprit critique. Nous savions que la formation des futurs enseignants en mathématiques à l'Université du Québec à Montréal (UQAM) pouvait renforcer chez-eux l'utilisation de matériel, d'activités d'exploration et de représentation, et l'intention de faire raisonner les élèves et de les faire participer à leur apprentissage. Mais différentes recherches déploraient le peu d'habiletés des étudiants futurs maître en démonstration, le recours à des vérifications empiriques lors de la résolution de problème et une sous-évaluation du rôle de la preuve. C'est dans ce contexte que nous présentons plus amplement dans le premier chapitre, que nous nous sommes posé la question de la place et des fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire, en prenant comme population d'études les étudiants de l'UQAM. Quelle place et quelles fonctions nos étudiants formés à donner du sens aux concepts et à faire participer les élèves à leur apprentissage, mais ayant aussi quelques faiblesses répertoriées dans la littérature, donnaient-ils à la preuve ou à toute autre forme de validation? Nous avons donc entrepris de caractériser la validation dans leurs leçons lors de leur stage d'enseignement en nous limitant toutefois aux leçons portant sur l'algèbre ou préparant à l'algèbre, au premier cycle du secondaire.

Pour réaliser notre analyse, nous nous sommes munie d'un cadre théorique qui nous permettait d'élargir l'idée de validation et de preuve en mathématiques et qui nous permettrait de caractériser la validation d'après sa place, ses arguments et ses fonctions. Nous présentons ce cadre théorique dans le chapitre 2. C'est à partir de ce cadre théorique que nous avons établi notre grille d'analyse. Dans les premières sections de ce chapitre, nous ferons le point sur la preuve en mathématiques (§2.1) et sur la validation en enseignement des mathématiques (§2.2 et §2.3). Dans ce chapitre, nous présenterons aussi l'état de la situation relativement aux recherches sur les conceptions des enseignants et futurs enseignants (§2.4) avant de préciser nos propres objectifs (§2.5).

Pour enrichir ce cadre théorique, nous avons fait l'analyse des sections algébriques des manuels les plus utilisés au premier cycle du secondaire, ce qui nous a permis de nous familiariser avec la validation en algèbre, dans ces manuels. Cette analyse fait l'objet du chapitre 3. Une pré-expérimentation auprès de quatre futurs enseignants, en début de formation, nous a permis de raffiner certaines intuitions et d'enrichir encore une fois notre cadre théorique. Les résultats de cette pré-expérimentation sont présentés au chapitre 4. Notre cadre théorique, enrichi de l'analyse des manuels et de la pré-expérimentation, nous a permis de faire une analyse fine des planifications et prestations de leçons.

Les trois autres chapitres de cette thèse seront consacrés à notre recherche. Nous présenterons les détails méthodologiques nécessaires dans le chapitre 5, puis nos résultats et analyses, dans le chapitre 6. Enfin, le chapitre 7 reprendra notre problématique et le bilan de nos résultats avec nos conclusions générales.

# CHAPITRE 1
# PROBLÉMATIQUE

## 1.1 La validation en mathématiques

Quand on pense à validation en mathématiques, bien sûr on pense à *preuve*. On précise souvent en la qualifiant de *mathématique*; on dit la *preuve mathématique* pour la distinguer d'autres types de preuves et pour signaler que la preuve en mathématiques ce n'est pas comme une autre preuve. En effet, en mathématiques, existe une méthode de validation toute particulière qui n'existe pas ailleurs. Les objets sont préalablement définis. Les prémisses sont bien identifiées et bien distinguées de la conclusion. La conclusion est obtenue des prémisses par une suite d'inférences logiques dont les règles de manipulation sont aussi bien définies. La preuve est issue du projet d'échapper au sens ou à la perception et à la subjectivité devant l'échec d'une validation prenant comme référent le monde réel. Nous retracerons son histoire dans le chapitre 2. Balacheff (1988) appelle la méthode définie ainsi *démonstration*. Nous y garderons ce sens. Il dira qu'à la limite elle est un calcul (calcul logique). Legrand (1988) explique l'importance de la validation mathématique pour les autres sciences du fait que c'est le seul endroit (en mathématiques) où la règle du tiers exclu fonctionne. À partir du moment où le modèle est postulé, le fonctionnement à l'intérieur du modèle pourra emprunter les règles de la validation en mathématiques.

Certains diront qu'elle est LA seule preuve acceptable (Duval, 1992-93). Pourtant, elle soulève des controverses. La communauté mathématique bien sûr s'entend généralement sur certains critères de rigueur, mais le point de vue n'est pas monolithique. Des débats virulents sont engagés au sein de celle-ci (Krantz, 1994; Horgan, 1993), activés entre autres par l'apparition ou la réapparition de preuves visuelles, par ordinateur cette fois (Davis, 1993). En fait, la preuve mathématique *idéale*, la preuve formelle, détachée du *sens* des objets, n'est pas simple à produire: c'est long et pénible, c'est difficile de tout expliciter, il y a des ellipses, on trouve souvent des erreurs, elle est difficile à lire. Dans la pratique, certains écarts sont tolérés, mais à partir de quand décide-t-on que la preuve est recevable. Combien d'ellipses peut-on tolérer? Certains diront que les mathématiciens eux-mêmes ne comprennent plus ce qu'ils font et que la production de telles preuves ne caractérise pas essentiellement l'activité mathématique (Balacheff, 1988; Lakatos, 1976; Hanna, 1995;

MacKernan, 1996). Le débat sur la preuve en mathématiques est celui en fait de la rigueur et du sens (signification). À vouloir être rigoureux, on perd du sens; mais à vouloir garder le sens, ne s'éloigne-t-on pas de la rigueur? En même temps, se pose la question du rôle de la preuve en mathématiques: à quoi sert-elle? Doit-elle faire comprendre? Et faire comprendre est-ce prouver?

## 1.2 La validation dans la classe de mathématiques au secondaire

Dans la classe de secondaire, le problème est encore plus aigu puisqu'il n'y a pas besoin d'un haut niveau de formalisme pour que le *sens* se perde. Des recherches montrent que le travail formel sans l'épaisseur du sens donne de piètres résultats. Bednarz et Janvier (1992) expliquent les résultats désastreux en algèbre par le fait que l'outil fonctionne à vide.

Depuis les années 70, les psychologues et les pédagogues ont exercé des pressions sur le milieu de l'enseignement pour que les élèves manipulent, qu'ils partent de situations concrètes, de manière à s'impliquer dans leur apprentissage. Nos programmes du secondaire (mis en vigueur en 1ère secondaire en 1993) ont suivi ces recommandations.

> *"C'est notamment par le choix des activités proposées que l'enseignante ou l'enseignant peut favoriser la participation active de l'élève. (...) Ils ont souvent besoin d'activité concrète pour fixer leur attention et aborder des concepts plus abstraits. Une approche à privilégier ici consisterait à proposer des activités de manipulation, d'exploration, de construction ou de simulation, suivies de discussions autour desquelles, en petits groupes ou avec l'enseignante ou l'enseignant, l'élève pourrait comparer ses résultats et tirer des conclusions."*
> (MEQ, 1994, Chapitre II: Orientations générales, p.16.)

Mais qu'est-ce qui alors valide? La rigueur contemporaine a élaboré des règles justement pour échapper à la perception qui trompe. Alors comment concilier rigueur et expérience concrète? Comment passer d'une situation particulière contextualisée à la généralisation?

Nos programmes énoncent des objectifs globaux (id. chapitre III, p. 22) valables pour l'ensemble des cinq années du secondaire. Ces objectifs *"constituent un axe autour duquel les autres objectifs de chacune des années viennent s'articuler."* La préoccupation de validation apparaît dans les programmes par l'intermédiaire de l'un de ces objectifs:

> "***Raisonner***
> *Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à émettre des hypothèses et à les vérifier par une démarche inductive ou déductive."*

Comment les manuels scolaires répondent-ils à ces objectifs et aussi aux questions précédentes, particulièrement pour le premier cycle du secondaire? Joshua et Joshua (1987) faisant l'analyse de la situation en France discutent du problème que soulève un enseignement des mathématiques prenant comme point de départ une approche expérimentale, tout en conservant une conception des mathématiques de style déductiviste. Ils concluent à une contrainte didactique forte conduisant à faire du premier cycle du secondaire un cycle d'observation où la validation se résume à des exemples et des répétitions d'exemples, et du deuxième cycle celui de la démonstration (caractéristique d'une vraie mathématique).

Ainsi, le problème dans la classe de mathématiques se complique. Non seulement existe ce problème du sens (signification) versus celui de la rigueur, mais le sens s'appuyant sur l'expérience et l'observation, il n'est pas évident qu'on puisse dépasser la seule évidence issue de constat sur des cas particuliers. L'enseignant a donc un mandat difficile d'autant plus que la validation n'est pas un objet d'enseignement localisé à un moment précis du programme et que la tâche à réaliser n'est pas clairement définie. *Raisonner*, objectif global du programme, renvoie au processus de la pensée et se traduit difficilement en procédures à suivre.

## 1.3 La validation chez les futurs enseignants

Sur quoi peut-on compter comme habiletés de la part des futurs enseignants qui auront à assumer ce rôle double d'initier à la rigueur mathématique et de faire en sorte que le concept étudié ait du sens, que l'élève puisse l'utiliser dans des situations variées et nouvelles. Selon toute apparence, ils peuvent développer, dans un programme de formation qui le favorise, le désir de faire raisonner les élèves, de les faire participer à leur apprentissage, et de faire comprendre le concept à travers des activités de manipulation (Bednarz, Gattuso, Mary, 1996). Cependant, nous pouvons nous interroger sur le résultat de ce projet étant donné le portrait peu réjouissant que tracent plusieurs recherches concernant les étudiants universitaires, futurs enseignants de mathématiques. D'abord, ils éprouvent des difficultés à réaliser des preuves formelles (Gray, 1975; Buckland, 1969; Galbraith, 1982). L'étude de Galbraith (1987) montre un certain nombre de lacunes qui persistent malgré une plus grande formation en mathématiques[1]. Les étudiants confondent conditions nécessaires et conditions suffisantes; ils pensent que la réciproque d'une proposition vraie est automatiquement vraie; ils ne reconnaissent pas l'erreur dans une preuve qui utilise l'énoncé réciproque de ce qu'il faut démontrer; ils échouent à analyser ou à considérer le domaine de définition d'une fonction donnée pour conclure ou juger d'un énoncé; ils rejettent une définition ou une figure plutôt que de rejeter un énoncé faux qui leur semble vrai; un grand nombre éprouve des problèmes dans l'utilisation de contre-exemples (on donne des contre-exemples qui seraient valables pour la proposition réciproque ou si la réciproque était équivalente à la proposition à démontrer). On constate également un manque de moyen de contrôle des actions. Plus grave, ces études et celle de Moore (1994) déplorent le manque d'intuition des étudiants.

Ensuite, ils semblent accepter et recourir à des arguments peu évolués pour justifier un énoncé ou leur solution à un problème. Martin et Harel (1989) ont proposé à de futurs enseignants du primaire, différents arguments devant assurer de la justesse d'un énoncé. Cette étude indique que ces futurs enseignants acceptent comme justification des vérifications sur quelques exemples (isolés ou sous forme de tableau de valeurs) et des vérifications doubles, c'est-à-dire un exemple qui respecte les conditions énoncées et donc la conclusion et un exemple qui ne les respecte pas. Ils reconnaissent ces arguments comme arguments de validation autant que des arguments déductifs tels une preuve générale et une preuve particulière (preuve générale sur cas particulier). Plusieurs étudiants acceptent fortement et en même temps les deux types d'arguments. Souvent ils vont accepter la preuve générale tout en acceptant aussi un argument faux qui a l'apparence (forme) d'une preuve mathématique (avec des énoncés justifiant chacune des étapes). Knuth et Elliot (1997) ont proposé deux problèmes de géométrie à de futurs enseignants du secondaire, cette fois, en leur demandant de justifier leurs solutions. Ils ont observé eux aussi un recours à des justifications pragmatiques telles des mesures sur différents cas particuliers.

Par ailleurs, d'après une recherche en cours[2] auprès de futurs enseignants du secondaire en mathématiques de l'Université du Québec à Montréal, ils affirment en grande majorité que quelques exemples ne suffisent pas à valider.

Toutefois, il semble que les futurs enseignants évaluent mal le rôle de la preuve

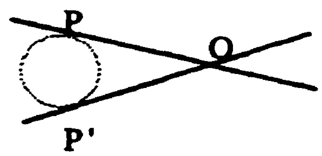
---

[1]Galbraith (1987) a comparé les résultats à un test à un choix multiple d'un groupe de débutants universitaires et d'un groupe de diplômés en mathématiques. Un test- t dans chacun des cas a montré un t non significatif.

[2]Formation à l'enseignement. Équipe: N. Bednarz, L. Gattuso, C. Mary, M. Lebrun, P. Lebuis, (UQAM), C. Baribeau, R. Toussaint, P. Blouin (UQTR). Recherche en cours. Subvention FODAR,1995-1998,

dans l'enseignement et celle-ci leur apparaît finalement peu importante. Vollrath (1994) indique que les étudiants universitaires, futurs enseignants, et des élèves du secondaire vus en entrevue, apprécient un théorème d'abord par son utilité. Ils reconnaissent facilement l'importance du théorème de Pythagore parce qu'il fait l'objet de nombreux exercices et de questions d'examens; ils reconnaissent l'importance des cas de congruence parce qu'ils sont utilisés très tôt et souvent dans les preuves. Mais bien souvent, le théorème n'apparaît pas être utile. Une recherche de Schoenfeld (1983) portant sur la résolution de problèmes est particulièrement révélatrice sur ce point bien qu'elle ne concerne pas de futurs enseignants.

Les étudiants devaient résoudre le problème qui suit: il faut construire un cercle tangent à deux droites sécantes (en O) et passant par un point P situé sur une des deux droites sécantes.




Le comportement observé répandu consiste à faire une conjecture (par exemple: le diamètre est le segment passant par P et P', P' étant situé tel que OP = OP'), à vérifier cette conjecture à l'aide d'une construction, de rejeter la conjecture, d'en tester une nouvelle jusqu'à épuisement des conjectures ou jusqu'à ce qu'on trouve la bonne. Lorsqu'on demande aux étudiants de justifier (pourquoi ça marche?), ils ne peuvent répondre (sauf exception). Pourtant ces mêmes étudiants ont pu prouver que si on prend deux tangentes à un cercle qui s'interceptent en un point alors les segments reliant ce point et les points de tangence sont congrus et le segment passant par le point d'intersection et le centre du cercle divise l'angle formé par les deux tangentes en deux angles congrus. Une ou l'autre de ces propriétés, jumelée à celle de la perpendiculaire des tangentes et des rayons, issus des points de tangence, propriétés utilisées dans les preuves, suffisait à tracer le cercle. Ils n'ont pas fait le lien. Pourtant, ces étudiants réussissaient bien en mathématiques; ils avaient une attitude positive face aux mathématiques et étaient confiants en leurs habiletés.

Par ailleurs, il se pourrait que les futurs maîtres, comme les étudiants universitaires de Vinner (1988)[3], se méfient des preuves qui ne sont pas formelles. En effet, devant deux preuves d'un théorème d'analyse, l'une formelle, se présentant

[3]Cf Alibert & Thomas, 1991.

comme une suite d'inférences avec l'utilisation du symbolisme habituel et l'autre visuelle et dynamique, environ les deux cinquièmes des étudiants (pour un total de 74 ) ont trouvé la preuve visuelle plus convaincante, autant ont préféré la preuve algébrique et le reste a considéré les deux preuves comme étant de même valeur. Ceux qui ont choisi la preuve algébrique considéraient la preuve visuelle suspecte. Ceci fait dire à l'auteur de l'étude (Vinner, id.) que les étudiants ont développé un biais algébrique plus par habitude et raison de commodité que par nécessité cognitive.

Ce besoin de preuve formelle peut provenir d'un manque de confiance face aux autres sortes de preuves. Dans un cours donné à l'université Concordia (automne 1996), le Dr Tommy Dreyfus a raconté l'anecdote suivante montrant la position ambiguë de certains étudiants face à la preuve. Un de ses collègues a proposé deux preuves à ses étudiants, l'une formelle et l'autre non. À la question, laquelle préférez-vous, les étudiants ont choisi la preuve non formelle. Or, en examen, plus tard, pour la même situation, ils ont en majorité tenté d'utiliser la preuve formelle mais sans pouvoir la reproduire.

Suite à ces résultats nous posons la question suivante:

entre la démonstration qui leur cause des difficultés et les expériences répétées, les futurs enseignants utilisent-ils d'autres formes de validation?

## 1.4 Nos observations personnelles

Notre expérience d'enseignement auprès d'étudiants futurs enseignants au secondaire et de supervision de stage d'enseignement, nous a conduite à certaines observations qui rejoignent la problématique de la validation dans ce tiraillement entre la rigueur et le sens et entre deux pôles celui de la preuve formelle et celui de l'expérience et des essais répétés.

Nos premières observations touchent l'aspect *général* d'une situation. Il nous est apparu qu'il y avait parfois discordance entre notre évaluation de la généralité d'une situation ou d'un raisonnement et celle des étudiants. Dans ce sens, nous avons observé que des étudiants associent la généralisation à la simple utilisation d'une lettre. Nous avons senti que des étudiants arrivaient mal à distinguer une illustration, ou une figure, à portée générale d'une illustration particulière. Nous avons cru comprendre de leur réaction que pour certains un raisonnement avec nombres est plus général qu'un raisonnement en mots dans un contexte, même si le raisonnement avec nombres se fait sur des cas particuliers et que celui en mots s'appuie sur des propriétés générales dans le contexte. Ces observations nous interrogent sur le statut qu'ils accordent à différents arguments de validation, les uns par rapport aux autres, mais aussi sur le rôle qu'ils donnent à ces arguments.

Nous avons par ailleurs observé une incohérence entre ce qu'ils savent et ce qu'ils font relativement à la validation. Comme nous l'avons signalé plus haut, ils rejettent en majorité une validation reposant sur un exemple (recherche en cours)[4] mais dans leurs leçons, ils utilisent des exemples particuliers apparemment pour prouver. Sur un autre plan, même s'ils ont le désir de faire comprendre (même recherche), leur enseignement en stage se résume souvent à l'application de règles et de formules. De plus, ils recourent régulièrement à des définitions et des règles ou à une justification formelle, bien qu'ils manifestent l'intention de donner du sens. Est-ce la conséquence d'une pression de l'école, d'un manque d'alternative, d'un manque de flexibilité ou d'une méfiance pour ce qui n'est pas une méthode officielle? Nous avons également pu constater que les étudiants minimisaient l'importance de la partie de leur leçon où une preuve était élaborée pour faire comprendre. Lors d'un retour sur le stage, plusieurs étudiants ont soutenu l'idée que, finalement, l'entreprise n'aidait pas plus les élèves et consistait en une perte de temps. Encore une fois nous nous interrogeons sur le rôle ou la fonction des arguments de validation utilisés.

Ces différences de point de vue sur ce qui est général et les tiraillements que les étudiants semblent vivre entre "donner du sens" et "valider" (plus ou moins formellement) nous conduisent à vouloir investiguer davantage la question de la fonction de la validation dans les leçons des stagiaires notamment.

## 1.5 Objectifs et questions de recherche

Dans la formation des futurs enseignants du secondaire en mathématiques à l'UQAM (Université du Québec à Montréal), se trouvent plusieurs cours de didactique organisés autour des concepts abordés particulièrement au premier cycle du secondaire: fractions et décimaux, proportionnalité, algèbre, fonctions. Continuellement des moyens sont envisagés pour faire comprendre et des contextes, figures, exemples sont utilisés régulièrement, pour supporter des raisonnements généraux. Il est légitime de se poser la question: est-ce que l'utilisation abondante de matériel concret, par exemple, renforce chez les étudiants le recours à des validations basées sur l'observation et le

---

[4] idem 2

simple constat ou, au contraire, stimule-t-elle le recours à d'autres sortes de preuves, en autant que c'est possible?

Les étudiants sont soumis aussi à d'autres influences que celle des cours de didactique. Ils suivent entre autres des cours de mathématiques avancées qui proposent sans doute des preuves à haut niveau de formalisme. Ces cours peuvent contribuer à renforcer des conceptions quant à la preuve en mathématiques, telles que sans formalisme il n'y a pas de preuve.

Surtout, en stage, ils sont responsables de l'apprentissage des élèves qui leur sont confiés. Leurs choix lors de la préparation des leçons et dans la classe sont nécessairement guidés par ce contrat. Quelle place et quelles fonctions la validation y trouve-t-elle ? Entre d'autres mots, comment concilient-ils les connaissances et conceptions développées durant leur formation antérieure et leur contrat de stagiaires?

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier les planifications et prestations de leçon des étudiants stagiaires en enseignement des mathématiques au premier cycle du secondaire, plus précisément en algèbre. Notre objectif est de caractériser la validation (les arguments et les étapes de validation) par

1) sa place dans la leçon, lieu et espace occupé,
2) ses fonctions et
3) les arguments utilisés pour valider.

Nous formulons notre objectif de recherche en termes de validation plutôt que de preuve car il nous est apparu plus riche d'envisager le problème de la validation dans l'enseignement, incluant la preuve, plutôt que celui strictement de la preuve. En effet, c'est à travers l'ensemble des actes pédagogiques relatifs à la discipline enseignée que sont véhiculés les messages sur la validation qui se fait en mathématiques.

Nous nous limiterons aux leçons du premier cycle du secondaire en algèbre. Nous choisissons ce niveau et ce thème pour des raisons stratégiques. La preuve-démonstration est introduite officiellement au deuxième cycle du secondaire et c'est en géométrie que les étudiants futurs enseignants ont été initiés explicitement à la preuve avec un contenu près du secondaire. Par contre, les étudiants ont suivi un cours de didactique de l'algèbre où implicitement leur étaient proposés des moyens réutilisables en classe. Il sera alors particulièrement intéressant de voir quelle place et quelles fonctions aura la validation en algèbre.

## 1.6 Pertinence de la recherche

Il apparaît important de se pencher sur la place et la fonction de la validation dans les planifications et prestations de leçons des futurs enseignants et ce pour plusieurs raisons. D'abord, les actions des enseignants ont une influence sur les comportements des élèves. Plusieurs didacticiens, choisissant de prendre comme objet d'étude les interactions sociales dans la classe, montrent comment les règles de validation, par exemple, se développent à travers ces interactions (Yackel et Cobb, 1996; Lampert, 1990). Des études de cas (Steinberg, Haymore et Marks, 1985) suggèrent que le bagage formel de l'enseignant puisse être en relation avec son approche en classe. Ceux qui ont une meilleure connaissance des mathématiques utiliseraient plus souvent des comportements que nous identifions comme révélateurs par rapport à la validation: tels expliquer pourquoi des procédures fonctionnent et pourquoi pas d'autres, faire ressortir les idées centrales du concept, faire des liens entre concepts et avec la vie de tous les jours (applications) et présenter le matériel dans sa forme abstraite avec le langage et les symboles mathématiques. Ils auraient moins tendance à utiliser des règles que ceux qui ont une faible connaissance des mathématiques. Ces auteurs montrent aussi qu'il existe une certaine cohérence entre la perception que des enseignants ont des élèves et les moyens utilisés pour tenir compte des différences et pour adapter leur enseignement. Par exemple, un enseignant dit expliquer moins pourquoi et plus comment dans les groupes faibles. Schoenfeld (1988) vérifie, lui, l'hypothèse suivante: le traitement de la preuve en classe conduit les élèves à adopter une position anti-mathématique face à la preuve. Les preuves prouvent ce qu'on sait déjà et ne consistent qu'en exercices pour faire plaisir aux professeurs. Ces exercices aident à développer la discipline et le raisonnement logique, mais ne sont pas utiles. Il a pu identifier des aspects précis de l'interaction en classe qui contribuent à développer cette conception de la preuve chez les élèves.

Une autre raison qui justifie de se pencher sur le sujet est l'absence de recherche sur la place et les fonctions de la validation dans les planifications et prestations des enseignants ou futurs enseignants des mathématiques au secondaire.

Plusieurs recherches dans ce domaine ouvrent sur la question de la fonction de la preuve et de ses conséquences sur l'appréciation des arguments de preuve (Schoenfeld, 1988; Martin et Harel, 1989; Moore, 1994; Vollrath, 1994; Pinto et Ainley; non publié). Mais ces études ne portent pas sur la place et les fonctions de la validation dans la classe. Seul Schoenfeld a suivi des enseignants dans leur classe et ses résultats sur la fonction de la preuve sont éclairants mais ne concernent que la preuve objet d'étude. En nous situant au premier cycle du secondaire, nous devons envisager la preuve sous un angle plus large. Par ailleurs, nous pensons que les fonctions de la validation ne sont pas indépendantes du moment et du contexte où a lieu la validation.

Notre étude permettra de raffiner une première grille d'analyse des préparations et prestations de leçons développée à partir de notre cadre théorique que nous présentons dans le chapitre 2. Elle fournira en même temps une catégorisation des validations utilisées en classe et de leur fonction.

# CHAPITRE 2
# CADRE THÉORIQUE

## Introduction

Nous situons le problème de la validation dans l'enseignement des mathématiques en parallèle avec celui du tiraillement entre rigueur et sens qui existe dans la communauté mathématique elle-même. Dans un premier temps, nous faisons donc le point sur la validation en mathématiques: preuves formelles et non formelles, niveaux de preuve, fonctions de la preuve, le rapport de la preuve à l'expérimental. Nous tentons de répondre aux questions qui suivent. Qu'appelle-t-on preuve en mathématiques? Outre la preuve-démonstration, existe-t-il d'autres preuves qui soient acceptables? À quoi sert la preuve en mathématiques lorsque l'activité mathématique est conçue comme activité de modélisation? En quoi consiste la validation en mathématiques et quel est son objectif? Des travaux importants ont été réalisés sur le sujet. Nous avons tenté de les synthétiser grâce à ces questions.

Comme dans l'enseignement des mathématiques, le problème de la rigueur versus le sens se double de celui d'une nécessité d'un apprentissage à partir du concret, nous prenons la deuxième partie de ce chapitre pour faire le portrait de la preuve dans l'enseignement des mathématiques, tel que les recherches en didactique le brossent. Nous tentons de répondre alors entre autres à trois questions. Quelles fonctions la preuve peut-elle prendre dans la classe de mathématiques? Peut-on concevoir des niveaux de preuve dans l'enseignement des mathématiques? Existe-t-il un passage facile d'un niveau de preuve à l'autre ou y a-t-il rupture?

Jusque là, nous parlons uniquement de preuve. Il reste alors à voir quelles sont les autres validations qui interviennent dans la classe. C'est ce que nous faisons en troisième partie, pour ensuite aborder le problème tel qu'il se présente à l'école et finalement, tel que nous l'envisageons: entre la preuve-démonstration et le constat sur quelques cas, des validations existent-elles chez des étudiants futurs enseignants qui ont une préoccupation de développer le raisonnement de leurs étudiants et quelle est la place et les fonctions de ces validations.

## 2.1 Le point sur la validation-preuve en mathématiques

La preuve mathématique est associée naturellement à la méthode de la démonstration aux règles bien définies. Nous verrons cependant que la démonstration peut être fort différente selon qu'elle est utilisée par les logiciens qui organisent le savoir en théorie ou d'autres mathématiciens soucieux, par exemple, de partager le savoir mathématique. La preuve n'a pas toujours et n'a pas toujours eu la même fonction. Nous chercherons dans les différentes sections à caractériser la preuve en mathématiques par ses fonctions et par le "projet" qui motive sa production. Pour l'enseignement et pour notre recherche, cette approche nous apparaît plus pertinente que la simple question de l'acceptabilité des arguments.

### 2.1.1 Preuve formelle et preuve non formelle

#### a. La démonstration, une preuve à forme particulière

La démonstration a pour objectif explicite de déterminer la vérité d'une assertion. Elle est considérée le plus souvent comme une méthode (Arsac, 1987, Balacheff, 1988), comme un style, le style déductiviste (Lakatos, version française, 1985), ou comme une forme de discours rencontrant certaines conditions d'organisation (Duval, 1992-93). Suite aux travaux de Balacheff (1988) et de Duval (1992-93), elle est souvent associée dans les textes français à une preuve qui présente les caractéristiques suivantes: on a des objets, des axiomes et des règles de fonctionnement préalablement définis; les énoncés sont déduits les uns des autres à partir de cet ensemble de règles, d'axiomes et de définitions, augmenté de théorèmes connus.

Pour parler de cette preuve, les textes anglophones utilisent les expressions "*mathematical proof*", "*formal reasoning*" (Schoenfeld, 1991), "*academic proofs*" (Mac Kernan, 1996), "*formal proof*". Le degré de formalisme peut toutefois varier. Reconnaissons dans ce type de preuve aussi bien les démonstrations de la géométrie euclidienne, comme prototype, que celles des logiciens.

Démonstration, dans le sens donné, renvoie (plus ou moins) à preuve formelle. Il s'agit d'une méthode axiomatique, d'un discours hypothético-déductif (Rouche, 1989). Souvent le discours est fortement codifié et le plus souvent symbolisé. À la limite, la démonstration est un calcul (Balacheff, 1988). Balacheff précise que c'est le type dominant en mathématiques, les règles de déduction étant socialement partagées.

**b. La preuve des logiciens**

La démonstration définie plus haut est organisée selon des règles très précises que les logiciens respecteront à la lettre. Duval (1992-1993) a décrit ces règles en comparant la démonstration à l'argumentation, laquelle procéderait d'une logique naturelle, dit-il. L'argumentation et la démonstration ont toutes les deux pour objet de décider de la valeur d'un énoncé, mais la démonstration a pour objectif la vérité, tandis que l'argumentation cherche la vraisemblance et la conviction d'autrui ou de soi-même. La démonstration n'aurait donc pas pour objectif de convaincre, tout au moins pour le logicien. Duval (id.) fait une analyse pointue du fonctionnement de ce qu'il appelle un pas de déduction, d'une part, et un pas dans une argumentation, d'autre part. Il montre trois caractéristiques du pas de déduction.

Le fonctionnement d'un pas de déduction est défini par la règle du modus ponens: si on sait qne P => Q, alors si on a P on peut conclure Q. Si l'on veut démontrer que A =>D, il suffit de construire une chaîne en partant de A:

> A => B, si on a A donc B; B => C, on a B donc C; C => D, on a C donc D; par transitivité on peut conclure que A => D.

Les propositions "A => B", "B => C" et "C => D" sont des énoncés reconnus valides qui font le relais jusqu'à la conclusion. Ils sont appelés "énoncés tiers" par Duval (id.). Ces énoncés tiers (théorème, définition...) ont un statut théorique précis, fixé préalablement. La valeur de ces énoncés dans le discours est liée à leur statut théorique. Une fois le raisonnement complété, la conclusion du pas de déduction prend le statut de nécessaire. Pour le pas d'argumentation (analysé à partir d'un exemple tiré des "Mains sales", de Sartre), Duval (id.) constate qu'il n'y a pas toujours d'énoncé tiers et que s'il y en a un, les associations ne sont pas complètes entre les prémisses et les conclusions de l'énoncé tiers et de la proposition. Il constate également que les associations se font grâce à un réseau sémantique, que la valeur de l'énoncé tiers est liée à son contenu donc à la compréhension et que la conclusion ne prend pas le statut de nécessaire.

Ainsi, la démonstration est vue comme un calcul logique qui échappe donc à la subjectivité, au sens et à la compréhension, ces derniers pouvant aussi varier d'un individu à un autre et pouvant se modifier selon l'état des connaissances du sujet ou du milieu de discussion.

### c. Preuve formelle versus preuve non formelle

C'est au début du siècle qu'apparaît, avec Hilbert, la métamathématique dont l'objet est une abstraction des mathématiques où les théories sont remplacées par des systèmes formels, les preuves par des "suites de calculs bien formées", les définitions par des symboles (Lakatos, 1884). Schoenfeld (1991) définit un système formel comme des ensembles de symboles et de règles de manipulations. Aussi longtemps qu'on fonctionne avec ces règles, les résultats sont valides à l'intérieur du système. La preuve formelle a suscité et suscite de virulents exposés quant à sa pertinence dans l'enseignement secondaire (MacKernan, 1996) mais aussi dans la communauté mathématique elle-même, comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre 1. Deux articles en témoignent: celui de Krantz (1994), intitulé "The Immortality of Proof" (Notices of the American Mathematical Society) qui répond à un article de Horgan intitulé "The death of proof" (Scientific American, oct. 1993). Le débat, du côté des détracteurs, tourne autour du fait que les mathématiciens eux-mêmes ne comprennent plus ce qu'ils font, que les mathématiciens entre eux ne peuvent se lire, qu'écrire une preuve selon les critères de rigueur requis est oeuvre extrêmement pénible, qu'elle ne caractérise pas essentiellement l'activité mathématique (Balacheff, 1988; Lakatos, 1984; MacKernan, 1996; Davis, 1993), que les travaux des mathématiciens contiennent souvent des erreurs et qu'après tout la preuve formelle n'a qu'un statut d'infaillibilité très relatif (MacKernan, 1996; Schoenfeld, 1991). Les arguments dénoncent les abus de formalisme au détriment du sens (Schoenfeld, 1991) et la réduction de l'activité mathématique au raisonnement déductif (Balacheff, 1988; Lakatos, 1984; MacKernan, 1996). Mais souvent aussi, ils sont en faveur d'autres types de preuves telles les preuves par ordinateur (Horgan, 1993; Davis, 1993). Davis propose comme argumentation que si les yeux sont inadéquats pour saisir les objets des nouvelles créations mathématiques, la pure logique de l'esprit est inadéquate pour rendre compte de ce qui concerne l'oeil humain. Si on peut accepter que l'oeil soit trompeur, on peut dire la même chose de l'esprit *(brain)* qui est sujet à la fatigue, à des hallucinations, à la folie! [5]

Quant aux défenseurs (Hanna, 1995 et Krantz, 1994, entre autres), ils reconnaissent à la démonstration un rôle particulier pour résoudre certains problèmes et une valeur éprouvée à travers les siècles. Sans contester l'utilité des arguments

---

[5] "*Would you be prepared, today, to sacrifice your occular vision for a mathematical surrogate built into a computerized prosthetic device? If not, then you must admit that vision can yield something deeper than formulaic-deductive mathematics and hence can contribute to a wider view of mathematics.* " Davis, 1993, p.336.

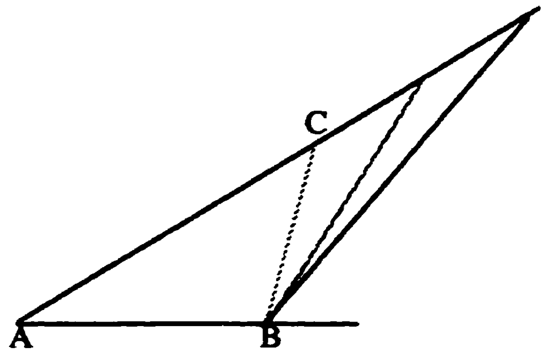
graphiques, ils leur nient le statut de preuve.

Ainsi la position et la fonction de la preuve en mathématiques n'apparaissent pas aussi nettes et aussi claires que nous aurions pu le penser. Hanna (id.) résume la situation, en rejetant ce qu'elle dit être deux présupposés du courant des mathématiques nouvelles dans l'enseignement *(new math)* : 1) l'existence de critères de validité généralement acceptés pour les preuves en mathématiques et 2) le fait que la mathématique moderne soit caractérisée par la rigueur de ses preuves. Pour rejeter le premier point, elle réfère entre autres aux débats relatifs aux preuves par ordinateur. Pour rejeter le deuxième point, elle dira que l'activité des mathématiciens aujourd'hui est bien plus de faire comprendre que de prouver pour prouver.

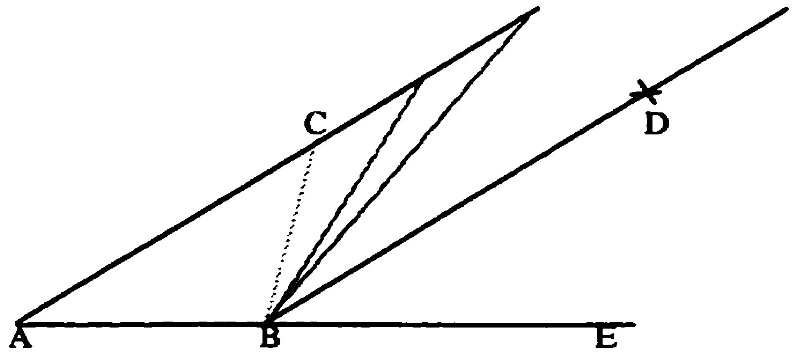
Sur ce deuxième aspect, certains ont cherché à redonner une valeur explicative à la démonstration (plus ou moins formelle) en la colorant d'heuristiques, pour la replacer ainsi dans la dynamique de l'activité de preuve et pour justifier (en quelque sorte) au lecteur les choix exécutés lors de cette activité.

Les preuves déductives, présentées habituellement de façon linéaire, ne révèlent rien des intentions, de l'intérêt, des raisons des choix. Pour améliorer la communication avec le lecteur, la présentation des preuves peut être remaniée de manière à intégrer des éléments d'heuristique (Lakatos, 1984; Lero, 1985). L'exemple qui suit (figure 1), inspiré d'une preuve de Clairaut (Barbin, 1989), comporte une part d'heuristique. Il s'agit de trouver un moyen simple et efficace de s'assurer que la somme des mesures des trois angles d'un triangle est constante. La preuve montre au lecteur le chemin qui a pu mener à la démonstration en partant d'une réflexion sur le triangle. Cette preuve éclaire en particulier sur le recours à une parallèle qui peut apparaître autrement obscur.

Il semble que la mesure de l'angle C dépende de la mesure des angles A et B. En effet en modifiant l'angle C, les droites AC et BC changent et par le fait même les angles A et B. Gardons l'angle A fixe et modifions l'angle C; il semble bien que ce que perd l'angle C, l'angle B le gagne, donc en fait que la somme des angles demeure la même.




Dans la position limite où BD est parallèle à AC, nous pouvons le démontrer.




<ACB= <CBD car ce sont des angles alternes-internes;
<CAB = <DBE car ce sont des angles correspondants.
<CAB + <ACB + <ABC = <DBE + <CBD + <ABC =180 degrés.

Figure 1: Preuve avec heuristique (inspirée de Clairault, dans Barbin, 1989)

Selon la fonction que l'on veut faire jouer à la preuve, le contenu même de celle-ci peut changer. Hanna (1989) distinguant les preuves qui prouvent des preuves qui expliquent, donne un exemple de chacune (figure 2a). La première preuve prouve que l'énoncé est vrai en appliquant correctement une méthode, la démonstration par induction, mais ne se préoccupe pas du contenu particulier de la série dont il est question. Hanna dira alors qu'elle prouve sans expliquer. La seconde preuve donne un éclairage différent à l'énoncé; elle montre qu'il est vrai en s'appuyant sur le contenu de la série S et en faisant un lien entre le contenu de la série et la somme. Hanna attribue à cette preuve une fonction explicative. Nous dirons qu'une preuve peut avoir une valeur plus explicative qu'une autre selon l'éclairage que l'on veut donner à un énoncé et selon la population à qui on s'adresse.

**Énoncé:** La somme des n premiers nombres entiers positifs $S(n)$ est $n(n+1)/2$.

**Preuve 1:**

Pour $n=1$, le théorème est vrai.

Supposons qu'il est vrai pour un k quelconque.

Alors

$S(k+1) = S(k) + (k+1)$

$= n(n+1) / 2 + (n+1)$

$= (n+1)(n+2) / 2$

Donc l'énoncé est vrai pour $k+1$ s'il est vrai pour k.

Par le théorème d'induction, l'énoncé est vrai pour tout n.

**Preuve 2:**

$S = 1 \quad + \quad 2 \quad + \ldots + n$

$S = n \quad + (n-1) + \ldots + 1$

$2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$

$S = n(n+1) / 2$

C.Q.F.D.

Hanna (1995), p. 48.

**Figure 2a:** Somme des n premiers nombres naturels: (1) preuve qui prouve et (2) preuve qui explique

En donnant les exemples des figures 1 et 2a, nous nous sommes écartée de la démonstration des logiciens. En effet, soit que les objets ne sont pas tous clairement définis, soit que les propriétés utilisées ne sont pas complètement explicitées, ou encore que les énoncés tiers sont absents. Dans la pratique, la présentation de la démonstration tolère une certaine flexibilité en acceptant un certain nombre d'implicites et gagne ainsi en intelligibilité (MacKernan, 1996; Balacheff, 1988; Schoenfeld, 1988; Arsac, 1988). Même chez les mathématiciens, ce sont des critères de simplicité et d'élégance qui primeront souvent sur ceux du formalisme (Dreyfus & Eisenberg, 1986; Vollrath, 1994). Ainsi, dans la famille élargie des démonstrations, on trouve des degrés différents d'explicitation et de symbolisation, peut-être même des degrés de contextualisation avec un recours à un vocabulaire qui se rapproche du langage quotidien comme nous le retrouvons dans la preuve de Clairault. Mais à partir de quand une preuve arrête-t-elle d'être démonstration? À partir de quand un argument devient-il une preuve? En d'autres mots, en mathématiques "preuve" est-il égal à "démonstration"? Dans la figure 2b, ci-dessous, l'illustration contient implicitement toute l'argumentation de la preuve 2, de la figure 2a, et plus, car elle éclaire sur les totaux (n+1).

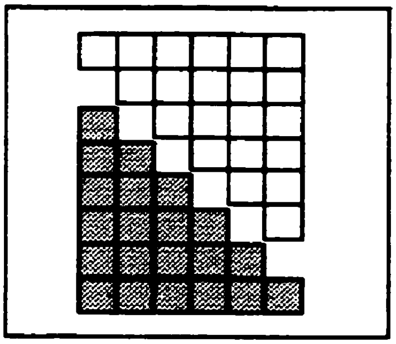


**Figure 2b:** Illustration de la preuve 2, figure 2a

Cette illustration ne peut à elle seule être démonstration, mais est-elle preuve? Nous pensons que la question posée ainsi est sans intérêt pour l'instant car on ne peut juger d'un argument que s'il sert la fonction pour laquelle il est conçu. C'est dans cette perspective que nous poursuivrons l'étude de la preuve. Dans les sections qui suivent, nous nous pencherons donc plus attentivement sur les différents sens et fonctions de la preuve.

### 2.1.2 Niveaux de preuve

La preuve mathématique n'a pas toujours été celle qu'on connaît. Selon Lakatos (1976, 1984) et Balacheff (dans la préface de la version française de *Preuves et réfutations*, 1984), considérer la démonstration (formelle) comme étant LA preuve, témoignant de LA rigueur, c'est lui nier son histoire.

L'histoire nous renseigne sur les circonstances et les nécessités qui ont contribué à l'évolution des méthodes de preuve, notamment en géométrie. Ainsi Rouche (1989) distingue au moins trois niveaux de preuve dans l'évolution qui mène à la rigueur formelle des mathématiques formalisées d'aujourd'hui: "l'induction", on conclut par évidence, "la pensée discursive", une suite d'opérations intermédiaires mène à la conclusion; "l'hypothético-déductif", où les objets sont construits, l'hypothèse est distinguée de la conclusion, les opérations permises bien définies.[6] Le passage d'un niveau à l'autre ne s'est pas effectué d'un seul coup. En référence à Rouche (id.), nous identifions à travers ces changements de la preuve les passages importants suivants: 1) le passage de la résolution locale d'un problème à sa résolution générale pour un ensemble de cas possibles; 2) le passage d'une généralisation par évidence (niveau 1) à une généralisation à l'aide d'une suite d'opérations intermédiaires, suite d'évidences partielles, où un discours devient nécessaire (niveau 2); 3) le passage de preuves qui s'appuient sur les propriétés (générales) d'une figure représentative d'une classe d'objets à des preuves qui s'appuient sur des objets abstraits, construits pour les besoins de la preuve (niveau 3); ce passage s'accompagne éventuellement 4) du passage d'un discours en mots à un discours symbolisé et finalement 5) le passage de preuves qui veulent convaincre d'une vérité (unique) à des preuves où ce qui importe est la validité des inférences.

Le passage d'un niveau à l'autre constitue d'impressionnants changements[7]. C'est d'abord le passage du particulier au général. Puis, l'évidence faisant défaut, c'est la raison qui prend la relève; on en vient à se convaincre par une suite d'évidences partielles. La raison finira par occuper toute la place. N'arrivant plus à utiliser ses sens parce qu'on se bute à des contradictions, on est obligé de changer de référent; le monde des mathématiques devient un monde d'objets construits (avec recours éventuellement à un symbolisme arbitraire). Rouche (id.) identifie là un seuil épistémologique en ceci que le référent des objets est changé. C'est le passage à la démonstration qui s'est effectué, passage caractérisé donc par un éloignement du réel perçu pour travailler sur des objets construits.

Arsac (1987) situe l'origine de la démonstration chez les Grecs du 5e siècle avant Jésus-Christ. Il propose une thèse selon laquelle la démonstration est née en géométrie de la conjonction de deux besoins: d'une part, celui de résoudre un problème (celui de l'irrationalité) avec la constatation de l'échec des moyens jusqu'alors utilisés (échec de l'expérience) et, d'autre part, celui du partage public qui va de pair avec la naissance de la démocratie. En renonçant à s'appuyer sur ses sens pour définir les objets d'études et valider les assertions, on ne pouvait que les définir en précisant les

---

[6] Bien que son analyse ne se fasse qu'à partir de la géométrie, c'est la façon de concevoir les mathématiques même qui se trouve changée.

[7]Les passages ne se sont pas faits de façon linéaire. Voici une citation de Platon tirée de Guichard (1989): "*Quand on... demande, à propos d'une surface, par exemple, si tel triangle peut s'inscrire dans tel cercle, un géomètre répondra: "je ne sais encore si cette surface s'y prête; mais je crois à propos pour le déterminer de raisonner par l'hypothèse de la manière suivante: si telles conditions se présentent, le résultat sera ceci et dans telle autre condition il sera cela. Ainsi est-ce par hypothèse que je puis te dire ce qui arrivera pour l'inscription du triangle dans le cercle, si elle sera possible ou non.*"

règles de manipulation auxquelles ils sont soumis. La seule méthode de validation objective devient alors celle qui consiste à s'appuyer sur ces règles et à opérer par déduction. De plus, dans ce cadre abstrait s'impose la nécessité d'expliciter complètement les hypothèses et propositions sur lesquelles on s'appuie. Dans un cadre qui fait appel à l'expérience, de nombreuses données peuvent être implicites. Par ailleurs, les preuves pré-démonstratives, qui contiennent une part d'implicites, ne peuvent être partagées que par une communauté restreinte. La "démocratisation" des mathématiques nécessite une **explicitation** complète des preuves. Les mathématiques en sont transformées: on a désormais un moyen de validation unique reconnu, toutes les assertions doivent être démontrées, il y a des démonstrations partout.

En dernière étape (Rouche, id.), la validation elle-même va changer de sens: un énoncé n'est plus vrai en soi mais vrai étant données les prémisses et axiomes de base. Chez les Grecs, même si la nouvelle méthode qui s'élabore consiste à fonctionner par hypothèses, celles-ci sont considérées comme des vérités absolues. Dans la preuve par l'absurde, l'enjeu est le rejet de l'énoncé postulé qui contredit les hypothèses. Ainsi, Euclide utilise une preuve par l'absurde, pour démontrer que deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent des angles alternes-internes égaux. Postulant que les angles alternes-internes ne sont pas égaux, il démontre qu'alors les droites ne peuvent être parallèles selon le 5$^{e}$ postulat (Wolff[8],p. 80). Mais arrive un temps où les hypothèses mêmes sont ébranlées. Sur la base du rejet de ce 5$^{e}$ postulat justement, d'autres géométries seront élaborées. De l'avènement des géométries non-euclidiennes résultera un changement de cap important: on ne se préoccupera plus de la vérité d'un énoncé, dans l'absolu, qui continuait malgré la construction d'objets mathématiques à expliquer notre monde, mais de la validité des inférences étant donnés les hypothèses, axiomes, définitions, théorèmes connus. Peu importe si l'hypothèse est vraie, mais si elle l'est, alors on peut en déduire la conclusion: "*les mathématiques ne renvoient plus à un monde physique univoque, mais à des mondes imaginables, cohérents et contradictoires, dont l'un est peut-être réel.*" (Rouche, 1989, p. 34) On arrive à la rigueur "hilbertienne" ou formelle dont nous avons parlé auparavant.

Soulignons que l'éloignement du réel s'est accompagné d'une *dévisualisation* ou d'une *déspatialisation* de la géométrie. Davis (1993) fait son histoire, depuis le début du XIXe siècle. Il identifie comme moments clés, l'algébrisation de la géométrie par Descartes, l'introduction par la géométrie projective de deux idées sans équivalents visuels (objets situés à l'infini et géométries complexes) et l'avènement des géométries

---

[8]Nous ne connaissons pas l'année de publication de l'ouvrage.

non-euclidiennes. Enfin, à la fin du $XIX^e$ siècle, la géométrie est déclarée indépendante de la réalité physique. Avec les possibilités de l'ordinateur toutefois, le visuel reprend des forces mais non sans controverse. Ce nouvel outil permettra des "preuves" qui heurtent la rigueur mathématique contemporaine (Hanna, 1989; Krantz, 1994).

L'épistémologie des mathématiques révèle donc des niveaux selon qu'on est plus ou moins près de la rigueur formelle du XXe siècle, mais aussi selon qu'on est plus ou moins éloigné du monde réel. Par ailleurs, l'analyse révèle que ces niveaux s'accompagnent de changements de signification de la vérité et les changements sont le résultat de nouveaux besoins, liés à de nouveaux problèmes.

### 2.1.3 Fonctions de la preuve

À travers l'histoire, le sens de la preuve change et sa fonction aussi. C'est ce que montre Barbin (1989) en reprenant trois preuves d'un théorème connu: "la somme des angles d'un triangle égale deux droits". Elle fait l'analyse de l'élaboration de ces preuves en la situant dans le processus de construction d'un certain savoir (ici le concept d'angle). Les trois preuves sont celles d'Euclide, 3e siècle avant J.-C., de Clairaut, 1765, et d'Hilbert, 1899. (La preuve de Clairaut, reformulée brièvement, a été présentée en figure 1.) Elle conclut que dans *Les éléments* d'Euclide, *savoir c'est reconnaître le caractère absolu, universel et nécessaire d'une proposition* (id., p. 78); la pertinence du savoir étant de distinguer la science de l'opinion, le lecteur de la preuve sera convaincu étant donnée la méthode déductive utilisée. Toujours dans *Les éléments* d'Euclide, les connaissances seront donc organisées selon les règles de cette méthode. Dans les *Éléments de géométrie* de Clairaut, *Savoir c'est aussi savoir comment on fait; c'est-à-dire que le savoir implique le processus par lequel on sait* (p. 78), si bien que le lecteur de la preuve apprend comment on a résolu un problème qui a mené à s'interroger sur la somme des angles d'un triangle. L'organisation du traité se fait autour d'une problématique et l'ordre des connaissances (des inventions pour résoudre le problème) est déterminé par celle-ci. Chez Hilbert, la preuve ne sert ni à convaincre comme chez Euclide, ni à éclairer comme chez Clairaut. Les objets mathématiques existent en soi à travers un système de relations. La preuve n'exprime plus l'ordre des choses et les conclusions sont relatives au système d'axiomes lui-même construit de façon formelle. Dans les *Fondements de la géométrie* d'Hilbert, la preuve appartient à une entreprise d'organisation en systèmes des propositions géométriques.

Nous pouvons voir dans l'analyse de Barbin (id.) que la preuve ne sert pas toujours les mêmes objectifs. En fait ses fonctions dépendent du **projet** qu'on cherche à réaliser et sont liées au processus de construction du concept auquel appartient la preuve.

L'essai de Lakatos (1984), *Preuves et réfutations*, est une illustration, nous semble-t-il de cette appartenance de la preuve à la construction du savoir. Cet essai dénonce une conception des mathématiques qui ne reconnaît de valeur qu'au formalisme et où, donc, on nie à toute activité mathématique ou presque le statut de vraies mathématiques, parce que toutes ces autres activités sont perlées d'erreurs. Ainsi, à la limite, on ne reconnaîtra le statut de preuve qu'aux preuves des logiciens. La méthode de Lakatos[9] est proposée en opposition à ce formalisme. Dans son essai, Lakatos simule un dialogue entre maître et étudiants, en copiant ou plutôt en mettant en parallèle (en notes en bas de page) les vicissitudes historiques de la démarche relative à la preuve en jeu. Il montre comment la preuve, les concepts en jeu et l'énoncé de départ, interagissent et s'ajustent. Dans cette recherche, la réfutation n'a pas pour rôle de rejeter une preuve, mais appartient au processus de la preuve. Une preuve si on la réfute, n'est réfutable que partiellement car l'analyse des énoncés qui fondaient cette preuve éclairera sur l'énoncé lui-même. Ainsi la démarche de preuve est créatrice d'un nouveau savoir. On a une conception des mathématiques ici qui reconnaît à l'erreur un rôle moteur en mathématiques. La preuve tolère des erreurs et ces erreurs sont fructueuses. La preuve n'est pas vue ici comme quelque chose de statique mais comme appartenant à un processus. La preuve de Lakatos n'est pas un produit fini mais en mouvement.

Ces textes nous amènent à distinguer d'abord cinq fonctions de la preuve ou de l'activité de preuve. De Villiers (1990) identifie semblablement les mêmes fonctions pour signifier ce pour quoi on entreprend de chercher une preuve et à quoi sert la preuve. Nous reprendrons ici chacune des fonctions en les explicitant.

### a. Statuer et systématiser

La preuve **sert à statuer** sur un énoncé de manière à intégrer le nouvel énoncé au répertoire des axiomes, postulats, définitions et théorèmes et ainsi **construire la**

---

[9]Notons que la démarche de Lakatos ne fait pas toujours l'unanimité. Pour Hanna (1995), elle ne peut s'appliquer à tous les domaines des mathématiques; elle apparaît liée au choix des problèmes pour lesquels l'application de cette méthode est adaptée, c'est à dire des domaines où il est facile de produire des contre-exemples, comme dans l'étude des polyèdres.

**théorie axiomatique**, comme chez Hilbert (Barbin, 1989) et à un autre niveau Euclide. Il ne s'agit pas de convaincre de la vérité d'un énoncé, ni de faire comprendre pourquoi un énoncé est vrai, étant données certaines prémisses, mais d'organiser la théorie.

**b. Expliquer, éclairer**

La preuve peut être entreprise pour **comprendre** ou **expliquer pourquoi un énoncé est vrai**, donner les raisons pour lesquelles *ça marche*. D'une part une démonstration peut servir à comprendre comment un énoncé qu'on sait vrai par une méthode quelconque (une représentation visuelle, par exemple) est relié à l'ensemble des autres résultats connus. D'autre part, une preuve qui vérifie la justesse d'un énoncé ne fait pas nécessairement comprendre. Balacheff (1988) montre bien comment une suite d'inférences logiques n'explique pas nécessairement en citant Cantor: "je le vois mais je ne le crois pas"[10]. On peut vouloir une preuve qui mette en lumière certaines relations qui éclairent sur le concept et sur l'énoncé même qu'on cherche à prouver (Hanna, 1989). Nous en avons donné un exemple avec la figure 2 (preuve 2).

**c. Convaincre**

La preuve sert à **convaincre, de la vérité** ou de la fausseté **d'un énoncé**. Souvent lorsque les mathématiciens cherchent une preuve, ils sont déjà convaincus de la justesse de l'énoncé mais il peut arriver que ce ne soit pas le cas. La méthode de la démonstration chez les Grecs aurait eu comme fonction de convaincre, les preuves pré-démonstratives s'étant avérées peu fiables (Barbin, 1989: Arsac, 1987). Par ailleurs, la conviction peut être personnelle ou limitée à un groupe d'initiés, dans tel cas, la preuve pourra chercher à convaincre un cercle plus grand.

**d. Produire des connaissances**

Nous reconnaissons aussi à la preuve la fonction de **produire des connaissances**. Par exemple, la construction de la relation d'Euler[11] dans les polyèdres, telle que la rapporte Lakatos (id.), illustre, en quelque sorte, cette fonction de la preuve. La preuve ne consiste pas tant à vérifier la justesse de l'assertion qu'à la construire. Toutes les preuves n'ont pas cette fonction. Souvent, les connaissances sont déjà là, fonctionnelles et la preuve vient plus tard pour différentes raisons (pour faire entrer un énoncé dans une axiomatique par exemple). C'est à cette fonction de la

[10]Balacheff, 1988, p. 28. La citation provient de Cavailles, 1962, p. 211.

[11]Pour tous polyèdres réguliers $S - A + F = 2$ où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombres de faces.

preuve, celle de produire des connaissances, que l'on se réfère, implicitement, pour valoriser les preuves expérimentales.

Les fonctions de la preuve peuvent être très différentes. Il en résulte des styles différents. Les débats sur la preuve qui existent aujourd'hui dans la communauté mathématique, pourraient peut-être s'expliquer du fait qu'on attribue à la preuve des fonctions différentes. Mais ces fonctions ne suffisent pas à elles seules à définir une preuve ou à caractériser l'activité menant à la preuve. On peut convaincre d'autorité, faire comprendre par analogie, découvrir par observation! Comment caractériser le projet de preuve, c'est ce que nous tenterons de faire maintenant.

**e. Communiquer**

Les quatre fonctions qui précèdent se doublent d'une autre: communiquer. Dans les congrès, séminaires, colloques et publications, des preuves sont présentées pour partager les nouveaux résultats et parfois même en débattre (cf. Krantz, 1994 versus Hogan, 1993). La rédaction de la preuve peut se faire en l'intégrant dans l'organisation privilégiée dans la communauté, celle par exemple de la théorie axiomatique à laquelle sont intégrés les nouveaux savoirs.

Mais comme nous l'avons vu chez Clairault (Barbin, 1989), cette organisation peut vouloir montrer comment les connaissances ont été construites en donnant les problèmes qui sont à l'origine de la preuve et la manière dont on les a résolus.

Cette fonction de la preuve est liée à la présence d'interlocuteurs; communiquer à la communauté mathématique un nouveau résultat, faire comprendre à d'autres, convaincre un plus grand groupe. Balacheff (1988) distingue explication, preuve et démonstration d'après le degré de reconnaissance de l'argument. C'est le statut qu'une communauté accorde à une explication qui détermine si on a affaire une simple explication, une preuve qui convainc ou permet de prendre une décision ou encore une démonstration. Bien sûr les critères de décision des interlocuteurs sont en jeu ici. On peut penser alors que le changement de statut s'accompagne d'ajustements, de précisions et de raffinement des critères de validation.[12] Chez les Grecs de l'Antiquité, la conviction venait de l'utilisation d'une méthode rigoureuse qui convainquait de la justesse des énoncés. Avant, d'autres méthodes étaient utilisées qui suffisaient à convaincre.

---

[12] Les distinctions que fait Balacheff renvoient à la question de l'adéquation entre les critères de validité d'un locuteur et d'un interlocuteur. Y a-t-il adéquation entre le statut qu'accorde le professeur de mathématiques à une validation (au sens large) et celui que lui accordent ses étudiants? On peut poser la même question pour les didacticiens versus les étudiants futurs maîtres. Qu'advient-il du statut d'une démonstration (respectant certaines règles bien fixées) lorqu'une classe ne l'admet pas comme preuve?

Notons en terminant une sixième fonction envisagée par de Villiers (1990): la preuve peut-être exécutée simplement par défi intellectuel. La réalisation de la preuve du théorème de Fermat par Andrew Wills en est certainement un exemple.

Nous avons utilisé le mot preuve, en voulant intégrer différents niveaux de preuve, mais nous aurions pu utiliser le mot démonstration. Les six fonctions (en comptant la dernière) tiendraient toujours bien que des nuances s'imposeraient .

### 2.1.4. Projet de preuve, recherche de nécessité

Nous adoptons immédiatement l'idée de **projet** de preuve empruntée à Margolinas (1989). Il s'agit d'un projet de validation qui consiste en une recherche de vérité par nécessité. Cette idée de projet de preuve nous a menée à considérer l'intention de preuve plutôt que l'aspect acceptabilité de la preuve. Ainsi, nous avons pu lire avec un éclairage particulier des textes divers et parfois contradictoires traitant de la preuve en mathématiques et les distinguer tout en les synthétisant. L'idée de projet implique, pour nous, une intention mais pas un accomplissement. Nous pouvons avoir le projet de prouver sans le réaliser. Dans la classe, on pourra distinguer le projet dans lequel l'élève s'engage de celui de l'enseignant qui a construit la leçon. De plus, comme le souligne Margolinas (id.), des productions d'élèves (ou d'enseignants ou même de mathématiciens) en apparence semblables, peuvent relever de projets différents.

On peut s'interroger sur la pertinence de définir la preuve en mathématiques d'après ses différentes fonctions. Nous utiliserons une distinction qui repose sur le vrai et le vraisemblable.

L'aspect vrai versus plausible, ou vraisemblable, est un critère discriminant souvent utilisé. C'est comme ça que Margolinas (1989) distingue projet de preuve et projet de vérification, que Legrand (1988) distingue rationalité mathématique et rationalité quotidienne et même scientifique et que Duval (1992-93) distingue démonstration et argumentation. Les premiers relèvent du vrai et les seconds du vraisemblable. Selon Margolinas (1989), ce qui caractérise les mathématiques, c'est la recherche d'une vérité par nécessité, par opposition à une vérité contingente, laquelle appartient davantage au domaine du vraisemblable. Le résultat, dans le cas du nécessaire, n'est pas accidentel mais lié aux propriétés des figures, des nombres, des situations impliqués, ceux-ci représentant l'ensemble des figures, nombres ou situations. En fait, à notre avis, chercher à distinguer le contingent du nécessaire n'appartient pas qu'à la démarche mathématique mais à toute démarche scientifique. Ce qui distingue les mathématiques des autres sciences, ce n'est pas tant le projet que la possibilité de déclarer (parfois) qu'effectivement une assertion est nécessairement vraie, étant données les prémisses, alors que dans la modélisation en sciences, le modèle ne peut être que déclaré plausible (Joshua et Joshua, 1987; Legrand, 1988). Ainsi, il apparaît essentiel de distinguer entre le projet de recherche d'une vérité par nécessité, les moyens qui sont disponibles et le résultat auquel aboutit la recherche. C'est dans ce sens que la rationalité mathématique pourra être considérée comme une référence dans la recherche du vrai, car c'est le seul endroit où s'applique la règle du tiers exclu, *critère absolu de vérité* (Legrand, 1988).[13] Ailleurs qu'en mathématiques, le fait qu'un seul exemple suffit à invalider ne s'applique pas et le principe de dichotomie (vrai ou faux, oui ou non) est presque toujours inutile (Legrand, id.).

Nous dirons comme Margolinas (id.), qu'il y a projet de preuve s'il y a recherche de vérité par nécessité. Nous dirons qu'il y a preuve, si nous pouvons décréter qu'un énoncé est vrai par nécessité, bien que les critères pour pouvoir le décréter puissent varier.

La preuve qui veut convaincre, convaincra de la nécessité du résultat. Lorsque la preuve arrive à statuer sur un énoncé de façon formelle, grâce aux règles d'inférences de la méthode déductive, le résultat est la conséquence nécessaire des hypothèses. On peut convaincre à l'aide de quelques exemples mais alors si le projet peut être de distinguer le nécessaire du contingent, il ne suffit pas à constituer une preuve. La preuve qui a la fonction d'expliquer montrera à quoi tient le résultat. L'explication ne constitue pas forcément une preuve mais si elle met en évidence les caractéristiques nécessaires à la conclusion, on pourra la considérer comme appartenant à un projet de preuve, voire même comme une preuve. Une image pourra alors être preuve, dans le sens défini, si elle contient tous les aspects qui permettent de voir pourquoi ce qui est en jeu est nécessairement vrai sans obligation qu'il y ait explicitation dans le discours de ces aspects. Dans l'exemple de la figure 2b, donné plus tôt, l'argument est preuve dans la mesure où on voit que le résultat n'est pas le fruit du hasard: les sommes du premier et du dernier terme, du deuxième et de l'avant-dernier et ainsi de suite sont équivalentes puisque ajouter 1 et enlever 1 s'annulent. L'argument est preuve pour le

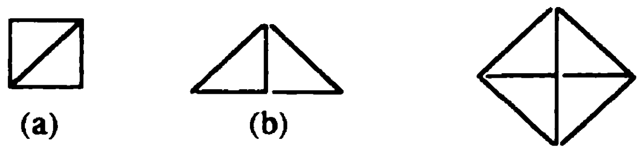
---

[13] *"Contrairement au critère de validité communément adopté dans le traitement rationnel de la plupart des autres domaines de réalité, ainsi la règle intransigeante "un contre-exemple suffit pour invalider une proposition " est idoine à ce domaine totalement modélisé. C'est cette règle qui détermine le sens des énoncés mathématiques, c'est elle qui fonde le vrai et le faux dans cette science; c'est par cette règle draconnienne que les mathématiques acquièrent ce caractère d'universalité qui fonde leur intervention et l'usage qui en est fait dans toutes les autres sciences. "* Legrand, 1988, p. 376.

*groupe d'initiés qui voit* la nécessité dans l'évidence visuelle. Convaincre et faire comprendre un plus grand groupe pourra alors se traduire en explicitation des propriétés implicites en jeu.

La nécessité peut résulter d'une logique démonstrative (un énoncé est déclaré vrai étant donnée la suite qui permet de connecter la conclusion aux prémisses). L'énoncé démontré est alors conséquence nécessaire de propositions déjà démontrées. Elle peut aussi tenir d'une évidence visuelle, comme c'est le cas dans l'exemple de la figure 3, où la preuve reste visuelle bien qu'un discours l'accompagne. Elle consiste en un enchaînement d'évidences (visuelles) partielles, où l'argumentation continue de rester près du sens concret, de s'appuyer sur une figure, et de recourir au langage courant.

Proposition: Pour construire un carré d'aire double d'un carré donné, il suffit de prendre pour côté du carré à construire la diagonale du carré donné.
Preuve: En effet, soit le carré de la figure (a). Sa diagonale le divise en deux triangles isométriques que l'on peut réarranger pour en faire un demi-carré, comme à la figure (b). D'où la solution présentée à la figure (c).



(a) (b) (c)

Extrait de Rouche, 1989, p. 20.

**Figure 3:** Preuve visuelle en étapes (Rouche, 1989)

Les étapes du raisonnement sur la figure ou les figures qui assurent du fait que le résultat ne soit pas fortuit peuvent être plus ou moins explicitées. C'est dans le passage de ces arguments visuels qui fondent la preuve à une argumentation rationnelle indépendante du visuel que se fait le passage à la démonstration (Rouche, 1989, Lelouard, Mira, Nicolle, 1989).

En mathématiques, l'induction a une part importante en particulier pour la construction des connaissances et ce même lorsque que l'on veut produire une preuve. Nous en avons des exemples dans les preuves visuelles données plus tôt (figure 2b et figure 3). Il faut s'assurer d'avoir envisagé tous les cas possibles, mais point n'est besoin de les illustrer tous. C'est par la pensée qu'on peut imaginer tous les cas possibles et avoir l'assurance que tous les cas sont considérés. Aussi, la démonstration (méthode déductive) s'appuie d'une certaine manière sur cette induction réalisée par la pensée, tout au moins avant que cette méthode ne soit complètement formalisée: "*La démonstration mathématique déborde largement le cas particulier de telle ou telle figure. C'est pourquoi elle n'est pas seulement une déduction, mais aussi une induction; elle permet d'établir des connaissances nouvelles et de procéder à des inductions amplifiantes, (...)*" (Lelouard, Mira et Nicolle, 1989, p. 163).[14]

Nous voyons la preuve comme un échafaudage d'arguments (qui peuvent être visuels), d'une manière propre à fonder la généralité d'un résultat. Même avec une part d'induction, elle n'est pas qu'extrapolations à partir de cas particuliers. Ceci nous mène à considérer la place de l'expérimentation dans le projet de recherche d'une vérité par nécessité.

### 2.1.5 Le rapport à l'expérimental

Lorsqu'en mathématiques, on envisage un recours à l'expérimentation, quelle place y trouve la preuve et même quelle sorte de preuve peut être invoquée et quel rapport la preuve peut-elle entretenir avec cet expérimental et avec le savoir? Cette question est particulièrement importante puisque le programme d'étude encourage, entre autres, une démarche inductive, et que la présence de plus en plus grande de l'ordinateur à l'école facilite grandement l'expérimentation.

**Distinguer le nécessaire dans le contingent** appartient à la démarche scientifique. Cet objectif rejoint celui du projet de preuve tel que nous l'avons caractérisé précédemment. Les sciences comme la physique, dite d'ailleurs expérimentale, cherchent à expliquer le monde. Un phénomène est observé et on cherche à l'expliquer à l'aide d'une théorie. La validation pourra s'appuyer ici sur la répétition des événements dans des circonstances identifiées. Le projet de distinguer le nécessaire du contingent est aussi celui de chercheurs dans des domaines comme les sciences humaines ou psychologiques. C'est par cette voie que Brousseau (1996) veut faire accéder la didactique au statut de science: un modèle est construit, des variables sont identifiées et mises à l'épreuve. Si on ne peut, dans ces cas, conclure au bout du compte qu'une théorie est vraie, on pourra tout au moins dire qu'elle est plausible ou

[14]Ces auteurs donnent à démonstration le même sens que nous lui donnons.

vraisemblable.

Joshua et Joshua (1987) définissent la modélisation en physique comme la construction d'une représentation (le modèle) d'une situation réelle où la validation du modèle consiste alors à comparer les valeurs calculées dans le modèle théorique et celles mesurées par l'expérience. La production du modèle se ferait grâce à un va-et-vient entre modèle et réalité. Nous schématisons la démarche scientifique (figure 4) ainsi: un phénomène est observé, des causes sont identifiées pour expliquer le phénomène, un modèle est produit; des déductions et des calculs permettent de trouver des résultats qui consistent en anticipation dans le modèle. La validation consistera à vérifier qu'effectivement ces causes produisent les effets escomptés. Deux types de validation sont alors utilisés: une validation de type démonstration à l'intérieur du modèle et une validation de type comparaison, à l'extérieur du modèle (Legrand, 1988). C'est ce deuxième type de validation qui fait le lien entre le domaine expérimental et le domaine théorique.

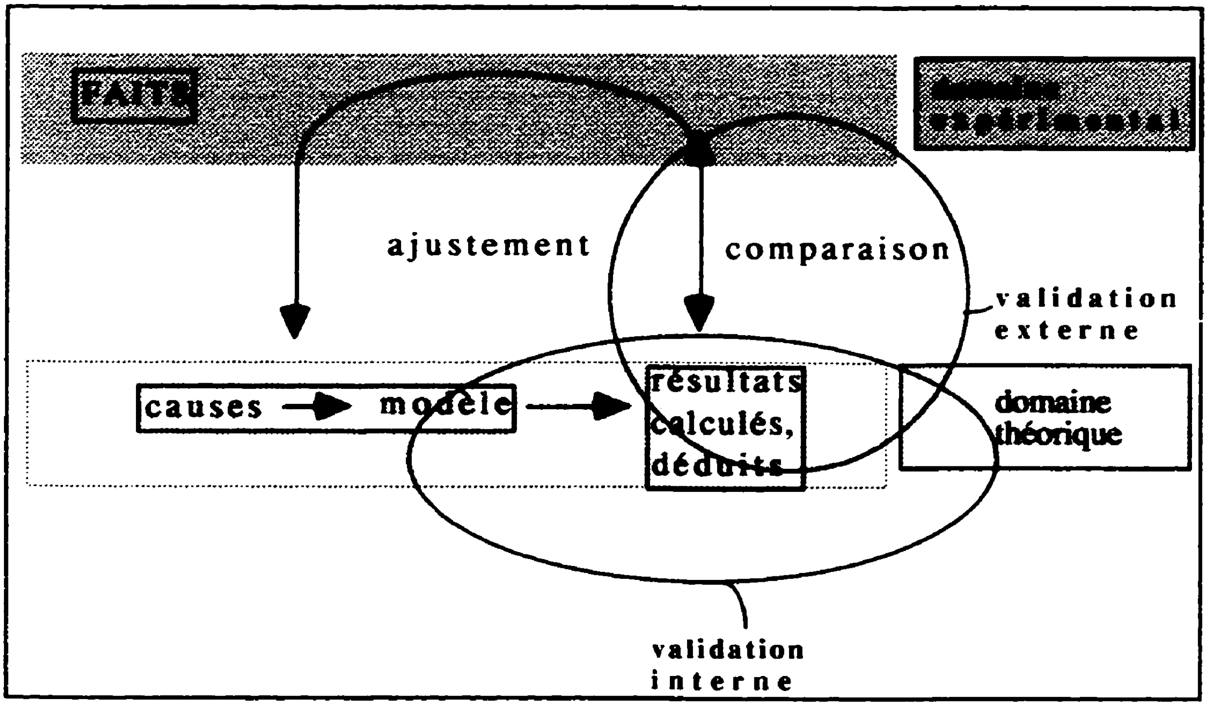



**Figure 4: Schéma de la validation dans la démarche scientifique**

En mathématiques, nous retrouvons un type de démarche qui s'apparente à celle utilisée en sciences. Elle consiste alors à mettre en défaut des conjectures ou à les préciser. Joshua et Joshua (1987) soulignent que la modélisation en mathématiques apparaît dans Lakatos (1984) et Balacheff (1984) très proche de celle en physique, le mécanisme de la preuve y étant décrit aussi par un aller-retour entre théorie et expérience. L'expérience peut ici se comprendre comme se rapportant à des objets déjà mathématisés, par exemple les nombres rationnels. Ce qui peut contribuer à falsifier le modèle en physique c'est la réalité, s'il s'avérait par exemple qu'une anticipation selon le modèle (déduite à l'intérieur du modèle) ne trouve pas confirmation dans la réalité. La falsification du modèle en mathématiques proviendra elle, s'il y a lieu, du domaine mathématisé d'où provient l'expérience.[15] Ainsi, lors de la production de formules et de règles mathématiques, par exemple, intervient une validation qui se rapproche de celles des sciences expérimentales, au moment où est produit le modèle. Le deuxième schéma, présenté ci-dessous (figure 5), montre, en parallèle avec le schéma précédent, les endroits où l'expérimental peut intervenir.

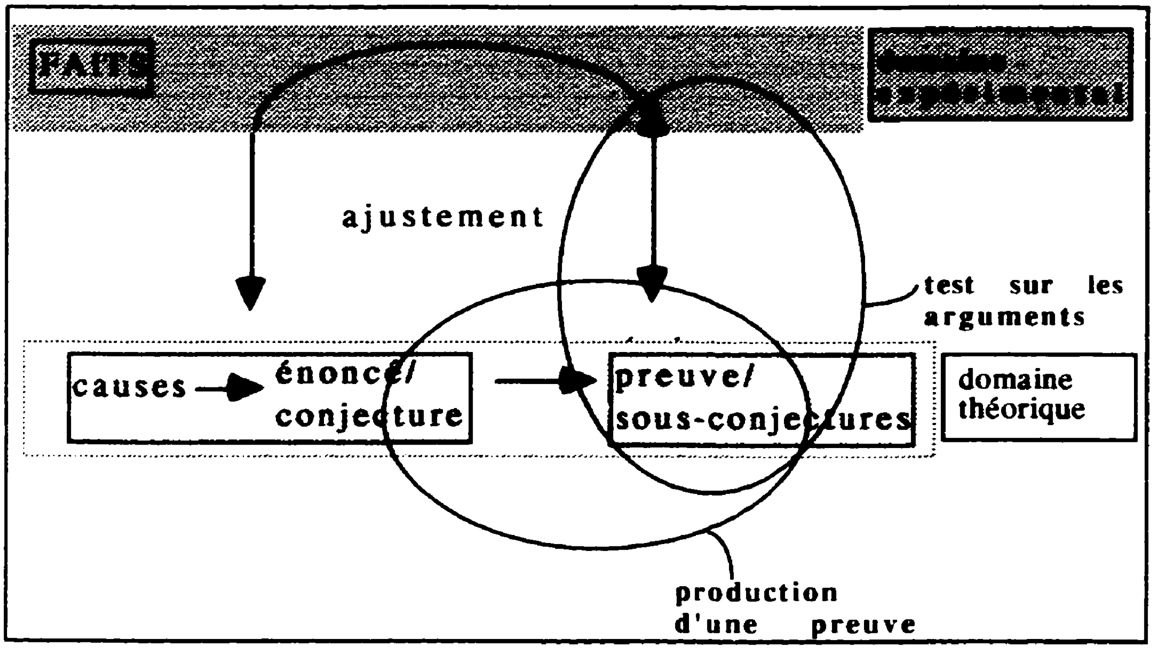



Figure 5: Schéma de la validation avec point de départ expérimental en mathématiques

Par exemple, dans l'essai de Lakatos (1984), à partir d'expérimentation sur des polyèdres, une formule est postulée; cherchant à identifier les raisons qui pourraient faire que la formule est nécessairement valide, une preuve est engagée, décomposant la conjecture primitive en sous-conjectures; la preuve est discutée; des contre-exemples provenant du domaine expérimental (les polyèdres) mènent à réviser la preuve et l'énoncé lui-même.

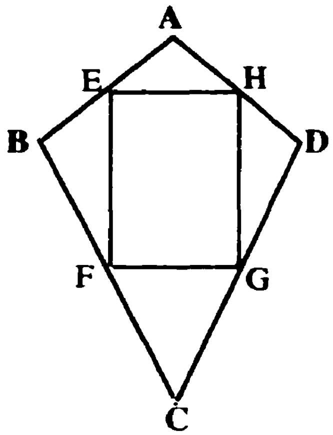
Dans la modélisation en sciences, un seul exemple ne suffira pas nécessairement

[15] Sur ces aspects, cf. Balacheff, dans sa préface à la version française de Lakatos, 1985.

à invalider la théorie qui de toute façon n'est jamais déclarée "vraie". En mathématiques, toutefois, il faudra en arriver à un moment donné à la conclusion qu'aucun contre-exemple n'existe.

C'est dans cette perspective que nous allons situer ces nouvelles preuves qui apparaissent avec les possibilités de l'ordinateur, preuves qui sont au coeur du débat sur la preuve dans la communauté mathématique (Hanna, 1995; Krantz, 1994). Plusieurs types de "preuve" sont en cause, nous discuterons de quelques uns.

Le mouvement, grâce au film ou à l'ordinateur, a permis d'augmenter les possibilités de preuves visuelles. Nicolet (1965, p. 49) identifiait ses animations sur film à une démonstration: "*Une démonstration n'est rien d'autre qu'une vérification. C'est une vérification faite non pas sur quelques exemples mais sur tous, même s'ils sont en nombre infini.*" Dans les exemples de preuves visuelles données précédemment (figure 2b et 3), c'est par la pensée qu'on pouvait avoir l'assurance que tous les cas avaient été considérés mais avec l'ordinateur nous pouvons les voir. Ainsi, nous pouvons imaginer pouvoir vérifier pour un ensemble infini de quadrilatères en forme de cerf-volant (figure ci-dessous, de Villiers 1990) que les points milieux des côtés du quadrilatère détermine un rectangle.




Acceptons que ce que nous voyons est bien un rectangle. La vérification sur tous les cas possibles, présentés devant nos yeux, pourra nous convaincre du résultat bien que nous échappent les raisons de cette généralité ou comment le résultat est relié logiquement à d'autres résultats connus. Nous verrons que le résultat n'est pas contingent mais sans pouvoir déterminer à quoi tient sa nécessité. Le projet est alors fort différent de celui consistant à déterminer les raisons qui rendent le résultat nécessaire.

Un autre type de preuve visuelle est illustré par Davis (1993) qui définit la notion de "théorème visuel". Au sens large, il inclut dans les "théorèmes visuels", tous les résultats de géométrie élémentaire qui correspondent à une évidence intuitive, tous les théorèmes de calcul ou de mathématiques avancées qui ont une base visuelle ou géométrique intuitive (exemples des figures 2b et 3), toutes les productions graphiques desquelles on peut déduire des résultats de mathématiques pures ou appliquées, par inspection. Mais selon sa définition, plus restrictive, un théorème visuel est une disposition graphique ou un programme informatique qui permettent de constater des résultats qu'on ne pourrait obtenir par notre propre raisonnement déductif ou autrement qu'avec un ordinateur. Il donne en exemple un ensemble de points définis par une itération, une preuve consistant à faire tourner un programme et un théorème qui est la paire itération-image visuelle.

Mais comment s'assure-t-on qu'il s'agit d'un résultat nécessaire et non contingent. Sur quelles propriétés repose le résultat? Balacheff (1998) a donné des exemples particulièrement percutant de production visuelle par ordinateur qui ne sont pas le résultat des propriétés mathématiques des objets étudiés mais plutôt l'effet uniquement de la complexité intrinsèque des dispositifs matériels et logiciels que nous utilisons. Par exemple, la représentation d'un fractale donnait toutes les raisons de croire que l'ensemble était non connexe alors qu'une preuve algébrique à permis de montrer sa connexité. La difficulté de contrôler tous les aspects des programmes et d'accéder aux arguments qui ont donné lieu au choix du programme. Dans le débat sur les preuves par ordinateur, la non-accessibilité aux arguments et l'impossibilité d'en juger font obstacle à leur reconnaissance comme preuves par une grande partie de la communauté mathématique (Hanna, 1995).

L'expérimentation par l'ordinateur permet d'augmenter les capacités de résolution de problèmes et de production d'évidences (Laborde, 1992). L'expérimentation sur un nombre presque infini de cas avec l'ordinateur rend moins nécessaire le recours à des preuves où la raison fait tout le travail, comme dans la démonstration, ou une partie du travail. Si la preuve n'a comme seule fonction que de vérifier qu'un énoncé est vrai alors il se peut que nous n'ayons pas besoin d'autres moyens qu'un ordinateur qui reproduit tous les cas possibles, encore faut-il en être sûr et encore faut-il contrôler les arguments de validation et les distorsions qui pourraient venir de la machinerie! Toutefois si la preuve a d'autres fonctions alors il faut dépasser le simple constat même s'il se fait sur l'ensemble des cas possibles.

Si les arguments visuels ne constituent pas encore une preuve, ils peuvent s'intégrer à une démarche de preuve où une dialectique entre expérience et théorie pourra conduire à déterminer qu'un résultat n'est pas contingent. Dans la classe de mathématiques, la rigueur consistera alors à soulever des questions. À quoi est dû le résultat? Est-ce toujours le cas? Pourquoi est-ce toujours le cas? Le projet de preuve même incomplet suppose qu'on se penche sur des questions de la généralité et de la nécessité du résultat et sur la question de l'acceptabilité des arguments.

Les fonctions de la preuve que nous avons identifiées préalablement ainsi que la caractérisation du projet de preuve en termes de recherche de nécessité, nous serviront dans notre analyse à distinguer une validation de type preuve d'une autre validation possible, dans la classe et dans les manuels, et à caractériser cette validation selon sa fonction. La validation qui nous intéresse tout particulièrement, est celle où on a la recherche d'une nécessité. Mais comme en mathématiques, cette recherche n'a pas toujours été soumise au même critère de rigueur, nous envisageons aussi différents niveaux de rigueur dans la classe. Dans la section qui suit nous faisons le point sur la preuve dans l'enseignement des mathématiques.

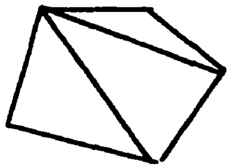
## 2.2 Le point sur la validation-preuve dans l'enseignement des mathématiques

### 2.2.1 Niveaux de preuve chez les élèves

Nous avons déjà identifié des niveaux de rigueur dans la preuve mathématique en référence à Rouche (1989). Cette rigueur est conditionnée par des besoins de résolution de problèmes et les moyens dont on dispose. Ces niveaux peuvent se caractériser par leur plus ou moins grande proximité avec la rigueur formelle ou leur plus ou moins grand éloignement du sens concret, de la perception et de l'action. Nous pourrions dire aussi que ces niveaux sont caractérisés par une évidence différente en degré et en qualité: une évidence plus ou moins immédiate, c'est-à-dire accessible par un nombre d'étapes plus ou moins grand, et une plus ou moins grande évidence visuelle ou rationnelle, l'évidence bien sûr n'étant pas la même pour tous.

Balacheff (1987, 1988) s'est intéressé aux arguments utilisés par des élèves du secondaire, placés devant une situation de résolution de problèmes. La situation était telle que les élèves pouvaient entrer dans un processus de validation (raisonnement qui a comme objectif de valider). Notre propos n'est pas de faire le tour des recherches sur les conceptions des élèves quant à la preuve, mais la recherche de Balacheff (id.) identifie aussi des niveaux et des ruptures, qui enrichissent notre grille d'analyse. Il considère deux grandes classes d'arguments: les **pragmatiques** et les **intellectuels**.

Les arguments pragmatiques consistent en action réelle sur les objets; le moyen privilégié est l'ostension. À ce niveau, les opérations effectuées et les concepts en jeu ne sont pas différenciés, ils ne sont pas articulés en discours.[16] Parmi ces preuves pragmatiques, nous trouvons dans l'ordre, selon des niveaux, la **vérification** de la validité d'un énoncé sur **quelques cas**, l'**expérience cruciale** ou la vérification sur un exemple le moins particulier possible (un grand nombre décimal négatif, par exemple) et l'**exemple générique**, cas particulier utilisé non pour lui-même mais pour fonder une procédure. L'examen du polygone ci-dessous peut nous assurer qu'en traçant les diagonales à partir d'un seul sommet, on pourra découper efficacement n'importe quel polygone convexe en triangles, de manière à pouvoir calculer la somme des angles intérieurs du polygone.



Toutefois, une action intériorisée et une explicitation des propriétés peuvent le faire passer dans la catégorie des preuves intellectuelles.[17] Ce n'est plus nécessaire de tracer effectivement les diagonales pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone, à partir du moment où on a constaté que pour chaque côté du polygone, un triangle est formé sauf pour deux côtés qui servent à former les triangles "extérieurs". Si l'argumentation repose sur les propriétés du polygone, avec appel à une action sans qu'elle soit nécessairement réalisée, nous avons affaire alors à ce que Balacheff (id.) appelle une **expérience mentale**.

Les arguments intellectuels arrivent quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale. Avec l'expérience mentale, il n'y a plus recours à une action réelle; il s'agit plutôt d'actions mentales sur un cas général.[18] Les arguments se

---

[16]"*Ces preuves reposent sur la capacité de celui qui observe la figure à reconstruire les raisons que le locuteur a implicitement à l'esprit et qu'il ne sait autrement expliciter.*" Balacheff, 1988, p. 44.

[17]"*L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une classe en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants.*" Balacheff, 1988, P.57.

[18]"*L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les*

détachent de l'action pour reposer sur la <u>formulation</u> des propriétés en jeu et de leurs relations. Pensons à un balayage du plan par une droite non réellement réalisé.[19] Les autres arguments de type intellectuel se résument en **calculs sur des énoncés**, incluant la démonstration. On a un calcul inférentiel qui s'appuie sur des définitions ou des propriétés explicites.[20] Ces arguments se différencient selon leur niveau de décontextualisation, de détemporalisation, de dépersonnalisation et de formalisme. Ainsi, les différents niveaux seront marqués par un plus ou moins grand recours à une référence au monde réel, plus ou moins grande présence notamment de mots d'action, plus ou moins grande présence d'un vocabulaire courant (ou de symbolisme). Balacheff rejoint ainsi l'analyse que fait Rouche (1989) d'après l'histoire.

Les deux premiers arguments pragmatiques, la vérification sur quelques cas et l'expérience cruciale, ne permettent pas de prouver l'énoncé dans le sens ou ces arguments ne montrent pas à quoi tient le résultat. Par contre, l'exemple générique et l'expérience cruciale, contiennent implicitement ou explicitement tout ce qu'il faut pour conclure à une vérité nécessaire. Choisir un exemple générique plutôt qu'un exemple particulier constitue sans doute un passage important. Il ne s'agit plus tant de montrer que ça marche mais d'établir que c'est nécessairement ça. Par ailleurs, le passage de l'exemple générique à l'expérience mentale demande d'intérioriser l'action et marque une étape vers la décontextualisation. Balacheff (1988) fait l'hypothèse d'une hiérarchie de ces niveaux de preuve selon une plus ou moins grande préoccupation de généralité et selon une plus ou moins grande conceptualisation des connaissances exigées. Il insiste sur le lien étroit entre moyen de preuve, connaissances et outils langagiers.

D'autres catégorisations peuvent être présentées. Pour leurs fins expérimentales, Martin et Harel (1989) distinguent arguments inductifs et arguments déductifs. Les catégorisations de Balacheff (id.) et Martin et Harel (id.) ne se superposent pas complètement. Une expérience mentale, classée parmi les preuves intellectuelles par Balacheff (id.), n'est pas un argument complètement déductif. De plus, la liste des types d'arguments identifiés par Balacheff (id.) n'est pas forcément

---

*relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en oeuvre, ce qui était le cas de l'exemple générique."* Balacheff, 1988, p.58.

[19]Dans le scénario adopté dans Preuves et réfutations, la première hypothèse est formulée à partir d'une expérience mentale: découpage des faces d'un polyèdre, triangulation, suppression des triangles un par un. Lakatos, 1985, p.10.

[20]*"Ce sont des constructions intellectuelles fondées sur des théories plus ou moins formalisées, plus ou moins explicitées, des notions en jeu dans la résolution du problème. Ces preuves apparaissent comme le résultat d'un calcul inférentiel sur des énoncés. Elles s'appuient sur des définitions, ou des propriétés caractéristiques explicites."* Balacheff, 1988, p. 143.

exhaustive; les problèmes de Balacheff (1982, 1987, 1988) portent sur des figures géométriques, il se peut que d'autres arguments apparaissent avec un autre domaine comme l'algèbre, par exemple.

Arsac (1993) identifie chez les élèves un type d'arguments non répertorié par Balacheff (1988). Les élèves doivent répondre à la question suivante:

> *Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs?*

L'argument d'un élève consiste à appliquer la règle ($n \times n - n + 11$) qui produit pour nombre premier (221) et à appliquer la règle une autre fois en modifiant un paramètre ($n \times n - n + 12$) pour produire un nombre qui n'est pas premier (222). Arsac (id.) identifie là un raisonnement consistant à rechercher les variables dont dépend le phénomène et attribue ce type de preuve à un effet de contrat didactique, les élèves cherchant les causes et non la validité de l'énoncé[21]. Nous pourrions y voir autre chose: Martin et Harel (id.) appellent cet argument "*example and nonexample*", argument consistant à vérifier que *ça marche* si les conditions énoncées sont respectées et qu'au contraire *ça ne marche pas* si les conditions ne sont pas respectées, sans plus. Il n'est pas toujours facile d'identifier dans quelle démarche les élèves se sont engagés comme il n'est pas toujours facile de repérer si le projet de l'élève en était vraiment un de preuve dans les problèmes de Balacheff (1988).

### 2.2.2 Fonctions de la preuve dans l'enseignement

Nous devrions pouvoir retrouver dans l'enseignement toutes les fonctions de la preuve que nous avons identifiées auparavant. Toutefois c'est la preuve-démonstration enseignée comme une méthode à suivre, qui paraît avoir été longtemps privilégiée au détriment des autres et ce un peu partout dans le monde. La fonction de cette preuve est mitigée. On vérifie que l'**énoncé est vrai** mais pas pour convaincre car l'élève sait déjà que l'énoncé est vrai. Elle permet de donner un statut officiel à l'énoncé pour pouvoir l'utiliser, mais les élèves l'utilisent déjà. Elle arrive après la connaissance, elle n'y participe pas. On peut penser qu'il s'agit de systématiser un ensemble de connaissances, mais comment alors entreprendre cette systématisation en même temps qu'on initie à une problématique de preuve. Résultat: la preuve perd de son sens. Elle

[21]Cette distinction entre chercher les causes et valider apparaît en particulier dans le schéma de la figure 5, § 2.1.4.

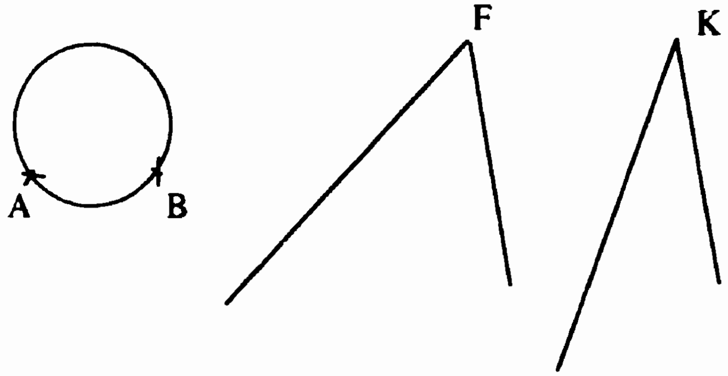
apparaît inutile. Elle finit par se traduire en exercices de pratique de la méthode, déconnectés d'une fonction de preuve, comme certaines recherches le signalent (Schoenfeld, 1988; Balacheff, 1988; Vollrath, 1994; MacKernan, 1996, Hoyles, 1996). Souvent, il en résulte une bataille entre l'enseignant et l'élève qui ne réussit pas à appliquer correctement la méthode. La preuve devient quelque chose de déplaisant (MacKernan,1996).

Suite aux observations réalisées chez les élèves du secondaire et les étudiants universitaires (preuve inutile, piètre performance à prouver formellement, faible intuition), de nombreux didacticiens ont remis en question cette fonction de la preuve. Certains comme MacKernan (id.) vont jusqu'à rejeter la preuve à l'école secondaire, précisons la *preuve des académiciens,* d'autant plus que les mathématiques elles-mêmes avancent bien plus par induction et intuition qu'à coup de preuves. Dans cette perspective, production de connaissances et preuve sont antagonistes! D'autres travaux au contraire tenteront de trouver des moyens d'améliorer l'enseignement de la preuve-démonstration à l'école comme le signale Arsac (1988) faisant le point sur les recherches en didactique sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France.

D'un autre côté, plusieurs chercheront à donner à la preuve une fonction pertinente et significative. Toutes ces tentatives reconnaîtront à la preuve une dimension sociale ou, tout au moins, reconnaîtront des effets bénéfiques à l'exploitation du contexte social de la classe lors d'activités de preuve en termes de motivation et d'implication de l'élève. Ainsi, plusieurs didacticiens vont utiliser la preuve dans la classe tout particulièrement pour **convaincre**. Des confrontations d'idées peuvent être organisées même au primaire. Pour Brousseau (1986, p. 141), "*L'usage de situations de preuve restaure un environnement socioculturel qui donne de l'épaisseur au discours mathématique.*" Les activités d'enseignement développées par Arsac (1993) utilisent aussi cette fonction de la preuve. Il place les élèves devant un problème à résoudre -et non d'un énoncé à valider - de manière à ce que les élèves s'engagent dans un processus de validation. Devant la tâche de convaincre leurs camarades de leur conclusion (oui ou non) les élèves sont amenés à raffiner leurs critères de validation et à dépasser donc l'expérience. Le problème mentionné plus tôt à propos de la formule $n \times n - n + 11$ est un exemple de problème qui devrait mener à la production d'une preuve. Avec ce problème, l'élève est confronté à un cas où plusieurs exemples ne suffisent pas à valider. D'autres problèmes (Arsac, id.) les confrontent à une image ou à des mesures qui sont trompeuses. Dans les *débats* *scientifiques* organisés par Legrand (1988), les élèves ont aussi à se convaincre de la vérité d'un énoncé, mais l'enjeu est différent: il faut ici déterminer si un énoncé est vrai et non résoudre un problème.

En voulant convaincre, les élèves sont amenés à **expliquer**. Les activités de classe peuvent cependant être construites spécifiquement pour que les élèves s'interrogent sur les propriétés qui causent un résultat comme dans l'exemple qui suit (figure 6).

Est-ce que ces angles peuvent être inscrits dans un cercle?




- Copie l'angle F sur un transparent.
- Pose le transparent sur le cercle de manière à ce que le sommet de l'angle soit sur le cercle et que les côtés de l'angle passent par les points A et B.

Est-ce la seule manière d'y arriver?

- Copie l'angle K sur un transparent.
- Pose le transparent sur le cercle de manière à ce que le sommet de l'angle soit sur le cercle et que les côtés de l'angle passent par les points A et B.

Est-ce la seule manière d'y arriver?

- Décris ce qui se passe.
-Explique ce qui se passe.

Traduit de Tommy Dreyfus (1996)[22]

**Figure 6:** Problème favorisant une preuve qui fait comprendre

Parmi les deux angles dessinés, l'un peut être inscrit dans le cercle et l'autre non. Comment expliquer ce fait? La preuve n'a pas pour fonction de montrer qu'un

[22]Cet exemple est tiré d'un cours donné par Tommy Dreyfus, Math 645, Université Concordia, automne 1996.

énoncé est vrai mais de montrer que l'angle qui passe par A et B ne peut s'inscrire dans le cercle que si sa mesure est la moitié de l'angle au centre AOB (O étant le centre du cercle).

Les difficultés relatives à la preuve formelle à l'école ont poussé aussi les programmes à s'ajuster. Avec le mouvement des mathématiques modernes, nous avons vu d'abord la géométrie euclidienne disparaître pour faire place à un plus grand formalisme. Puis devant l'échec de la réforme, les démonstrations ont disparu. Aujourd'hui, il semble que bon nombre de pays a entrepris le virage de la démarche expérimentale avec émission de conjectures et tests. C'est ce qui est annoncé dans le nouveau programme du secondaire au Québec. Au Royaume-Uni, ce virage a été entrepris il y a déjà plusieurs années, pour redonner à la preuve un rôle pertinent. Certains résultats laissent toutefois songeurs. (Hoyles, 1996).

### 2.2.3 Problématique de rigueur

L'enseignement de la démonstration est difficile. Dans les articles sur le sujet, les références historiques sont nombreuses. Pour ce thème peut-être plus qu'un autre, les auteurs sentent le besoin de replacer la preuve dans l'activité mathématique à travers l'histoire pour la redéfinir à travers ses différents aspects et pour redéfinir ses fonctions ou son rôle dans le développement des connaissances (Arsac, 1987; Barbin, 1989, Rouche, 1989, Balacheff, 1988). Ils en tirent des conclusions ou des leçons pour l'enseignement. Ainsi, certains penseront que l'élève doive passer par les mêmes étapes que l'histoire. En référant au développement historique, Rouche (1989, p.36) dit que:

> *"Prouver, démontrer ne sont pas choses bien définies, qui se laissent prendre dans une formule. Cela s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement (le plus souvent un accroissement) de l'univers du sens, mais encore par une modification du rapport au sens, du mode d'accès à l'ensemble des référents. Il est sans doute inopportun d'aborder n'importe quelle étape prématurément, c'est-à-dire sans que le sens et donc la motivation suivent, et peut-être plus encore de sauter des étapes. "*

Dans ce cas, l'étape formelle des mathématiques hilbertiennes peut être reportée au-delà du secondaire. La question du sens de la démonstration ou plus généralement de la preuve amènera des didacticiens à envisager ou à organiser des situations de classe de manière à recontextualiser l'apprentissage de la preuve; des problèmes sont donc proposés pour permettre une implication des élèves et donner du sens à l'activité de preuve (Arsac, 1993;) et à les faire progresser éventuellement à travers des niveaux de preuve (Balacheff, 1989).

Les conclusions des chercheurs sont nécessairement orientées par leur cadre théorique (Arsac, 1990). Les choix des chercheurs en didactique peuvent être liés à des considérations sur le développement des élèves en référence, ou non, avec l'évolution historique, mais l'analyse mène tout le temps à considérer une rupture dans le passage à la démonstration: rupture entre rationalité quotidienne et scientifique (Legrand, 1988), entre le fonctionnement d'une argumentation et celui d'une démonstration tant formellement (de forme) que cognitivement (Duval, 1992-93), entre une validation qui repose sur l'expérimental et une validation qui repose sur la démonstration (Joshua et Joshua, 1987, 1988). En bref, avec la démonstration, la validation ne se préoccupe plus de la même vérité qui est désormais régie par des règles qui ne sont plus celles du réel (Rouche, 1989; Arsac, 1987; Joshua et Joshua, 1987, 1988; Duval, 1992-93). On pourrait aussi ajouter des difficultés liées à une symbolisation et un vocabulaire à s'approprier.

Duval (id.) caractérise les énoncés de la démonstration versus ceux de l'argumentation d'après leur statut. Dans la démonstration, les propositions ont un statut officiel théorique, ils ont été déclarés vrais et ce n'est qu'à cette condition qu'on peut les utiliser. Leur valeur tient à la place qu'ils occupent dans l'organisation théorique. Dans l'argumentation, les énoncés ont une valeur qui découle de la compréhension du contenu. Étant donné, en particulier, ce statut différent des énoncés dans les deux modes de fonctionnement, Duval (id.) parle de "distance cognitive" entre le fonctionnement de la démonstration et celui d'une argumentation, d'une distance telle que le passage est presque impossible à faire en douceur.

> *"Pour passer d'un mode de fonctionnement à l'autre, une décentration à l'égard du contenu d'une part, et une prise de conscience de l'existence d'une autre valeur épistémique d'autre part, sont donc nécessaires."* (p.47)

Or, les programmes imposent un point de départ expérimental. Comment concilier ce point de départ avec l'approche déductiviste qui occupe une grande place en mathématiques? Joshua et Joshua (1987, 1988) font l'analyse de la place de l'expérimental dans la classe en France dans les termes qui suivent. Une tendance issue peut-être des années 70 (pédagogie de la découverte, abstraction qui s'appuie sur le concret...) mais encore actuelle, donne à l'enseignement des mathématiques un point de départ expérimental. Cependant, malgré cette tendance, la conception dominante dans l'enseignement des mathématiques continue de se placer du côté du déductivisme.[23] Ce qui guide les validations, c'est la référence à la démonstration: si les élèves sont trop jeunes, on se limitera à faire pratiquer des règles, à appliquer des algorithmes, puisqu'on n'envisage pas d'autres formes de validation que la démonstration. La *"vraie" mathématique"* c'est *"l'échafaudage démonstratif des structures."* L'expérimental est alors considéré comme accessoire, voire comme concession aux élèves n'étant pas prêts à faire des démonstrations (alors qu'en physique il a presque toute la place). La relation entre le milieu sur lequel porte l'expérimentation et le modèle est négligée.[24] Donc en bref, 1) la relation "expérimental × théorique" se fait dans un seul sens: de l'expérimental vers le théorique, puisque le point de départ est expérimental; quand les élèves seront initiés à la démonstration, le sens sera inversé. Plus, 2) même si on part de l'expérimental, la démonstration reste le paradigme. Joshua et Joshua (id.) qui identifient un changement de registre nécessaire dans le passage de l'expérimental à la démonstration, exposent clairement le problème fondamental dans l'enseignement des mathématiques. Comment concilier le statut particulier des mathématiques par rapport aux autres sciences (comme en parle Legrand, 1988), avec une préoccupation de partir du concret? Les auteurs envisagent deux options: ou bien on "joue" la rupture ou bien on tente de la minimiser. Dans le premier cas, si le point de départ est expérimental, celui-ci peut être cultivé pour lui-même sans relation avec le domaine théorique ou on tombe dans le scénario définitions-applications-définitions-applications. Dans le second cas, on peut chercher à utiliser d'autres niveaux de preuve que celui de la démonstration, comme on présente plusieurs modèles plausibles en physique, ou chercher des situations expérimentales qui donneront du sens à chacune des étapes de la démonstration.

Mais, comme le soulignent ces mêmes auteurs, accepter des niveaux de preuve c'est se questionner sur les mathématiques elles-mêmes! Au Royaume-Uni, une réforme, mise en place il y a déjà plusieurs années, privilégie une approche expérimentale. Cette réforme a remplacé une preuve démonstrative qui avait très peu de sens pour les élèves par une preuve menée par les élèves pour convaincre et expliquer.

---

[23]Nous ne pensons pas que cette conception soit aussi dominante au Québec.

[24] *"l'important n'est pas la relation entre le niveau inférieur - l'objet, l'expérience - et le niveau qui en rend compte - la structure - mais (...) au contraire, le primat est mis sur la démonstration au niveau le plus général par rapport à quoi l'étude de la structure, mathématisée mais de niveau inférieur, qui sert de domaine expérimental perd le plus souvent tout intérêt."* Joshua et Joshua, 1987, p. 235.
Nous proposons les deux exemples suivants pour illustrer les deux niveaux.
(1) Niveau inférieur: équations outil de résolution de problèmes; niveau supérieur: équivalence d'équations;
(2) Niveau inférieur: les rationnels, sur lesquels on peut expérimenter; niveau supérieur: propriétés des rationnels.

Dans le curriculum des niveaux d'atteintes des habiletés de preuve sont identifiés. Mais que comprennent les élèves de l'activité mathématique qu'ils vivent? Les résultats laissent perplexe. Hoyles (1996) rapporte que la London Mathematical Society, en 1995, passe un message clair: les étudiants qui arrivent du secondaire ont des lacunes qui n'existaient pas avant la réforme. Le résultat: les élèves pensent que faire des mathématiques c'est mesurer, estimer, induire de cas particuliers. Nous pensons, comme Hoyles (id.), que l'organisation du curriculum et son application en classe est à questionner. La recherche que mène cette auteure est d'envergure. Elle tente de découvrir justement les effets du curriculum au Royaume-Uni sur les habiletés de preuve des élèves afin de mieux les contrôler. L'objectif n'est certes pas de revenir en arrière.

Notre propos n'est pas de contester une approche des mathématiques qui valorise l'exploration et l'induction, bien au contraire. Mais nous pensons que le rôle de l'enseignant est de soulever dans la classe aussi souvent que possible le problème de la rigueur et ce, bien avant que les élèves soient introduits à la démonstration. Balacheff (1988) qui fait l'hypothèse d'une hiérarchisation du point de vue de la genèse d'une démonstration, s'interroge sur les moyens de provoquer une éventuelle évolution. Ses résultats d'expérimentation montrent que celle-ci n'est pas simple à réaliser. Il conclut (1987) que l'accession aux preuves intellectuelles exige une rationalité particulière, un état des connaissances spécifiques et une nouvelle problématique qui n'est plus celle de l'efficacité mais celle de la rigueur. Il adopte le point de vue selon lequel développer une problématique de rigueur prend du temps et qu'elle doit apparaître très tôt.

> "*L'exigence de preuves doit donc pouvoir trouver sa place dès les pratiques mathématiques des premières classes, en acceptant que soit reconnue pour preuves autre chose que des démonstrations au sens strict.*" (p.170)

Ainsi, nous pensons que la preuve pourra tirer sa nécessité des propriétés des concepts avant de tirer sa nécessité de règles de calcul logique et de propositions identifiées comme valides. Sinon, avant la démonstration il risque d'y avoir un grand trou en ce qui concerne la validation, une validation qui s'appuie sur l'exemple ou un enseignement consistant en une enfilade de vocabulaire, définitions et règles sans pertinence pour l'étudiant. Cette validation ou cette absence de validation nuira davantage qu'une validation imparfaite mais qui se questionne.

Nous pensons que la problématique de la rigueur qui est celle, en fait, de la validation, appartient à l'activité mathématique pour la résolution d'un problème, pour comprendre les relations, pour se convaincre d'un énoncé, pour distinguer ce qui relève du particulier de ce qui relève du général, pour développer des connaissances. Nous pensons aussi que pour que la rigueur se développe, comme le suggère Balacheff (1987), elle doit être présente très tôt. Par ailleurs, le passage à une nouvelle façon de valider devra être motivé. Cela dit, le rôle de l'école devra être d'une part de faire évoluer les critères de validation des élèves pour qu'ils dépassent la mesure, les essais numériques et le constat et, d'autre part, de redonner une utilité à la preuve. Pour ça, il n'est pas nécessaire d'en arriver à la preuve formelle.

De plus, toute l'activité de classe est colorée explicitement ou implicitement de validation et le projet peut s'éloigner de la recherche d'une nécessité. La couleur qui en ressort véhicule des messages aux élèves qui contribuent à construire leurs conceptions des mathématiques et leurs conceptions de ce qui valide dans la classe de mathématiques. Ces validations même implicites et même différentes d'une preuve nous apparaissent aussi importantes que les autres pour caractériser la validation dans la classe de mathématiques. C'est à ces validations que nous nous intéresserons maintenant.

## 2.3 Autres validations dans la classe de mathématiques

### 2.3.1 La validation servant au contrôle de l'action

Dans la classe de mathématiques, comme ailleurs, la vérité par nécessité n'est pas toujours possible à envisager et n'est d'ailleurs pas toujours essentielle. Margolinas (1989) ajoute une fonction à la validation en mathématiques qui n'apparaît pas dans les travaux sur la preuve cités dans la section précédente. **Valider** sert au **contrôle de l'action.** Dans une situation de résolution de problème, valider c'est chercher si un résultat est vrai ou plausible. C'est s'assurer qu'on est sur la bonne piste en faisant des vérifications ponctuelles. Elle identifie des techniques de validation, qui sont des techniques pour tester un résultat: une double résolution par une même méthode, une double résolution par une méthode différente, l'utilisation d'informations supplémentaires non nécessaires à la résolution mais qui permettent une vérification, une résolution dans un autre cadre (cadre géométrique par exemple alors qu'on travaille algébriquement), l'utilisation de propriétés mathématiques connues qui confirment ou infirment le résultat. Dans tous ces cas, il ne s'agit pas de montrer que c'est nécessairement vrai étant données les prémisses ou simplement de s'interroger sur le pourquoi c'est comme ça; il s'agit plutôt de s'assurer que la réponse, ou le résultat, est correcte. Le projet en est un de **vérification** et non de preuve.

Margolinas (id.) a tenté de fournir certains critères permettant de distinguer un projet de **preuve** (recherche d'une vérité par nécessité) d'un projet de **vérification**. Fondamentalement, la vérification ne s'intéresse qu'à la vraisemblance d'un résultat. Répéter une expérience plusieurs fois parce qu'on doute d'un calcul ou de notre réponse s'insère dans un projet de vérification; mais la même action qui cherche à voir si *ça marche toujours* et *pourquoi* peut appartenir à un projet de preuve même si cette démarche ne garantit pas la généralité. Outre l'enjeu des projets, recherche de **vrai** ou de **vraisemblance**, Margolinas (id.) signale d'autres aspects qui souvent les caractérisent; elle n'en fait pas toutefois des critères discriminatoires. Le projet de preuve serait engagé suite à une quasi-certitude sur le résultat d'une action et celui de vérification suite à un doute. Dans le projet de preuve, un **énoncé** est **formulé puis débattu**; dans le projet de vérification, **aucun énoncé de départ** n'est impliqué. Le projet de preuve serait davantage **public** que le projet de vérification, lui, plus **privé**.

Toujours selon Margolinas (id.), du côté du **processus de preuve**, le **résultat** est **secondaire**, ce qui importe c'est la généralité de la procédure qui mène à un résultat, **les** exemples qui *ne marchent pas* sont interprétés comme des contre-exemples ou des **contradictions** par rapport à l'énoncé de départ. Du côté du **processus de vérification, l'important** c'est **d'arriver au résultat**; on s'intéresse donc au résultat et au procédé (comment on fait) qui conduit au résultat; quand *ça ne marche pas*, on a fait une **erreur**. Pour l'élève toutefois le statut de cette erreur peut dépendre du *contrat didactique* (Brousseau, 1988), la distinction entre ce qui est permis de faire (exigence de l'enseignant) et ce qui est valide (vrai) mathématiquement n'étant pas toujours facile à faire.

### 2.3.2 L'explication

Les questions que pose l'enseignant, ce qu'il accepte ou refuse comme argument, les renforcements comme le peu d'intérêt qu'il accorde à une réponse, contribuent à la construction de règles implicites de validation et au développement d'attitude face à la validation. La preuve en classe pourra avoir les mêmes fonctions que la preuve en mathématiques. Mais **certaines fonctions** peuvent prendre une place plus grande étant donnée la position de l'enseignant en classe. Jusqu'ici nous

nous sommes intéressée aux preuves et autres validations dans l'activité mathématique. Attardons-nous maintenant à l'enseignant comme communicateur ou facilitateur de l'apprentissage.

L'enseignant dans la classe souvent explique. Si ce n'est pas lui qui explique, il réagit aux explications de ses élèves. Il peut expliquer pour faire comprendre ou pour convaincre. La structure même de son cours et l'organisation des situations d'apprentissage peuvent contribuer à expliquer et à convaincre. Nous retrouvons ici des fonctions de la preuve. Il se peut que cette validation ait comme objectif de montrer que c'est nécessairement vrai, mais il se peut aussi qu'on veuille faire comprendre autre chose. Dans cette section, nous considérerons seulement les explications de l'enseignant; dans la section suivante, nous nous attarderons à l'aménagement que fait l'enseignant dans sa leçon pour "faire passer" la théorie, c'est-à-dire pour la faire accepter, pour convaincre les élèves, voire pour la faire construire.

Duval (1992-93) et Balacheff (1988) se sont efforcés de clarifier ce que recouvrait une explication. Ils s'accordent sur certains points. L'explication consiste à produire la suite des faits qui mis en relation expliquent le résultat. L'explication répond à un pourquoi en donnant des raisons qui vont faire comprendre[25]. Balacheff précise que donner les raisons *"fait appel à ce que les mathématiciens nomment le plus souvent "intuition"; elle renvoie aux significations, c'est-à-dire à la compréhension de la validité d'une assertion, non au sens de la logique mais au sens de ses relations avec le corps des connaissances mathématiques."* (Balacheff, 1988, p. 28) On peut voir la logique dans une démonstration mais ne pas comprendre: logique et compréhension ici s'opposent. "Expliquer" c'est mettre en relation et faire comprendre, en référence au contenu, non en référence à un statut officiel mais en référence au contenu conceptuel. (Duval, 1992-93). Cette fonction explicative sera souvent absente de preuves formelles dont la fonction n'est pas de faire comprendre mais de garantir qu'un énoncé est vrai. Nous avons déjà discuté de cet aspect précédemment en donnant un exemple de preuve qui pouvait avoir une valeur explicative plus grande (preuve 2, de la figure 2a) qu'une autre "qui ne faisait que prouver" parce qu'étant l'application d'une méthode (preuve 1, de la figure 2a).

À différentes explications vont correspondre différents types de validation. Nous tenterons d'en caractériser quelques-uns. Voici deux exemples dans lesquels des faits sont mis en relation, sans plus:

---

[25]Balacheff se réfère à Piaget, 1970.

> 1) "comme il y a une racine carrée, j'ai élevé les deux membres de l'équation au carré...";
> 2) "une équation c'est comme une balance en équilibre, si j'enlève la même quantité sur chacun des plateaux, alors la balance reste en équilibre.

Dans ces explications, il n'y a pas un examen des arguments utilisés, un recul par rapport à ceux-ci, recul qui consiste à s'interroger sur la pertinence ou la nécessité de ces arguments: "est-ce pertinent d'utiliser la balance...", "est-ce que si j'élève au carré l'équation résultante sera nécessairement équivalente..." Ce sont des explications descriptives qui donnent une pertinence à ce qu'on fait; ici soit par rapport aux conditions qui déterminent l'exécution de la procédure (1), soit par analogie (2). Ces explications n'ont pas pour objectif de déterminer si ce qu'on fait est juste. Ces descriptions sont appelées explications par Duval (id.). Lorsque, toutefois, on s'interroge sur la recevabilité des arguments utilisés alors Duval parle d'argumentation. Nous distinguons deux types d'argumentation; une argumentation qui reste au niveau de la pertinence et une argumentation qui déborde sur la nécessité.

> 1') Les carrés de quantités égales sont nécessairement égaux, mais l'équation résultante de la transformation n'est pas nécessairement équivalente à l'équation originale puisqu'en élevant au carré des restrictions sur le domaine de définition ont pu être perdues.
> 2') Une équation exprime l'égalité entre deux quantités; elle peut donc être vue comme une balance en équilibre puisque celle-ci est en équilibre si les quantités sur les plateaux sont égales.

L'argumentation 2' se préoccupe en quelque sorte de valider l'analogie bien que dans ce cas l'argumentation n'aille pas beaucoup plus loin que la description. L'argumentation 1', elle, peut exprimer un élément de preuve. Nous dirons qu'une explication est une preuve ou est à potentiel de preuve s'il y a recherche d'une vérité par nécessité, c'est-à-dire si on cherche pourquoi c'est comme ça en trouvant les raisons dans les propriétés des objets mathématiques étudiés. Elle deviendra démonstration, selon Duval, lorsque la justesse des arguments sera jugée en fonction de leur statut officiel de théorème, de définition, etc.

Nous avons donc des **explications descriptives**, des **argumentations explicatives**, qui se préoccupent de pertinence, et des **argumentations de preuve**, qui peuvent avoir ou non une valeur explicative.

### 2.3.3 La validation dans la structure de la leçon

L'enseignant peut convaincre d'autorité: c'est comme ça parce que je le dis. Il peut convaincre en manipulant concrètement des objets (par exemple des nombres représentés par des objets tangibles ou non) ou en faisant manipuler les élèves, c'est-à-dire par expérimentation et constats. L'expérimentation pourra déboucher ou non sur une généralisation qui s'appuie sur les propriétés des objets. Il peut convaincre en appelant à l'évidence, dans les preuves par ostension par exemple. Il peut convaincre aussi par une argumentation qui repose sur des propriétés ou sur une suite d'inférences.

Toutes ces actions contribuent à développer implicitement ou explicitement des critères pour juger de ce qui est acceptable en mathématiques. Il n'y a pas que les moments où l'enseignant annonce qu'un énoncé est à prouver ou ceux où il demande aux élèves de justifier une réponse qui comptent, mais aussi l'organisation des actions et tâches de l'enseignant et des élèves et les relations qu'elles entretiennent entre elles. Nous nous inspirons de Joshua et Joshua (1987) pour identifier des modèles de validation à travers la structure d'une leçon. C'est sur ce point que nous nous attardons dans cette section. Ces auteurs ont fait l'analyse de la situation en France et catégorisé les validations dans la classe de mathématiques d'après ce qui se fait le plus souvent: une approche qui part de l'expérimental pour aboutir à une théorie. La validation est vue comme une série d'interventions visant à faire adopter un modèle, la théorie, en référence à ce qui se fait en classe de physique. Ils identifient trois types de validation en mathématiques: la validation opératoire implicite, la validation opératoire formelle et la validation démonstrative. Ils traitent ces validations en parallèle avec des validations observées en classe de physique. Nous pensons que les validations identifiées spécifiquement pour la classe de physique pourraient aussi se retrouver dans la classe de mathématiques.

Le premier type de validation, appelé **opératoire**, se caractérise ainsi dans la classe de physique: l'enseignant postule un modèle qu'éventuellement il reconstruira en classe. La classe doit accepter le modèle comme valable et accepter aussi chacune des étapes de la construction et de la transmission. Pour ce faire, l'enseignant réalise une première expérience, l'expérience de référence, puis peut-être une seconde pour confirmer; suivent des expériences de pratique par les élèves pour renforcer le modèle. Ce type de validation est celui qu'utilise l'approche inductiviste selon un schéma simplifié: mesures, constatation, renforcement et mise en application.[26] La validation se fait via l'expérimental. Les règles sont vues comme émergeant par nature des objets et phénomènes observés. Il n'y a pas ici recherche d'une nécessité, c'est-à-dire des raisons qui expliquent pourquoi c'est comme ça.

Nous associons à une validation opératoire décrite en physique, une validation semblable possible en mathématiques. Cette validation peut être favorisée par une approche d'enseignement prenant un point de départ expérimental avec la manipulation de matériel. Nous la décrivons comme ceci: expérience qui s'opère sur des objets concrets, constats, renforcement et application. Ici, la validation ne vient pas de l'autorité du professeur qui sait et même plus, qui pourrait le prouver, mais **par nature** (figure 7a).

Joshua et Joshua vont associer la validation opératoire en physique à la validation qui a lieu en mathématiques, lors de l'apprentissage d'algorithme et de règles (figure 7b). On montre comment faire (expérience *monstrative* qui sert de référence). On dégage les règles d'actions et de calculs. Une fois les règles reconnues il faut qu'elles soient admises par tous. On répète l'expérience pour confirmer. Une fois les règles admises, les élèves appliquent eux-mêmes l'algorithme dans un grand nombre de cas (la reproduction est facile en mathématiques comparativement à la physique). On peut penser qu'alors la validation vient du fait qu'on a la bonne réponse. Joshua et Joshua (id.) qualifient cette validation d'**implicite**. La validation en mathématiques et en classe de mathématiques ayant comme paradigme la démonstration (c'est leur analyse), si on ne peut pas démontrer on ne peut prouver. Les élèves vont adopter ce que le professeur dit parce que lui, le professeur, sait que c'est comme ça. Il connaît la preuve, mais comme elle ne leur est pas accessible, il ne la donne pas. La preuve est gardée implicite.

Les auteurs identifient un autre niveau de validation opératoire dans l'enseignement des mathématiques. C'est une validation cette fois explicite qu'ils l'appellent **opératoire formelle** (figure 7c). Elle reste opératoire: des exemples d'introduction servent à dégager les propriétés. Elle est formelle parce qu'une fois les propriétés dégagées elles sont démontrées. Cette démonstration est toutefois la responsabilité du maître et sert à institutionnaliser le savoir. Mais, comme la démonstration n'assure pas l'acquisition du modèle (on le sait), les exercices de pratique prennent toute l'importance, les exemples ou l'expérimentation d'avant restant, somme toute accessoires.

---

[26]Pour critique de l'appproche inductiviste en classe de physique, consulter les articles de M.-A. et S. Joshua (1987 et 1988).

Finalement, les auteurs identifient en mathématiques et en physique un dernier type de validation, qui consiste à engager les élèves dans ce que les auteurs appellent une **démarche de preuve** (figure 7d). En physique, plusieurs modèles sont proposés par l'enseignant puis, des expériences sont réalisées dont la correspondance ou non avec le modèle mènera les élèves à faire le choix du bon modèle. La démarche consiste en un débat où se confrontent les modèles et où sont possibles des réfutations.

| a) <u>Validation "par nature"</u> | b) <u>Validation opétatoire implicite</u> |
|---|---|
| Les élèves manipulent du matériel (mesures...)<br>Ils constatent les règles avec l'aide de l'enseignant<br>Ils essaient sur quelques exemples<br>Ils font des exercices de renforcement | L'enseignant montre comment faire (exemple)<br>Les règles sont identifiées<br>Les élèves essaient eux-mêmes la méthode<br>Les élèves font des exercices de renforcement |

| c) <u>Validation opératoire formelle</u> | d) <u>Démarche de preuve</u> |
|---|---|
| L'enseignant montre comment faire (exemple)<br>Les propriétés sont identifiées<br>L'enseignant **démontre** les propriétés<br>Les élèves font des exercices de renforcement | Problème à résoudre<br>Expérience par les élèves et conjectures (équivalentes aux modèles en physique)<br>Production de preuves et débat (avec expériences-tests et contre-exemples)<br>Affinement des critères de validation et résolution du problème. |

**Figure 7:** Validations dans un enseignement des mathématiques ayant un point de départ expérimental

Les Joshua distinguent la démarche de preuve des autres types de validations qu'ils nous décrivent par un aspect fondamental dans leur analyse: ce n'est que dans la démarche de la preuve que l'on retrouve un mouvement d'aller-retour, de l'expérience vers le modèle et du modèle vers l'expérience. Cette démarche de preuve est observée surtout dans les travaux de recherche en didactique. Nous trouvons une illustration de cette approche en mathématiques dans les travaux d'Arsac (1993) dont nous avons déjà parlé. Les élèves doivent produire des justifications d'énoncés et à en débattre. Les problèmes sont construits de manière à amener l'élève à dépasser des niveaux de validation inadéquats. Nous en trouvons aussi un exemple dans les *situations didactiques* de Brousseau (1981, 1986). Un milieu est conçu afin de déclencher une réaction chez l'élève afin qu'il soit amené à rechercher une solution maximale à un problème. Des situations de formulation seront suivies de situations de validation où les élèves devront débattre de leurs affirmations, retourner s'il le faut au milieu pour le modifier et reformuler des énoncés, etc. Le *débat scientifique* instauré par l'équipe de Legrand (1988) en est un autre exemple.

D'autres types de validation sont à envisager dans la classe de mathématiques. Si le point de départ n'est pas expérimental, la théorie peut être donnée avec ou sans démonstration. Donner la théorie puis faire des exemples pour montrer que "ça marche" revient à une validation opératoire implicite (figure 8a). Donner la théorie avec une démonstration puis des exemples pour montrer que "ça marche" revient à une validation opératoire formelle (figure 8b). La validation **démonstrative** peut, pour sa part, se résumer en enseignement de la démonstration comme méthode (figure 8c). Nous en donnons un exemple dans le chapitre 3 (§ 3.6)

| a) Validation opératoire implicite | b) Validation opératoire formelle |
|---|---|
| L'enseignant donne la théorie (définitions, propriétés...)<br>L'enseignant donne des exemples (pour convaincre ou faire comprendre)<br>L'élève fait des exercices de renforcement | L'enseignant donne la théorie (définitions, propriétés...)<br>L'enseignant démontre les propriétés<br>Les élèves font des exercices de renforcement |

| c) Validation démonstrative |
|---|
| Enseignement de la méthode<br>Pratique de la méthode: énoncé à valider |

**Figure 8:** Validations dans l'enseignement des mathématiques sans point de départ expérimental

Plusieurs auteurs placent la preuve dans un débat et reconnaissant à l'activité de preuve une dimension sociale importante (Arsac, 1988, Brousseau, 1981, Legrand, 1988, Balacheff, 1988). Dans ces débats ou discussions mis en place, l'élève a un rôle prédominant; il doit expérimenter, argumenter, faire des choix. Comme le souligne Brousseau (1986), le travail dans le débat peut se faire à différents niveaux:

1. **Niveau sémantique:** les arguments se fondent sur les caractéristiques du milieu, sur le contenu conceptuel, en rapport avec un sens du concept. Les preuves potentielles auront valeur explicative.

2. **Niveau syntaxique:** le niveau syntaxique se préoccupe de la forme de l'argumentation (présentation des enchaînements, symbolisation...). Nous pourrons retrouver cette discussion en particulier lorsque les élèves seront initiés à la démonstration.

3. **Niveau épistémologique:** Le travail de Lakatos, dans *Preuve et Réfutations* (1976, version française 1984), consistant à mettre à jour le mécanisme de construction de la preuve et de l'heuristique mathématique, en est un exemple.

Avec le courant de l'interactionnisme social, l'aspect social est constitutif du processus d'apprentissage et l'argumentation a une place importante en classe. "*We argue that what constitutes an acceptable mathematical reason is interactively constitued by the students and the teacher in the course of classroom activity.*" (Yackel et Cobb, 1996) Les auteurs expliquent comment les élèves du primaire évoluent dans leur compréhension de ce qu'est une explication et une justification à l'intérieur de délibérations en classe. Trois niveaux d'explications sont suggérés: **1. une explication qui porte sur l'action posée sur des objets réels., 2. une explication qui porte sur des objets mathématiques, 3. l'explication comme objet de réflexion.** Les élèves arrivent à distinguer les deux premiers niveaux d'explications. Certains se rendent au troisième niveau, où une réflexion vise à juger des arguments pour une plus grande acceptabilité ou compréhension par l'ensemble des élèves (selon ce que rapportent les auteurs). Cette argumentation pourra avoir un potentiel de preuve, toutefois le souci de convaincre, peut en être un de vraisemblance. Pour Krummheur (1992), la nature d'un débat s'accommode mal de l'évidence et de la vérité par nécessité. La problématique du débat est bien plus celle du crédible, du plausible, du probable! Probablement ici que Krummheur identifie la preuve au raisonnement déductif (ce qui n'est pas le cas entre autres de Balacheff) et n'envisage pas la nécessité comme faisant partie d'un projet comme le fait Margolinas (1989). L'élève qui explique que 12 + 13 = 25 parce que 12 + 13 c'est comme 10 + 2 + 10 + 3 donc 20 + 5 = 25, (Yackel et Cobb, 1996) ne montre-t-il pas que 25 est nécessairement la réponse étant donné la signification des symboles? La réponse n'est pas un hasard! Démontrer ça formellement pourrait prendre plusieurs lignes, peut-être même quelques pages!

La catégorisation des validations identifiées par Joshua et Joshua (id.) dans cette section s'est avérée un instrument intéressant comme départ pour faire une analyse des manuels scolaires au Québec (chapitre 3), pour y évaluer la place de l'expérimental et le type de validation utilisé et ce, même si le portrait que les auteurs dressent peut ne pas correspondre exactement à la situation au Québec, en particulier relativement au paradigme de la démonstration.

## 2.4 État de la situation en classe selon les recherches sur les conceptions des enseignants ou futurs enseignants

Rappelons quelques résultats de recherche présentés dans le chapitre 1 quant aux conceptions et habiletés des futurs enseignants. D'une part, l'importance d'une preuve est évaluée, par les élèves et de futurs enseignants par son utilité, d'autre part ceux-ci n'en voit généralement pas l'utilité (Vollrath, 1994; Schoenfeld, 1983). De futurs enseignants du primaire accordent autant de valeur à des arguments de type essais qu'à des arguments déductifs, pour valider un énoncé mathématiquement (Martin et Harel, 1989). Les étudiants universitaires, futurs enseignants en particulier, se débrouillent mal en preuves formelles (Buckland, 1969; Eisenberg, 1977; Galbraith, 1982; Moore, 1994) et se limitent à des expériences sur cas particuliers lors de la résolution de problèmes géométriques (Knuth & Elliot, 1997). L'expérimentation de Schoenfeld (1983) montre de plus que des étudiants universitaires en mathématiques recourent à des vérifications empiriques sans recherche des raisons qui pourraient justifier le résultat.

Deux types d'explication sont généralement donnés à ces résultats de recherche. Plusieurs chercheurs font l'analyse de leur résultat à la lumière de ce qu'ils considèrent comme la pratique de classe la plus répandue: un enseignement de règles et de procédures au détriment d'un enseignement qui cherche à faire des liens et à mettre en évidence les relations, un enseignement où il y a peu de place à accorder à la preuve (Vollrath, 1994; Galbraith, 1982). Nous n'avons trouvé que peu d'études systématiques sur la pratique en classe d'enseignants ou de futurs enseignants. Steinberg, Haymore et Marks (1985) ont suggéré, à travers l'analyse du comportement de quatre enseignants stagiaires dans leur classe, que les connaissances mathématiques pouvaient être déterminantes: une meilleure formation en mathématiques favorisant un enseignement plus "conceptuel" (plus de liens entre les concepts, plus de résolutions de problèmes, plus de questions de type pourquoi, meilleure intégration du formalisme mathématique). Cependant, Galbraith (1982) a fait l'hypothèse que l'enseignement universitaire peut contribuer à conforter une conception des mathématiques comme étant instrumentales en ne mettant pas en échec cette conception (Galbraith, 1982). La seule étude significative que nous ayons trouvée relativement à la preuve dans la pratique scolaire est celle de Schoenfeld (1988). Cette étude montre que la preuve est enseignée comme méthode à appliquer et que des occasions d'utiliser les preuves de façon pertinente sont ratées à cause d'un enseignement morcelé. Il constate également une survalorisation de la vitesse en matière de résolution des problèmes. Comme résultat, les élèves, plus tard étudiants, développent une attitude que Schoenfeld qualifie d'anti-mathématique: ils conçoivent la preuve comme inutile. C'est ainsi qu'il explique que ses étudiants ne se servent pas de résultats obtenus suite à une preuve lors de la résolution de problèmes (Schoenfeld, 1983).

Quant au 1$^{er}$ cycle du secondaire, la pratique de classe en France semble privilégier une validation plutôt opératoire (figures 7b, c et 8a, c) au premier cycle du secondaire où l'enseignant montre comment faire (Joshua et Joshua, 1987). Plusieurs chercheurs ont constaté dans la classe une utilisation de la preuve uniquement pour "démontrer", donc au 2$^{e}$ cycle du secondaire, avec l'enseignement d'une méthode (la démonstration) à la manière de l'exemple présenté à la figure 18, au chapitre 3. Son rôle est alors limité et elle est reléguée à certaines parties du programme et absente des autres (Balacheff, 1988; Schoenfeld, 1988).

Mais les programmes changent et avec eux peut-être la place et les fonctions de la validation. Les programmes du secondaire au Québec, autrefois découpés en objectifs et sous-objectifs, annoncent aujourd'hui des objectifs globaux et terminaux auxquels des objectifs plus pointus sont soumis. Ces objectifs proposent d'impliquer les élèves dans une démarche inductive et déductive pour vérifier des hypothèses. Quelques pays ont tenté un virage depuis une dizaine d'années vers un enseignement plus significatif où l'élève est impliqué dans son apprentissage. Hoyles (1996) a entrepris de faire le point sur une réforme entreprise au Royaume-Uni depuis quelque temps et qui déjà a produit des résultats. La preuve, dans ces réformes, change et parfois radicalement. Il est important de faire l'analyse non seulement des programmes mais aussi des manuels et de la pratique de l'enseignant et du futur enseignant dans ces circonstances.

En particulier pour les futurs enseignants, si déjà ils ont une tendance à laisser tout le poids de la validité de leur solution sur des vérifications empiriques, une approche des mathématiques qui met en avant une approche expérimentale risque de renforcer cet aspect.

Une deuxième explication sera apportée en particulier aux difficultés observées chez les étudiants universitaires relativement à la preuve formelle. Les auteurs s'interrogent sur la fonction que des étudiants universitaires accordent à ces preuves (Moore, 1994; Pinto & Ainley, non publié; de Villiers, 1990). Moore (id.) émet l'hypothèse que les difficultés des étudiants en preuves formelles tiennent au fait qu'ils n'accordent pas à la preuve la bonne fonction: le rôle valorisé étant celui d'expliquer alors que la preuve formelle n'a pas ce rôle. Pinto et Ainley (non publié) ont interrogé en entrevue de futurs enseignants des mathématiques au secondaire en train de suivre un cours d'analyse. Les étudiants, placés devant un résultat, devaient dire s'ils étaient convaincus du résultat, comment ils s'en convaincraient, comment ils convaincraient quelqu'un d'autre. Finalement ils devaient écrire leurs arguments. Les auteurs concluent que le contexte auquel les étudiants réfèrent le plus naturellement est celui de la classe, dans leur rôle d'enseignant qui est d'expliquer. Notre projet de recherche prolonge ces travaux sur les fonctions de la preuve en cherchant à déterminer les fonctions de la validation dans les planifications et prestations de stagiaires et en nous écartant de la preuve formelle.

## 2.5 Notre objectif de recherche

Selon les recherches et certaines observations personnelles, les étudiants, futurs enseignants, ont tendance à utiliser des expériences sur cas particuliers pour valider ou résoudre des problèmes. Ils sont aussi peu habiles en preuves formelles. Certains chercheurs expliquent que la fonction de la preuve chez les étudiants ne coïncide pas nécessairement avec celle que leur accorde le professeur de didactique (en particulier Vollrath, 1994, Pinto et Ainley, non publié).

Les stagiaires dont nous analysons les leçons ont suivi des cours de mathématiques avancés qui proposent sans doute des preuves à haut niveau de formalisme. Notamment ils ont suivi un cours de géométrie dans lequel ils étaient amenés à jouer le jeu de la construction d'une théorie axiomatique. Ils ont donc été amenés sur le terrain de la rigueur mathématique de la démonstration.

Entre la preuve formelle et les exemples répétés, les étudiants ont cependant été exposés à différentes validations et différents niveaux de preuve dans leur cours de didactique. De plus, ils ont le désir que les élèves comprennent les concepts (Bednarz, Gattuso, Mary, 1996). Dans leur formation, ils ont analysé plusieurs concepts enseignés particulièrement au premier cycle du secondaire, en réfléchissant sur les difficultés liées à ces concepts; ils ont envisagé différentes représentations et différentes façons de résoudre des problèmes, où ils ont été exposés à différents niveaux de preuve et à l'utilisation de matériel pour supporter les raisonnements. (Nous décrivons quelques aspects de cette formation dans le chapitre 5).

En stage, ils avaient le contrat de faire en sorte que les élèves apprennent. Ce contrat a forcément guidé leurs choix lors de la préparation des leçons et dans la classe.

Connaissant ces informations, deux questions se posent: 1) Est-ce que l'utilisation d'exemple générique et de matériel comme support au raisonnement, par exemple, renforce chez les étudiants le recours à des validations basées sur l'observation et le simple constat ou, au contraire, stimule-t-elle le recours à d'autres sortes de preuves, en autant que c'est possible? 2) Quelle place et quelles fonctions trouve la validation dans le projet des stagiaires de faire comprendre les concepts (si tel est le cas)?

Dans cette thèse nous nous proposons d'étudier les planifications et prestations de leçon des étudiants stagiaires en enseignement des mathématiques au premier cycle du secondaire, plus précisément en algèbre. Notre objectif est de caractériser la validation par

1) sa place dans la leçon, lieu et espace occupé,
2) ses fonctions (à quoi elle sert et pour quoi on s'en sert) et
3) des moyens utilisés pour valider.

Ces trois aspects nous paraissent essentiels pour caractériser la validation les uns n'étant pas indépendants des autres. En particulier les arguments et les lieux de validation éclairent sur les fonctions de cette validation. Dans le peu de recherches portant sur les fonctions de la preuve, les futurs enseignants ont été interrogés en entrevue; or il nous semble que les fonctions de la validation ne sont pas indépendantes du contexte auquel elle appartient et que la fonction de la validation n'est pas indépendante de son lieu. Par ailleurs, l'ensemble des trois aspects éclaire, pensons-nous, sur l'importance accordée à la validation.

La validation dans l'enseignement prend différentes dimensions étant donnés les intervenants: l'élève, l'enseignant et les mathématiques elles-mêmes.

Rappelons que notre recherche se limite au premier cycle du secondaire en algèbre donc avant que la démonstration ne soit introduite et avant que la preuve ne devienne objet d'étude. Nous nous obligeons ainsi à envisager d'autres niveaux de preuve. De plus, nous considérons que la validation dans la classe de mathématiques dépasse l'utilisation explicite d'une preuve et nous nous proposons d'explorer les différentes formes que peut prendre la validation dans les planifications et prestations des stagiaires d'après le cadre théorique qui vient d'être présenté dans le chapitre 2. Nous nous limitons à l'algèbre, c'est-à-dire aux objectifs identifiés comme portant sur l'algèbre dans le programme d'études.

Les nouveaux programmes au Québec encouragent à *favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à émettre des hypothèses et à les vérifier par une démarche inductive ou déductive* (MEQ, 1994, P.22). Cet accent nouveau peut avoir un impact sur le type de preuves accepté et les fonctions de ces preuves. Il se pourrait que la validation y gagne, mais il se pourrait aussi qu'elle y perde (Hoyles, 1996). Pour enrichir notre cadre conceptuel, nous ferons l'analyse des manuels qui ont suivi les recommandations de ce nouveau programme pour le premier cycle du secondaire, où la démonstration est habituellement exclue. Nous nous restreindrons aux sections identifiées comme algébriques. Comme beaucoup des travaux sur la preuve et la démonstration s'intéressent tout particulièrement à la géométrie, étant donné que la démonstration dans la géométrie euclidienne est un prototype du raisonnement déductif, notre analyse des manuels présentée au chapitre 3 présentera un éclairage complémentaire sur la validation.

Dans le chapitre 4, nous présenterons une pré-expérimentation réalisée auprès d'étudiants ayant la même formation que nos stagiaires. Celle-ci nous fournit des indications sur les fonctions que nos étudiants accordent à la preuve et complète aussi notre cadre théorique sur les conceptions des futurs enseignants. Dans le chapitre 5, nous élaborerons sur la méthodologie que nous avons envisagée pour répondre à nos objectifs de recherche.

# CHAPITRE 3
# VALIDATION EN ALGEBRE AU PREMIER CYCLE DU SECONDAIRE
# ANALYSE DE MANUELS

## 3.1 Pourquoi l'algèbre et pourquoi au premier cycle du secondaire?

Les orientations générales du nouveau programme d'études secondaires qui progressivement est mis en place depuis 1993, au Québec, se traduisent par deux grands principes: *favoriser la participation active de l'élève à son apprentissage* et *favoriser le processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de l'apprentissage.* Notamment les problèmes servent entre autres à *développer des habiletés intellectuelles: organiser, structurer, abstraire, analyser, estimer, généraliser, déduire, justifier, etc.* De plus, quatre objectifs globaux sont donnés: établir les liens, communiquer, gérer une situation-problème et raisonner. Sous la rubrique "raisonner", on précise: *"Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à émettre des hypothèses et à les vérifier par une démarche inductive ou déductive."* [27]

Nous avons choisi d'analyser les sections algébriques des manuels du premier cycle du secondaire pour trois raisons principales. D'abord, nous avons pu constater que certains manuels introduisaient la preuve en secondaire IV, comme méthode démonstrative.[28] Nous avons voulu savoir si là était l'essentiel du travail de preuve au secondaire. Nous avons voulu savoir aussi si d'autres formes de validation existaient avant que ne soit introduite cette méthode et particulièrement hors de la géométrie, la géométrie étant le lieu privilégié de la démonstration par tradition. Deuxièmement, les objectifs du programme identifiés comme portant sur l'algèbre constituent une partie importante de l'enseignement des mathématiques au secondaire: 25% en 2$^{e}$ secondaire, 38% en 3$^{e}$ secondaire, 55% en 4$^{e}$ secondaire. Enfin, cette analyse nous permet une réflexion plus spécifique sur la validation en algèbre et sur la validation dans l'enseignement de l'algèbre. En effet, plusieurs des travaux consultés s'étant penchés tout particulièrement sur la géométrie, il nous apparaissait intéressant d'investiguer à propos de l'algèbre.

Nous avons donc analysé les sections algébriques des manuels des niveaux

---

[27] Programme d'études secondaires, chapitres II et III. Les objectifs terminaux et globaux sont repris à tous les niveaux.

[28] Cf. Breton & al (1996) *Regards mathématiques 416*, tome 1, pp. 125 à 135. Nous utilisons ici le mot démonstration pour parler des preuves "hypothético-déductives" (cf chapitre 2)

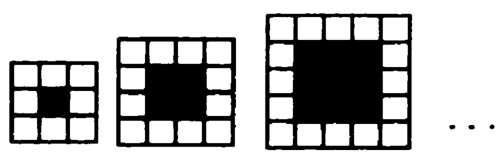
secondaires I, II et III, du point de vue de la validation. À travers ces sections, nous couvrirons l'ensemble des domaines d'utilisation de l'algèbre: généralisation via la construction de formules et de fonctions, résolution de problèmes se traduisant par des équations, généralisation-preuve (Bell, 1993). Pour chacun des thèmes couverts, l'analyse des manuels sera précédée d'une réflexion sur la validation.

## 3.2 Suites et généralisation de patterns en 1ère secondaire

Nous présentons d'abord notre réflexion a priori sur la validation dans les activités de généralisation pour ensuite présenter l'analyse des sections couvrant ce thème dans les manuels de première secondaire. Il nous apparaît que peu d'importance est accordée à la construction du terme général de la suite et conséquemment à la validation.

### 3.2.1 Validation dans les activités de généralisation

L'algèbre peut servir comme outil de généralisation de patterns (figure 9) ou de régularités numériques. Elle sert à exprimer le terme général de la suite ou à produire une formule permettant de calculer n'importe quel terme de la suite. Il y a lieu dans ces généralisations de se poser les questions "est-ce que la formule est valide dans tous les cas" et "pourquoi". La validation repose, selon le cas, sur les propriétés des suites numériques ou sur les propriétés géométriques des patterns. Voyons un exemple.



Exemple tiré de Bell (1993), p. 28

**Figure 9:** Exemple de suite de patterns propice à une généralisation

Dans la figure 9, si n représente le nombre de carrés non hachurés sur un côté alors le nombre total de carrés non hachurés peut s'exprimer de différentes façons: $n^2 - (n-2)^2$; $4n-4$; $4(n-1)$; $4(n-2)+4$. La validation ici peut reposer sur les propriétés du carré. Quand une suite numérique sera construite à partir d'un problème posé, il faudra s'assurer que cette suite rend bien compte du contexte. Il pourrait arriver qu'une suite arithmétique, par exemple, s'associe à une situation pour un temps seulement (comme dans la figure 10, plus loin), proposé à des élèves par Galbraith, 1995).

La question qui suit porte sur les nombres naturels dont la somme des chiffres est divisible par 7.
34 est un de ces nombres car 3 + 4 = 7
185 est un de ces nombres car 1 + 8 + 5 = 14 est divisible par 7.
La liste L de ces nombres inférieurs ou égaux à 70 commence ainsi: 7, 16, 25, 34.
Écris le nombre suivant dans la liste.

Gary dit "Si tu commences avec 7 et ajoutes 9 tout le temps, tu obtiens toujours un nombre de la liste L.
(1) Est-ce que Gary a raison? Oui/Non
Utilise l'espace ci-dessous pour expliquer pourquoi.

(2) Brenda dit "Tous les nombres de la liste L peuvent être obtenus en ajoutant 9 au nombre précédent. Tu commences avec 7."
est-ce que Brenda a raison? Oui/Non
Utilise l'espace ci-dessous pour expliquer pourquoi.

(3) Julie dit "Gary et Brenda disent la même chose".
Est-ce vrai? Oui/Non. Explique pourquoi.

Exemple tiré de Galbraith (1995), p. 413

**Figure 10:** Exemple où la régularité de départ n'est pas générale

La suite des nombres naturels dont la somme est divisible par 7 commence ainsi 7, 16, 25, 34. On peut croire qu'il s'agit d'ajouter 9 à un terme pour obtenir le suivant. Or si on ajoute 9 à 70, qui est dans la liste, on n'obtient plus un nombre qui respecte la règle (7+9=16 qui n'est pas divisible par 7). Selon Galbraith (id.), les élèves réussissent la première question en reconnaissant que l'énoncé de Gary est vrai (c'est vrai si la liste arrête à 70), ils acceptent aussi l'énoncé de Brenda et ne considèrent pas ainsi les nombres dont la somme des chiffres est 14. Il est donc important de s'assurer que la suite arithmétique tient compte de tous les cas.

Dans ces activités généralisations, un projet de preuve peut donc être engagé, projet qui consiste à dégager le nécessaire du contingent. Ce sont des situations intéressantes où le raisonnement déductif ne fonctionne pas seul. Une fois dégagé ce qui apparaît général, une preuve pourra s'en suivre, preuve qui s'appuie sur les propriétés du pattern ou des nombres.

Dans la figure 9, la preuve pourra reposer sur les propriétés du carré, si est assuré le fait qu'on a toujours un carré: comme on a toujours 4 côtés, il faut multiplier le nombre de carreaux sur un côté du carré par 4, mais dans ce cas les coins sont comptés deux fois donc il faut soustraire 4 carreaux.

On retrouvera cette fonction de généralisation de l'algèbre à divers moments du premier cycle mais plus particulièrement en 1ère secondaire. À ce niveau, l'objectif de ces activités de généralisation est d'introduire les élèves à un rôle de l'algèbre et à la symbolisation algébrique. Les élèves n'auront pas à manipuler les symboles.

> *"Toutes les propriétés et règles qui peuvent se généraliser facilement devraient être des prétextes pour amener l'élève à utiliser le langage algébrique. Par exemple, après avoir découvert la règle qui transforme un nombre en un autre, l'élève apprendra à l'exprimer en passant progressivement d'un langage descriptif à un langage symbolique, lequel tient compte des règles de base du langage algébrique."* (Programme d'études de secondaire I, p. 23.)

### 3.2.2 Validation dans les manuels

En 1ère secondaire, certains objectifs du programme[29] sont marqués d'un astérisque, indiquant ainsi qu'ils préparent à l'algèbre qui sera abordée plus spécifiquement en 2e secondaire. Il s'agit d'amener les élèves vers l'écriture algébrique en les plaçant dans des situations où ils pourront observer des régularités et *exprimer en langage symbolique la règle reliant un nombre et son rang dans une suite.* Comme nous l'avons dit, il s'agit donc de construire des formules, ce qui apparaît une occasion privilégiée de validation: c'est vrai pour ce cas, mais <u>est-ce toujours vrai</u>? <u>pourquoi</u>? Nous nous sommes donc penchée sur les sections portant sur les suites en cherchant ces deux questions ou une explication correspondant à une réponse à ces questions. Nous avons cherché aussi si les conditions permettant de répondre à ces questions

---

[29]Objectifs intermédiaires 2.1 du programmes d'études, mathématique secondaire 116.

étaient présentes, c'est-à-dire, les aspects des consignes sur lesquels l'élève pourrait s'appuyer pour construire et valider sa formule: formulation de la régularité, contexte, dessins... Nous avons analysé quatre volumes: *Scénarios, Carrousel, Les Maths et la vie* et *Dimensions.*[30] Les trois premiers sont les plus utilisés dans les écoles. Le quatrième est relativement peu utilisé, mais une option marquée pour la résolution de problèmes, étant donnée la quantité de problèmes non conventionnels qui y sont proposés, pouvait apporter un point de vue original.

Sauf exceptions, on a affaire à des suites arithmétiques. Pour trouver le terme général, on peut raisonner sur l'écart entre les termes comme le montre la figure 11a, ou chercher à mettre directement en relation le terme et son rang, c'est le choix des manuels. Pour trouver cette relation, entre le terme et son rang, on propose un tableau mettant en parallèle la suite de nombres étudiée et les nombres naturels ou la suite des termes et leur rang (à la manière de la figure 11b). Le passage d'une suite à l'autre se fait à l'aide d'opérateurs comme l'explicite *Dimensions.* Pour construire la formule il s'agit de trouver ces opérateurs.

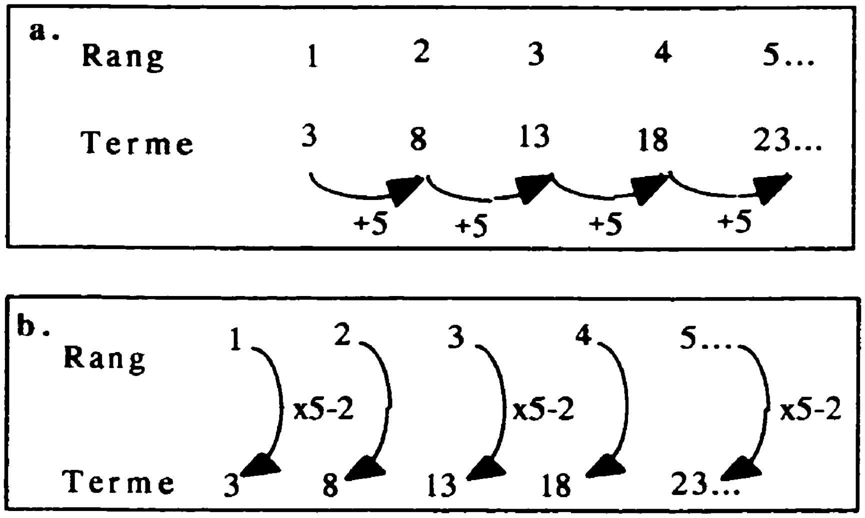



**Figure: 11:** Suites arithmétiques

Quelle stratégie peut-on envisager pour trouver ces opérateurs? En fait les manuels n'en proposent pas. Dans *Les Maths et la vie* la présentation ressemble plus à une devinette qu'à autre chose. En fait, si aucune alternative à la devinette n'est proposée aux élèves et qu'aucun moyen ne leur est donné pour fonctionner autrement,

---

[30]Soulière & al. (1993), *Scénarios I,* pp. 10 à 122 et 152 à 157; Patenaude & al. (1993), *Dimensions mathématiques 116,* tome I, pp. 56 à 71; Breton (1993), *Carrousel mathématique 1,* Tome I; I ; Maurer & al. (1993), *Collection Les Mathématiques et la vie,* 1re secondaire, pp. 157-159.

tôt ou tard on doit leur fournir un modèle, la formule *(Dimensions* et *Les Mathématiques et la vie).* Un encadré (soulignant ainsi que c'est important) peut même fournir, après quelques jeux de devinettes, deux formules, l'une qui permet de trouver un terme étant donné son rang et l'autre qui permet de trouver le rang étant donné un terme, (voir encadré ci-dessous). Nous pouvons nous demander s'il faut apprendre ces formules.

> Dans la suite des **nombres pairs**, c'est-à-dire la suite 0, 2, 4, 6, ...
>
> - pour trouver le **rang** *r* d'un terme *t*, tu te sers de cette formule-ci:
>   $r = t \div 2 + 1$
> - pour trouver le **terme** *t* de rang *r*, tu te sers de la formule que voici:
>   $t = (r - 1) \times 2$
>
> Extrait de *Les Mathématiques et la vie*, secondaire I, p. 59.

La compréhension de ces formules est reportée aux niveaux ultérieurs comme il est mentionné dans le manuel.

> " ***Pas de panique:*** *ces formules, ce n'est pas sorcier. Tout le mystère s'éclaircira avant la fin du secondaire...* ***patience!*** "

Les manuels *Scénarios* et *Carrousel* ne fournissent pas de formule mais le premier confie la tâche de production de formule aux exercices et le deuxième mise sur un procédé de répétitions duquel, espère-t-on, surgira la formule (figure 12).

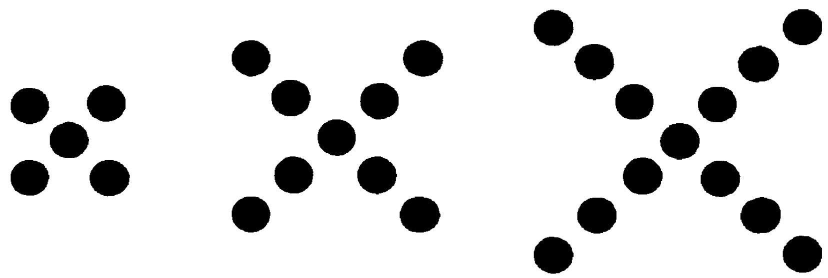
Ainsi, dans ce dernier cas, sont proposées plusieurs situations sans explication avec des tâches à réaliser; elles sont présentées toujours sur le même modèle: suites de patterns, tableau de valeurs numériques à produire, régularité à identifier pour passer d'une forme à l'autre, règle à trouver pour trouver chaque terme étant donné son rang, terme à trouver en utilisant la règle. La répétition d'exercices toujours de même format amène à constater une régularité dans la formule elle-même (an+b): l'écart entre deux termes (a) apparaît toujours comme coefficient du rang (an)! Il s'agit alors pour trouver le terme constant (b) de soustraire du premier terme la raison (premier terme moins raison=b) ou d'ajuster la formule en vérifiant pour un terme ou deux. La vérification suivie de l'ajustement valide la formule. Il apparaît clair que cette suite de situations a pour objectif de dégager une formule générale (par répétitions) et les instructions données dans le guide d'enseignement confirment ces observations: "*le tableau est la clé de la compréhension.*"

Notons que le cadre de présentation choisi par les auteurs élimine la possibilité d'envisager d'autres formules équivalentes à ax+b même si elles pourraient être plus naturelles. La production de formules diverses pourrait permettre un travail non formel sur l'équivalence des procédures et des expressions algébriques, même en $1^{ère}$ secondaire.

Malheureusement, les suites autres qu'arithmétiques sont utilisées de façon marginale ainsi l'élève n'est pas ou peu confronté à d'autres modèles que celui proposé par les formules (an+b ou an-b). Il n'est pas confronté non plus avec des problèmes où la production d'une formule en se fiant à quelques cas n'est pas valide pour l'ensemble des cas (comme dans la figure 10). Le plus souvent, le travail est décontextualisé et se fait uniquement à partir de table de valeurs. Parfois, des patterns géométriques accompagnent la suite de nombres, comme dans l'exemple suivant tiré de *Carrousel* (figure 12).

***ACTIVITÉ 3: UNE SUITE DE BOUTONS***

On a construit cette suite avec des boutons



Voici le travail demandé:

1° Dessiner les deux prochaines formes

2° Déterminer le nombre de boutons nécessaires pour la $6^e$ et la $7^e$ formes.

| Rang de la forme | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de boutons | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

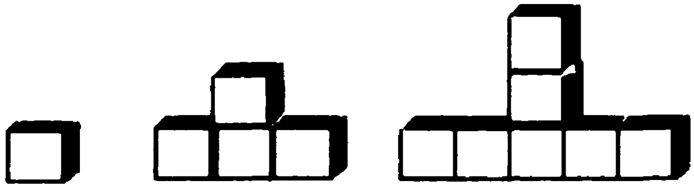
3° Décrire en mots la régularité que l'on observe dans cette suite.

4° Comment peut-on trouver chaque terme en utilisant le rang qu'il occupe dans la suite?

5° Déterminer le nombre de boutons nécessaires pour construire la $40^e$ forme.

***ACTIVITÉ 4: UNE SUITE DE CUBES***

On construit cette suite avec des cubes.



Voici le travail demandé:

1° Dessiner les deux prochaines formes.

2° Déterminer le nombre de cube nécessaires pour la 6$^{e}$ et la 7$^{e}$ formes.

| Rang de la forme | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de cubes | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

3° Décrire en mots la régularité que l'on observe dans cette suite.

4° Comment peut-on trouver chaque terme en utilisant le rang qu'il occupe dans la suite?

5° Déterminer le nombre de cubes nécessaires pour construire la 50$^{e}$ forme.

*Carrousel mathématique I*, Tome I, p.158

**Figure 12:** Suite de patterns et tableau de valeurs

Parfois aussi le manuel présente des problèmes à histoire de la vie courante. On a donc là la possibilité d'une validation qui s'appuie sur les propriétés de la figure ou sur les caractéristiques du contexte, car après tout ce sont de ces contextes que sont tirées les suites de nombres. Toutefois, les contextes ne sont nullement utilisés pour produire la (ou une) formule. Dans le problème de Trisha ci-dessous (*Carrousel mathématique I,* Tome 1, p. 164), il n'y a pas vraiment de pertinence à passer à travers un tableau de valeurs pour "raisonner" de la manière vue plus tôt or, semble-t-il, c'est ce que le manuel demande implicitement.

> Ce matin, Trisha a fait 15 tractions. Au cours des prochains jours, elle se propose de faire 5 tractions de plus chaque jour?
>
> a . Quelle suite obtient-on si l'on considère le nombre de tractions effectuées chaque jour?
>
> b . Quelle règle décrit cette suite si on la forme à partir du nombre de jours?
>
> c . Combien de tractions Trisha fera-t-elle la 20$^{e}$ journée?

De même, lorsque la consigne est de trouver le rang, un terme étant connu, on ne peut s'appuyer sur un raisonnement préalable, sur la figure ou le contexte qui a permis la construction de la formule, pour faire un raisonnement à rebours. On ne peut qu'essayer des valeurs dans la formule jusqu'à trouver la bonne réponse: c'est la procédure encouragée dans le manuel.[31]

Le discours utilisé est très différent selon les manuels. Le discours peut être très expéditif, sans utilité, mal articulé, prêtant même à confusion[32] *(Scénarios)*. Il peut consister en un exposé préalable décrivant comment on construit une suite à l'aide d'opérateurs appliqués à la suite des nombres naturels *(Dimensions)*. C'est cette construction qui servira en quelque sorte de validation au modèle donné subséquemment pour construire la formule (an+b). On a affaire à une validation opératoire implicite où on présente une procédure qu'on adopte en pratiquant (Joshua et Joshua, 1987). Parfois, il n'y a pas de discours explicatif mais plutôt une répétition de situations et de tâches, toujours sur le même format, accompagnées d'exercices qui recopient ce format *(Carrousel)*. Ici aussi, la validation peut être qualifiée d'opératoire implicite; bien que le modèle (la formule) ne soit pas donné, il doit surgir de façon univoque de la répétition des exercices.

La construction de formules apparaissait à un endroit particulièrement adéquat pour conduire les élèves vers une démarche de preuve qui supposerait une dialectique entre le modèle (la formule) et le réel (le pattern géométrique). Or, en aucun cas on ne trouve un embryon d'une telle préoccupation (dans aucun des quatre volumes consultés). Aucun "est-ce toujours vrai" ni aucun "pourquoi". Il ne s'agit pas de placer l'élève dans une dynamique de construction de formule ou de généralisation, ni dans un manuel ni dans l'autre. Même si parfois les contextes et patterns géométriques présentés peuvent potentiellement être utilisés pour faire raisonner les élèves et les faire entrer dans une démarche de preuve, vraisemblablement ils n'ont pas été conçus avec cette préoccupation.

L'ensemble du programme d'études secondaires accorde une place importante à la formulation et à la construction de règles exprimant les relations entre grandeurs liées, on pourrait s'attendre à ce que des moyens soient envisagés pour valider ces règles. Or, il apparaît que dans les manuels de 1ère secondaire, l'accent est mis bien

---

[31]On peut résoudre informellement une équation en faisant le raisonnement inverse de celui qui a mené à la construction de la formule. Or, rien dans les manuels analysés, ne le permet.

[32]Dans *Scénarios 1*, il y a ambiguïté dans l'utilisation de l'expression "règle de transformation" tantôt utilisée pour parler le la règle permettant de passer d'un terme à l'autre, tantôt utilisée pour parler de la relation entre le terme et son rang.

plus sur la construction de tableaux, le recours à un modèle connu et l'utilisation de formules que sur la construction du modèle ou des formules.

### 3.3 Résolution d'équations en 2$^e$ secondaire

En 2$^e$ secondaire c'est la résolution de problèmes se traduisant par une équation du 1$^{er}$ degré à une inconnue qui occupe la place centrale dans les objectifs du programme d'études. Avant d'entreprendre l'analyse des manuels pour les sections s'y rapportant (en 3.3.2), nous présentons quelques commentaires préalables sur la résolution d'équations. Nous soulevons plusieurs questions entre autres en ce qui concerne les équations équivalentes et la résolution de problème.

#### 3.3.1 Validation lors de la résolution d'équations

L'algèbre est aussi outil de résolution de problèmes. On y retrouve les problèmes classiques d'algèbre qui demandent de poser une équation pour trouver les valeurs d'une quantité inconnue. Différents types de validation interviennent à différentes étapes. Lors de la mise en équation, une validation qui relève plus de la vraisemblance peut avoir lieu. Lors de la résolution de l'équation, une validation plus ou moins formelle pourra être utilisée pour s'assurer de la validité de la procédure. À la fin, une fois la réponse obtenue, il convient de s'interroger sur l'unicité ou non de cette réponse, sur la possibilité que des solutions inadéquates soient apparues en cours de résolution et sur sa plausibilité dans le contexte de résolution. Attardons-nous sur la validation lors de la résolution et à la fin, lorsqu'une valeur, ou plus, est trouvée.

Prenons l'exemple suivant où il s'agit de résoudre l'équation $\sqrt{-2-x} = x + 2$ :

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{-2-x} = x+2 & (1) \\
\Rightarrow -2 - x = (x+2)^2 & (2) \\
\Rightarrow -2-x = x^2 + 4x + 4 & (3) \\
\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 & (4) \\
\Rightarrow (x+3)(x+2) = 0 & (5) \\
\Rightarrow x + 3 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 & (6) \\
\Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = -2 & (7)
\end{array}$$

(8) Revenons à l'énoncé de départ:
si $x = -3$ l'égalité de départ n'est pas vérifiée, puisque $\sqrt{-2-x}$ demande une réponse positive.
En fait, au départ, il fallait poser la condition $x + 2 \geq 0$ puisqu'en élevant au carré, cette condition était perdue.

Dans cet exemple, la chaîne de déduction de la colonne de gauche assure que si $\sqrt{-2-x} = x+2$ alors x = -3 ou x = -2. Cependant, il se peut qu'en élevant au carré les expressions de chacun des membres de l'équation, à la ligne 2, nous ayons trouvé des valeurs pour "x" qui ne sont pas des solutions de l'équation de départ. Alors un retour sur l'équation de départ (colonne de droite) permet d'éliminer ces valeurs et éventuellement de reformuler les conditions de départ. On pourra ainsi en arriver à formuler une règle telle "Résoudre une équation de forme $\sqrt{A} = B$ est équivalent à résoudre le système ($A = B^2$ et $B \geq 0$). Autrement dit, pour que les solutions soient garanties par la méthode de résolution, il faut s'assurer que les équations produites soient équivalentes.

Bien sûr, la solution est aussi soumise au contexte présenté et des solutions seront à rejeter si elles n'ont pas de sens dans le contexte donné: des fractions de poissons rouges dans un aquarium ou une aire négative, par exemple.

### 3.3.2 Analyse de manuels

L'algèbre est officiellement introduite en 2$^e$ secondaire avec au coeur la résolution d'équations du premier degré à une inconnue et de problèmes (classiques) à contexte se traduisant par de telles équations. L'accent peut être mis sur la résolution de problèmes ou sur la résolution d'équations selon les manuels. Nous prendrons comme entrée la résolution d'équations qui ne peut toutefois se dissocier de la résolution des problèmes puisque la première sert la deuxième. Par problèmes, nous entendons les problèmes classiques d'algèbre qui se résolvent en posant une équation comme celui-ci:

> L'équipe de ringuette a recueilli 90$ de plus que l'équipe de ballon sur glace. Pour sa part, l'équipe de hockey a recueilli trois fois plus d'argent que l'équipe de ringuette. Ensemble ces trois équipes ont recueilli 1248$. Combien d'argent l'équipe de ringuette a-t-elle recueilli?
>
> *Mathématique 2e secondaire. Scénarios 2*, p. 55 no 1c

Nous évaluerons quand même la place des problèmes dans l'organisation de la séquence d'enseignement que propose le manuel, puisque nous pensons qu'elle conditionne la validation. L'analyse de cette section de manuels s'impose particulièrement en raison de l'importance qu'elle revêt, traditionnellement, dans les programmes et par l'intérêt qu'on y accorde dans la recherche en didactique (Kieran, Boileau et Garançon, 1993; Filloy et Rojano, 1989; Margolinas, 1989).

Trois manuels de 2$^e$ secondaire ont été analysés plus particulièrement: *Carrousel mathématique 2, Scénarios 2* et *Dimensions. Mathématiques 216.*[33] D'autres ont été consultés de manière à avoir des points de comparaison. Nous nous sommes posé les questions suivantes: Comment sont amenées et justifiées les règles de manipulation des équations? Si on utilise un argument portant sur les équations équivalentes, quel est son rôle et comment est-il articulé avec le reste? Comment valide-t-on la réponse trouvée? Se pose-t-on la question du nombre de solutions? Quel est le but, implicite ou explicite, de la résolution d'équation? Quels moyens donne-t-on aux élèves pour s'assurer que l'équation posée est valable?

**a. Introduction aux règles de résolution**

Sauf dans *Scénarios 2*, les règles de manipulation des équations sont introduites à l'aide d'une analogie avec la balance: une équation c'est comme une balance en équilibre, il s'agit d'opérer de manière à maintenir la balance en équilibre *(Dimensions, Carrousel, Univers mathématique 2, Mathématique Soleil 3).* La formulation de cette analogie est explicite *(Dimensions, Carrousel, Mathématique Soleil 3).* La balance n'est pas le contexte d'un problème à résoudre dans lequel des masses seraient impliquées et qui mènerait à envisager des stratégies de résolution d'une équation tirée du problème. La balance illustre les équations par analogie et les règles de transformations sont illustrées l'une après l'autre en s'appuyant sur cette analogie. Ainsi les règles sont validées grâce à cette analogie: "c'est comme..."

Au contraire dans le manuel *Scénarios* (p. 177 à 180), les règles de transformation des équations sont déduites lors de la résolution d'un problème. Il s'agit de deux contenants de sucre de même grosseur remplis de deux manières différentes avec des quantités connues et inconnues. Ce problème sert d'exemple de référence et de tremplin vers la résolution algébrique. Il est choisi de telle sorte que pour le résoudre on utilise naturellement les règles de manipulation qui conservent l'égalité: la résolution du problème se fait par l'intermédiaire de ce que nous pourrions appeler un raisonnement naturel (en mots, sans nécessité de connaissances nouvelles):"*Deux quantités (...) dans le récipient de gauche équivalent à deux quantités (...) dans celui de droite. Si on les enlève* [ces deux quantités égales] *on peut dire que les quantités qui restent sont égales, car on a enlevé la même quantité de sucre dans chacun des*

---

[33]Jordi & al. (1994), *Dimensions mathématiques 216*, Tome 1, pp 109 à 145. Breton (1994), *Carrousel mathématique 2*, Tome I, pp 223 à 271. Guay et Lemay (1994), *Scénarios 2*, pp. 163 à 189.

*récipients. (...)"* Si les raisons utilisées qui justifient les manipulations sont liées au contexte et aux nombres impliqués, elles pourraient toutefois avoir une portée générale. Mais la généralisation ne se fait pas dans le texte (on reste collé au cas particulier). La généralisation va se faire par répétition d'exemples et elle sera renforcée par l'énoncé d'une première règle: *"l'important c'est d'effectuer la même opération sur chacun des membres de l'équation."* Cette première règle ne précise pas toutefois les opérations valides qui assurent l'équivalence des équations. Finalement, on précisera les règles en donnant les opérations valides. Des exercices suivront.

Dans les deux cas, la balance et la situation des contenants de sucre, il y a une tentative de donner du sens aux règles de manipulation de manière à ce que les élèves se les approprient en les comprenant. Du point de vue de la modélisation, nous pouvons nous interroger sur ce qui constitue le modèle à transmettre et le domaine expérimental que modélise le modèle (Joshua et Joshua, 1987). Si nous considérons les règles de manipulation des équations comme le modèle à transmettre alors les manipulations sur la balance et celles sur les contenants de sucre appartiennent au domaine expérimental. Quelle est la place accordée à cet expérimental et quel est son rôle? La balance sert d'image aux équations et le maintien de l'équilibre au maintien de l'égalité. La validation des règles se fait grâce à cette analogie dont la pertinence apparaît aller de soi. L'analogie n'est pas accessoire mais de quel sens mathématique est-elle créatrice? Les règles n'apparaissent pas parce qu'il faut qu'il en soit ainsi (par nécessité) étant donnée l'égalité des expressions et une évidence (si on enlève par exemple une même quantité à deux quantités égales alors les quantités restantes restent égales) mais parce que c'est comme ça sur la balance.

Avec la situation-problème (contenants de sucre) de *Scénarios*, la validation du modèle (les règles) tient d'abord à une évidence puis à la répétition de situations. La situation de départ sert d'exemple de référence, des exemples de renforcement et de pratique suivent. Dans la classe toutefois, la validation pourrait se faire autrement. Le contexte pourrait jouer le rôle de *milieu*, l'exposé du manuel pourrait se traduire en *situation d'action* (Brousseau, 1986) qui pourrait être suivie d'une *situation de formulation* puis de *validation*. Dans la situation de validation devrait se poser la question de la généralité des règles utilisées pour préserver l'égalité mais aussi celle de l'unicité de la réponse.

À part la balance et la situation des contenants de sucre, un autre "argument" est utilisé pour convaincre de la vérité des règles: on applique ces règles sur des égalités numériques et on constate que l'égalité est conservée *(Carrousel*, conjointement avec la balance). Une expérimentation sur un cas particulier est faite pour convaincre de la justesse de chacune des règles mais jamais, ici comme ailleurs, la question "est-ce que c'est toujours le cas" n'est posée!

**b. Argument assurant la validité de l'ensemble-solution**

La balance et les égalités numériques servent dans les manuels à introduire les règles de manipulation des équations seulement. La résolution des équations en appliquant ces règles vient après avoir présenté les équations équivalentes.

En fait la conservation de l'égalité ne suffit pas à s'assurer des solutions. Alors deux choix se présentent. En s'appuyant sur les propriétés des opérations, il est possible de se convaincre qu'il existe une seule solution auquel cas il s'agit de vérifier si la solution est bien celle cherchée en remplaçant l'inconnue par la valeur trouvée dans l'équation. Sinon, il faut savoir que les règles utilisées conservent les solutions, c'est-à-dire que les équations sont équivalentes.

Plusieurs volumes consultés traitent de l'équivalence des équations, mais l'approche peut être très différente. La démonstration de l'équivalence logique des équations est rare: si a=b alors a+c=b+c et de même si a+c=b+c alors a=b. Nous en avons trouvé un exemple dans Galion (1975), en pleine époque du courant des *mathématiques modernes* (figure 13).

$E$ est un ensemble muni d'une loi de composition notée $*$

$a, b, c$ désignent des éléments de $E$.

Nous allons démontrer le **théorème**:

Dans $E$, **si** $a = b$ **alors** $a * c = b * c$

En effet, si "$a = b$", $(a,c)$ *et* $(b,c)$ désignent le même couple, ils ont donc la même image par la loi notée $*$

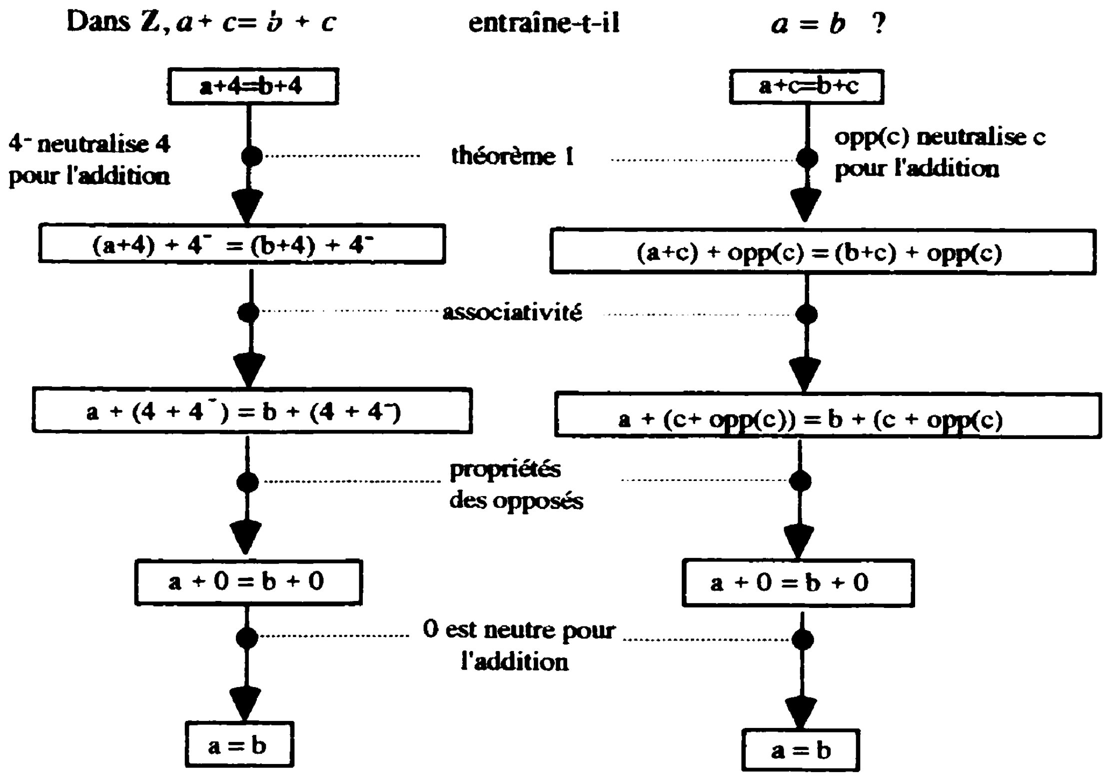
Donc $a * c = b * c$

*MATHÉMATIQUE en Quatrième*, 1975. Fiche 12, 1

Tu viens de voir le théorème 1:

Dans **Z**, **si** $a = b$ **alors** $a + c = b + c$

Tu vas étudier la question suivante:




On a ainsi démontré le théorème 2:

Dans Z, si $a + c = b + c$ alors $a = b$

*MATHÉMATIQUE en Quatrième,* 1975. Fiche 12, 3

**Figure 13:** Équivalence d'équations

Suite à la démonstration des deux propositions, le manuel conclut à l'équivalence: "Dans Z, $a = b$ équivaut à $a + c = b + c$." C'est en utilisant le modèle de la démonstration que les élèves devront résoudre les équations. Cette approche est-elle caractéristique du programme de la réforme des années 70? C'est fort possible. Elle apparaît comme une exception dans l'ensemble des livres consultés qui sont issus des programmes subséquents.

Souvent, les équations équivalentes sont définies comme des équations ayant même ensemble solution (*Carrousel,* 1994, *Dimensions,* 1994, *Univers mathématique,* 1994, *Mathématiques Soleil 3,* 1987, *Horizons mathématiques,* 1977). Dans les vieux volumes consultés (Réunion de professeurs, année inconnue; Petrie & al., 1954) et certains plus récents dont *Scénarios* (Kelly & al., *Mathematics 9,* 1987; Guay et Lemay, *Scénarios* , 1994), cet aspect des équations équivalentes n'est pas abordé.

Le plus souvent donc, on définit l'équivalence des équations par le fait qu'elles ont le même ensemble solution et on introduit la méthode de résolution des équations, dite des équations équivalentes. Parfois, cette méthode est précédée de méthodes diverses de résolution. Comme première méthode de résolution des équations, certains manuels utilisent celle des essais successifs appelés aussi "essais et erreurs" *(Carrousel, Dimensions),* sans que soit envisagée toutefois la possibilité de plusieurs solutions. Cependant, il arrive que soit présenté un grand nombre d'équations diverses dont des équations à plusieurs solutions *(Carrousel).* La confrontation à ces équations peut permettre à l'élève de s'interroger sur les opérations en jeu et leurs propriétés, implicitement tout au moins. Devant $x^2=4$, il faut penser que deux valeurs de x peuvent rendre cette égalité vraie. Par contre, l'élève "sait" que $2x+3=5$ a comme solution unique $x=1$ parce que tout autre valeur de x donnerait nécessairement une réponse différente de 5 lorsqu'on calcule $2x+3$. De tels exercices contribuent à une validation implicite dans la mesure où les propriétés des opérations se dégagent de l'expérience et du sens des nombres; mais ne faut-il pas les expliciter en 1ère secondaire ou tout au moins poser explicitement la question du nombre de solutions?

Ensuite est introduite la "méthode des équations équivalentes", comme nouvelle méthode de résolution. Cependant, cette introduction ne se fait pas en réponse à un doute sur la possibilité que les solutions ne soient pas conservées. Le passage se fait directement des règles qui conservent l'égalité au fait que ces règles conservent les solutions par une tentative de montrer que tel est le cas. Lorsque les équations équivalentes sont définies comme des équations ayant même ensemble solution (ce qui est le cas la plupart du temps) la validation consiste en exemples montrant que l'application des règles de transformations des équations conserve les solutions. Par exemple, la solution d'une équation est trouvée par essais, les règles qui conservent l'égalité (déjà introduites) sont appliquées à tour de rôle à l'équation de départ, puis il y a vérification que la solution reste la même en remplaçant l'inconnue des nouvelles équations par la solution de l'équation initiale *(Mathématiques Soleil 3, Dimensions* et *Univers mathématique).* On conclut que les équations sont équivalentes et que résoudre consistera à trouver des équations équivalentes de plus en plus simples. Or, si nous appliquons exactement le même procédé de vérification, nous montrons que l'opération "mettre au carré" donne des équations équivalentes:

> Introduisons une nouvelle règle: élever au carré conserve les solutions.
> Nous avons trouvé par essais que la solution de $x + 2 = 2x$ est $x = 2$.
> Vérifions que $x = 2$ est aussi solution de $(x + 2)^2 = (2x)^2$.
> En effet, $(2 + 2)^2 = (2 \cdot 2)^2$.
> Donc $x + 2 = 2x$ est équivalent à $(x + 2)^2 = (2x)^2$

Ces exemples visent-ils à convaincre? Peut-être mais le procédé est alors douteux puisqu'il ne permet pas de discriminer entre équations équivalentes et équations qui ne le sont pas. Une autre hypothèse apparaît plausible: les exemples ne servent pas tant à convaincre qu'à définir ce qu'on entend par équations équivalentes, celles-ci n'étant introduites que pour décrire la procédure de résolution d'une équation: "résoudre consiste à construire des équations équivalentes de plus en plus simples." Il n'y a pas souci de validation.

Parfois les élèves seront conduits ensuite à travailler la construction d'équations équivalentes en parallèle avec la résolution d'équations *(Dimensions)*, à la manière d'une démonstration de la double implication bien que le but ne soit pas de prouver quoique ce soit, selon toute apparence. Il se peut que ce travail contribue à développer le sens que l'une et l'autre des équations, celle de départ et la finale où l'inconnue est isolée, sont interchangeables.

Un autre exemple, dans *Carrousel,* illustre la place ambiguë qu'occupent les équations équivalentes dans le discours de l'exposé du manuel. Sont énoncées, d'une part, les *règles de transformations des égalités* (ex.: si $a=b$ alors $a+c=b+c$) et, d'autre part, les *règles de transformations des équations* (ex.: si $ax+b=c$ alors $ax+b+n=c+n$). Suivent des phrases trouées qui, une fois complétées, *résument les règles de transformations des égalités et des équations*. Sous le titre "Règles de transformations des égalités" (1), on conclut qu'on ne modifie pas la valeur de vérité d'une égalité si on additionne la même quantité à chaque membre de l'égalité. Sous le titre "Règles de transformations des équations" (2), on conclut qu'on conserve les solutions d'une équation si on additionne la même quantité à chaque membre d'une équation. C'est comme si (2) était la traduction de (1) pour les équations. C'est comme s'il y avait un glissement de la conservation de l'égalité vers la conservation des solutions. Puis (peut-être parce que ce n'est pas évident), diverses questions sont posées: une équation est donnée avec sa solution, il faut transformer l'équation donnée en appliquant une règle et répondre à la question "quelle est la solution". Les règles déjà énoncées sont ainsi passées à tour de rôle. Ces questions semblent avoir comme rôle de vérifier qu'effectivement l'application des règles conserve la solution. Il s'agirait donc de convaincre. La conviction devra venir toutefois de la vérification sur un unique cas.

Si nous voulons montrer que les règles de manipulation des équations ne changent pas les solutions, comment procéder autrement qu'en vérifiant? Dans le cas où nous savons qu'une seule solution existe, la seule vérification suffit alors à garantir de la bonne réponse. C'est ce que font les manuels *Mathematics 9, Intermediate mathématics, et Scénarios* qui sont les seuls[34] à mentionner que la solution est unique bien que ce soit accessoirement. La vérification devient alors "preuve" dans *Scénarios.* Il n'est pas essentiel dans ce contexte d'utiliser l'argument comme quoi les équations sont équivalentes à moins qu'on s'interroge sur la procédure de résolution elle-même. Mais de toute façon, l'équivalence est presque toujours "justifiée" elle-même par vérification. Quelle est la place alors de l'argument des équations équivalentes? Elle n'apparaît pas claire. Les équations équivalentes seraient-elles un reliquat de la réforme des années 70? Nous pensons qu'en fin de compte, dans les manuels, les équations équivalentes sont bien commodes pour formuler une méthode de résolution des équations (résoudre une équation c'est trouver des équations équivalentes de plus en plus simples) et qu'il y a très peu à voir avec la validation.

Bien sûr, si les équations successives lors de la résolution ne sont pas équivalentes, les solutions trouvées ne seront pas nécessairement celles de l'équation de départ. L'accent mis sur les équations équivalentes peut anticiper sur des manipulations qui ne conserveraient pas les solutions, comme l'exponenciation lors de la résolution d'équations avec radicaux, par exemple. Mais si tel est le cas, les vérifications utilisées dans certains manuels sont d'autant plus étonnantes qu'elles ne permettent pas de discriminer entre des équations qui sont équivalentes et celles qui ne le sont pas. Nous en avons donné un exemple précédemment.

### c. Vérification de la solution

Tous les manuels recommandent de vérifier la réponse obtenue après manipulation des équations. Souvent la vérification appartient aux étapes recommandées lors de la résolution d'un problème *(Dimensions, Carrousel, Univers mathématique).* Dans *Mathematics 9*, les auteurs précisent qu'au fur et à mesure que le nombre d'étapes augmente le risque d'erreurs augmente. Dans *Scénarios* la vérification sert à montrer que la réponse obtenue conserve bien l'égalité. Mais la raison de cette vérification n'est que rarement explicitée. Il semble bien que, la plupart du temps, la vérification ait pour objet de vérifier s'il n'y a pas eu erreur dans la procédure utilisée

---

[34]Galion, 1975, le déduit de la preuve formelle de l'équivalence (figure 13).

puisque généralement la méthode de résolution consiste à construire des équations équivalentes de plus en plus simples. Mais comme nous l'avons vu, la vérification est aussi utilisée pour montrer et convaincre. Qu'est-ce que l'élève comprend de toutes ces vérifications dont les différents rôles ne sont pas clairement explicités?

Un manuel *(Scénarios)* appelle preuve une telle vérification. En fait cette attitude est assez cohérente avec l'ensemble de son propos. En effet, il souligne (bien que la remarque soit marginale) que cette solution est unique: "*comme le nombre total de jetons est connu, y ne peut prendre qu'une seule valeur pour rendre la relation d'égalité vraie.*". (L'équation est de type "ay+b=c" et "c" est le total dont on parle.) Cette remarque toutefois semble être faite bien plus pour indiquer que la lettre a maintenant changé de statut car on ajoute: "*Dans ce contexte, y est une inconnue.*" [35] La remarque reste cependant pertinente puisqu'elle marque ainsi la différence entre la situation traitée et les précédentes qui se préoccupaient de relations entre variables et de graphiques, et où on faisait prendre à la lettre plusieurs valeurs. Toutefois le fait que la lettre ne prenne qu'une valeur n'est pas pris en compte explicitement lors de la validation de la solution.

### d. Place de la résolution de problèmes se traduisant par une équation

Dans les manuels les plus utilisés avant le nouveau programme *(Mathématiques Soleil* et *BMS)*, la résolution de problèmes à contexte dits algébriques (se traduisant par une équation) apparaissait en fin de chapitre sur l'algèbre, après l'introduction des méthodes de résolutions algébriques. Avec le nouveau programme, la résolution de tels problèmes apparaît davantage entremêlée à l'introduction des diverses notions algébriques de manipulation, du début jusqu'à la fin du travail algébrique. Dans deux des trois manuels analysés *(Scénarios et Dimensions)*, un problème est proposé avant même que ne soient introduites les règles de résolution des équations. Dans *Scénarios*, les règles de manipulation des équations de type $ax + b = cx + d$ sont déduites à partir du problème des contenants de sucre dont nous avons parlé plus tôt. La résolution du problème se fait en raisonnant directement sur les quantités de sucre et la solution s'impose d'elle-même. Dans *Dimensions* (Tome 1 p.119), d'entrée de jeu un problème est présenté avec des étapes pour le résoudre qui ne comprennent pas pour l'instant une méthode de résolution des équations:

---

[35] Le guide du maître confirme en précisant qu'il ne faut pas entrer dans un débat sémantique. Notons que la distinction que les auteurs font entre inconnue et variable est ici discutable!

1. Déterminer ce que l'on cherche.
2. Choisir un symbole que l'on utilisera pour exprimer la quantité inconnue.
3. Construire l'équation en langage courant et en langage algébrique.
4. Rechercher la solution de l'équation, c'est à dire la valeur numérique de l'inconnue qui rend égaux les deux membres de l'équation.
5. Vérifier l'exactitude de la valeur trouvée.

À l'étape 4, on propose d'utiliser une table de valeurs. L'identification de la valeur qui satisfait l'équation est suffisante ici si on accepte qu'il y ait une seule solution (ce qui n'est toutefois pas discuté).

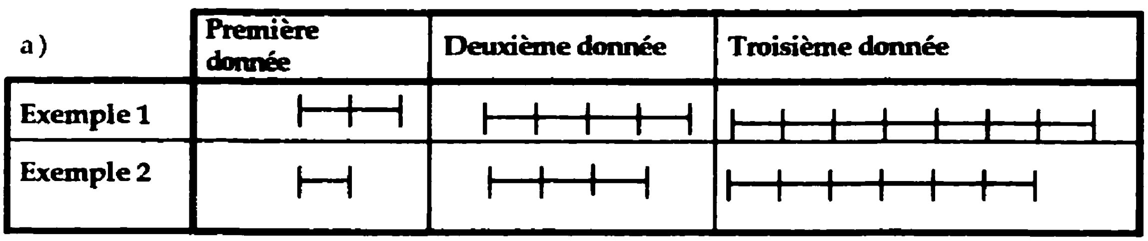
Le but semble être d'abord d'apprendre à résoudre les problèmes. Ce n'est qu'après que seront introduites les règles de résolution dans une autre section. Nous nous sommes interrogée sur les consignes de résolution des équations. Si l'objectif est la résolution de problèmes, la procédure de résolution des équations (consistant à construire des équations équivalentes de plus en plus simples) peut s'arrêter à partir du moment où il est possible de conclure. Est-ce le cas? Au contraire, il semble qu'il faille aller jusqu'au bout, c'est-à-dire jusqu'à isoler l'inconnue par manipulation des équations: il faut obtenir une équation composée uniquement de l'inconnue et de sa valeur *(Scénarios, Dimensions)*. À partir du moment où est engagée la procédure de résolution officialisée, il faut aller jusqu'au bout en appliquant une des règles précédemment vues pour conserver l'égalité. Ne risque-t-on pas alors de faire perdre de vue la finalité de l'opération qui est partie prenante du processus de validation (Margolinas, 1989)? Finalement, pour *Scénarios*, ce serait davantage le problème qui servirait les règles que l'inverse, tandis que pour *Dimensions*, même si la résolution de problèmes précède la résolution d'équations, celle-ci est travaillée indépendamment de la première.

Un autre aspect permet de juger de la place accordée à la résolution de problèmes se traduisant par une équation et à la validation. Comment s'assure-t-on que l'équation posée est juste ou plausible? En d'autres mots, les manuels donnent-ils des moyens qui permettraient à l'élève d'expliquer l'équation posée en référence au contexte? La réponse est le plus souvent non, mais quelques tentatives existent sous les recommandations sans doute du programme du ministère de l'éducation qui mettent l'accent sur la résolution de problèmes et sur l'utilisation de différents types de représentation.[36] Ainsi, outre l'identification de l'inconnue (sur laquelle insistent tous

[36]Transferts d'un mode de représentation à un autre: mots ou dessin, table de valeurs, graphique, règle

les manuels), les équations sont souvent données d'abord en mots. Quelques autres indices peuvent être soulignés: retrouver l'élément clé de la formulation qui permet décrire la relation "est égal à" et écrire des quantités liées l'une en fonction de l'autre *(Dimensions* et *Scénarios).* Il arrive que l'intention explicite d'aider à la mise en équation et, plus spécifiquement, à établir la relation entre les grandeurs s'accompagne d'un travail de représentations (dessins, schémas, tableau de valeurs, graphique) sur des problèmes où différents types de liens et d'organisation de ces liens sont impliqués[37] *(Scénarios*, le manuel et le guide du maître). Parmi ces représentations toutefois, le tableau (et le graphique plus tard) aura une place privilégiée et rarement des dessins, à portée générale, montreront la relation qui existe entre deux grandeurs; c'était le cas aussi pour les suites en 1ère secondaire. Les dessins tendent à rester particuliers; ainsi pour montrer qu'une grandeur variable est le double d'une autre, ou 5 de plus qu'une autre (figure 14), on illustrera plusieurs cas particuliers à la manière d'un tableau de valeurs. Ici encore l'analyse nous conduit à faire un constat qu'il pourrait être important d'investiguer: le général est toujours le produit de l'accumulation de particuliers.

Dans chacun des tableaux suivants, la même relation est exprimée à l'aide de deux exemples. Décris dans tes propres mots la relation qui existe entre la première et la troisième donnée.




*Mathématique 2e secondaire. Scénarios 2*, p. 125

**Figure 14:** Tableaux de valeurs

### 3.4. Approche fonction

Dans cette section, nous verrons que l'approche fonction est un fil conducteur pour le travail algébrique au premier cycle du secondaire ce qui, malheureusement

---

ou équation. Cf. Programme d'études, Mathématique 216, Objectif terminal 1.2, p. 26.

[37] Pour en savoir plus sur le type d'organisation des liens, le lecteur pourra consulter Bednarz N., Mary C., Janvier B., 1996.

conduit à une survalorisation de la table des valeurs.

### 3.4.1 Algèbres des relations - fonctions / algèbre des équations

L'algèbre peut être vu comme un outil de modélisation. On retrouve ce rôle lorsqu'on établit une équation pour rendre compte des relations d'un problème, mais aussi lorsque sont mises en relation des variables. C'est la majeure partie du travail qu'on retrouve sous les sections algébriques des manuels à partir du 3e secondaire où l'on étudie les relations *directes, partielles et inverses*, puis avec les autres fonctions valeur absolue, trigonométriques et logarithmiques.

En 3e secondaire, les sections des manuels réservées à l'algèbre traitent presque exclusivement de relations directes et partielles ($y=ax$ et $y=ax+b$). La résolution de problèmes avec résolution d'équations, telle que vue en 2e secondaire, a disparu comme objet d'étude. On retrouve également en 2e secondaire, des lectures et tracés de graphique et un retour sur les suites qui préparent au travail sur les relations. En 1ère secondaire aussi, la perche était tendue: le travail sur les suites consistait à mettre en relation un rang et son terme. Deux questions se posent. Fait-on le lien entre l'algèbre des relations et la résolution de problèmes se traduisant par une équation (à une inconnue), si oui comment? Cet accent "fonction" colore-t-il la validation en algèbre, si oui dans quel sens? Nous répondrons d'abord à la première question.

Sans avoir fait une analyse systématique des manuels de 3e secondaire, deux constats s'imposent. Le premier constat est que l'algèbre des relations et l'algèbre des équations sont traitées indépendamment. Il apparaît que très peu souvent, sinon jamais, le travail sur les relations entre variables se prolonge par une résolution explicite d'équation alors qu'il serait possible de poser une question menant à la résolution d'une équation: il s'agirait de fixer la variable dépendante et de demander la valeur de la variable indépendante ou de trouver la valeur qui fera que deux variables dépendantes seront égales. Non plus, la résolution d'équations n'est supportée par une représentation graphique. Il n'y a de lien ni pour marquer la ressemblance ni pour marquer la différence entre l'étude de la variation d'une grandeur en fonction d'une autre et la recherche de la valeur qui vérifie une égalité.[38]

Le deuxième constat est que lorsque le lien est fait (implicitement), il se fait par

---

[38]Nous ne retrouvons qu'une remarque dans *Scénarios 2* à l'effet que le statut de la lettre n'est plus le même. Mais nous ne retrouvons aucune allusion semblable dans *Scénarios 3* (pp. 122 à 140, pp. 200 à 216).

la table de valeurs. Dès le travail sur les suites en 1ère secondaire, la table de valeurs est le support privilégié pour "raisonner". En 2e secondaire, dans le prolongement du travail sur les relations fait à l'aide d'une table de valeurs, les équations seront résolues à l'aide d'essais numériques. *Dimensions 216,* illustre cette tendance. Il s'agira de trouver dans le tableau, la valeur telle que l'égalité sera vérifiée. Le passage systématique par la table des valeurs donne une présentation cohérente et homogène, mais cette cohérence se répercute malheureusement sur les moyens utilisés pour valider.

### 3.4.2 Conséquences sur la validation en algèbre

Après analyse, les *fonctions* semblent constituer la trame de fond de l'enseignement de l'algèbre au secondaire, ce dès 1ère secondaire. Pour le premier cycle du secondaire, les élèves n'ont affaire qu'à des fonctions linéaires. En 1ère et 2e secondaires, les élèves travaillent presque exclusivement les suites arithmétiques; en 3e secondaire, ils poursuivent le travail avec les relations *partielles* et *directes*. Dans ce cas, à un rang correspond un seul terme de la suite et à une valeur de la variable indépendante correspond une seule valeur de la variable dépendante et inversement. Conséquemment peut-être, lors de la résolution d'équations, comme on n'a qu'une solution, les tableaux de valeurs deviennent un moyen de validation. La méthode de la table des valeurs n'est jamais remise en question puisque, dans les exercices ou problèmes proposés, les formules construites à partir de quelques essais enregistrés dans la table fonctionnent toujours et qu'il n'y a toujours qu'une solution aux équations. Plus grave encore, il arrive qu'une règle explicite institutionnalise la vérification sur quelques cas comme méthode, tel que le montre l'extrait ci-dessous tiré de *Dimensions, Mathématiques 216*, (Tome 1, p. 63).

> "**Règle à suivre:** Avant d'affirmer qu'un énoncé mathématique est toujours vrai, il faut attribuer **différentes valeurs** à la variable.
> Mieux vaut éviter d'attribuer aux variables les valeurs 0, 1 et 2. Ces nombres présentent en effet trop de particularités.
> Voyez vous-mêmes:
> $$x + x = x$$
> C'est vrai si x = 0, mais c'est généralement faux!
> $$x \times x = x$$
> C'est vrai si x = 0 ou 1, mais c'est généralement faux!
>
> Que pensez-vous de l'énoncé suivant?
> $$x^2 = 2x$$ "

Cette règle donnée en apparence avec tant de soin (puisqu'on met en garde contre des choix trop particuliers) est surprenante d'autant plus que vingt pages plus loin (id., p.83) se trouve l'expression $n^2 - n + 41$ qui pour n = 0, 1, 2...40, donne une suite de 40 nombres premiers:

> "**Une fabrique de nombres premiers**
> Quand on remplace n successivement par 0, 1, 2, 3, ... 40, l'expression algébrique $n^2 - n + 41$ donne une suite de 40 nombres premiers.
>
> Quel est le plus petit nombre premier donné par cette expression? Quel est le plus grand?"

Mais peut-on en déduire selon la règle énoncée plus haut que $n^2 - n + 41$ est un nombre premier, pour tout $n \in N$? Le recours aux tables de valeurs risque d'être d'autant plus valorisé par l'élève qu'aucun autre moyen de validation n'est proposé et que jamais l'élève n'est mis dans une situation où une généralisation à partir de quelques cas n'est mise en défaut.

Nous questionnons donc fortement cette approche de l'algèbre par les fonctions telle quelle est proposée, tout au moins étant donnés les constats faits sur la validation.

## 3.5 Équivalence et algèbre outil de preuve en 3e secondaire

De la preuve formelle des propriétés algébriques à la "preuve" visuelle, il y a un saut comme nous le voyons dans 3.5.1 En 3e secondaire, la preuve formelle n'est certes pas accessible. Nous verrons en 3.5.2 comment les manuels traitent des équivalences algébriques et en particulier le rôle qu'y joue le matériel, un rôle pratique qui peut parfois être dangereux. De plus, nous verrons que l'équivalence d'expressions est peu utilisée comme outil de preuve au premier cycle du secondaire.

### 3.5.1 Prouver les équivalences et prouver par les équivalences

La démonstration formelle d'une équivalence algébrique demanderait plusieurs lignes, comme le montre l'extrait d'un manuel de logique présenté en figure 15.

| |
|---|
| Theoreme 25. $\vdash \forall x \forall y \forall z. x(y+z) = xy + xz$ |

*Proof.* Induction on z. P(x) is $x(y+z) = xy + xz$.

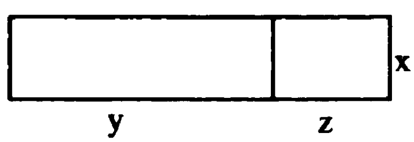
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $y + 0 = y$ | N3 |
| 2. | $x(y + 0) = xy$ | sub, 1 |
| 3. | $xy + 0 = xy$ | N3 |
| 4. | $x(y + 0) = xy + 0$ | =, 2, 3 |
| 5. | $x0 = 0$ | N5 |
| 6. | $x(y + 0) = xy + x0$ | sub, 5, 4 |
| 7. | $x(y + z) = xy + xz$ | as (ind. hyp.) |
| 8.* | $y + z' = (y + z)'$ | N4 |
| 9. | $x(y + z') = x(y + z)'$ | sub, 8 |
| 10. | $x(y + z') = x(y + z) + x$ | N6 |
| 11. | $x(y + z') = xy + (xz + x)$ | =, 9, 10 |
| 12. | $x(y + z') = (xy + xz) + x$ | sub, 7, 11 |
| 13. | $(xy + xz) + x = xy + (xz + x)$ | T2 |
| 14. | $x(y + z') = xy + (xz + x)$ | =, 12, 13 |
| 15 | $xz' = xz + x$ | N6 |
| 16. | $x(y + z') = xy + xz'$ | sub, 15, 14 |
| 17. | $\forall z.x(y + z) = xy + xz \rightarrow$ $x(y + z') = xy + xz'$ | DT, 7-16, and gen |
| 18. | $\forall z.x(y + z) = xy + xz$ | ind, 6, 17 |

* $z' = z + 1$

Margaris, A. (1967). *First Order Mathematical Logic*, p. 138

**Figure 15:** Distributivité de la multiplication sur l'addition

Cette suite d'inférences prouve la distributivité de la multiplication sur l'addition dans N. Les étiquettes placées à droite de chaque ligne réfèrent à des propositions préalablement démontrées. Mais la géométrie a traditionnellement fourni un recours intéressant pour valider ces équivalences (figure 16, ci-dessous).




$x(y+z) = xy + xz$

**Figure 16:** Distributivité de la multiplication sur l'addition, support géométrique

La représentation du produit à l'aide de surfaces ou de segments, le produit correspondant à l'aire, est d'autant plus intéressante, qu'elle est un support merveilleux à la généralisation à l'ensemble des nombres rationnels positifs.

Par ailleurs, l'algèbre est elle-même outil de preuve, justement en particulier via ces équivalences algébriques. L'algèbre est même un outil formel de preuve où la référence au sens du contenu sur lequel on travaille n'a plus besoin d'être présent, une fois la situation modélisée. Ainsi, on pourrait trouver une utilisation de l'algèbre comme outil de preuve un peu partout, à travers différents contenus.

### 3.5.2 Équivalences en 3^e^ secondaire: analyse des manuels

L'équivalence d'expressions algébriques est un outil particulièrement pertinent pour faire des preuves. Le travail plus soutenu sur l'équivalence d'expressions algébriques se réalise en 3^e^ secondaire avec quelques opérations sur les polynômes et en 4^e^ secondaire, avec en particulier, la factorisation. Si avant, l'élève dispose de peu de moyens pour prouver, les équivalences algébriques ouvrent la voie aux preuves. Encore ici, nous nous sommes posé quelques questions. Dans les manuels, le travail sur les opérations est-il travaillé en termes d'équivalence; si oui est-ce que ce nouvel outil est utilisé pour faire des preuves? Par ailleurs, avec les nouveaux manuels, une importance nouvelle est accordée à l'utilisation de représentation géométrique et de matériel. Quel est le rôle de ce matériel? Sert-il à valider les équivalences algébriques; si oui comment? L'analyse porte sur deux volumes de 3^e^ secondaire, les plus utilisés: *Scénarios* et *Carrousel*.[39]

#### a. Opérations à effectuer versus équivalence des expressions

Comme il s'agit de faire apprendre à opérer sur les polynômes, nous nous attendions à ce que l'accent soit mis sur la réduction avec une égalité qui signifie "ça donne" (un résultat) plus qu'une égalité équivalence (l'expression de droite est équivalente de l'expression à gauche). En effet, dans *Carrousel*, l'aspect équivalence n'apparaît que tard (après 27 pages), dans les problèmes proposés après l'introduction de l'addition, la soustraction et la multiplication de polynômes. Toutefois, dans *Scénarios*, l'aspect équivalence est soulevé dès le début et traité chaque fois qu'est

[39]Guay & Lemay (1995), *Scénario 3*, Tome I, pp. 60 à 72, pp. 147 à 162, pp. 325 à 336 et pp. 353 à 369. Breton & Morand (1995), *Carrousel 3*, Tome 1, pp. 247 à 298.

introduite une nouvelle opération sur les polynômes. Ainsi, la tâche à effectuer est de trouver une expression algébrique réduite équivalente. Pour s'en assurer le manuel donne les instructions suivantes: *"Si l'on attribue des valeurs numériques aux variables du polynôme réduit, les deux expressions algébriques représentent le même nombre. C'est une façon de vérifier si les équations sont équivalentes."* Quelle est la portée de cette vérification? Le matériel aide-t-il à la généralisation de la vérification? C'est vrai pour ces valeurs mais est-ce toujours vrai?

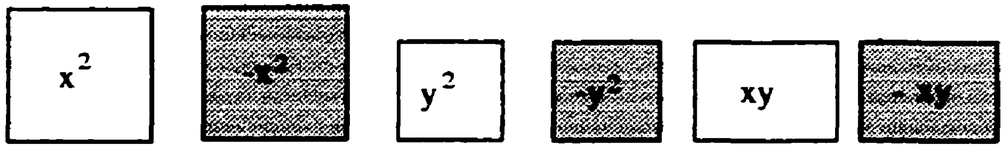
**b. Rôle du matériel**

Les manuels utilisent un support géométrique. L'idée n'est pas nouvelle. Ce support a servi dans l'histoire à résoudre des problèmes à un moment où les nombres négatifs n'existaient pas. La première constatation qui s'impose lors de l'analyse des manuels est qu'aucun problème ne motive cette introduction. Le matériel illustre les manipulations algébriques. Il valide ces opérations dans la mesure où il y a adéquation entre le travail avec le matériel et le travail avec les expressions algébriques; jamais toutefois ne sont discutées les limites du matériel. Elles sont passées sous silence dans *Scénarios*. Dans *Carrousel*, elles sont étendues par l'introduction de codes pour tenir compte des nombres négatifs comme nous le montre l'extrait ci-dessous (figure 17).

L'utilisation de formes géométriques est une façon de représenter certains termes algébriques.

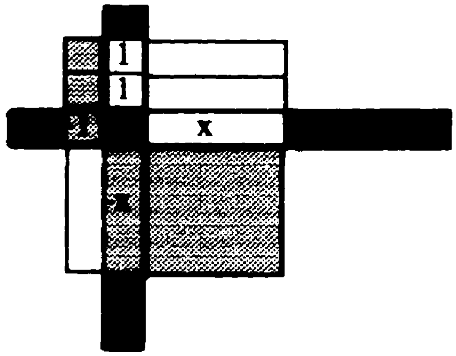
- Les carrés unitaires représentent les termes constants: $\boxed{1}$ $\boxed{-1}$
- Les bandes représentent les termes du 1er degré à une variable:
  $\boxed{x}$ $\boxed{-x}$ $\boxed{y}$ $\boxed{-y}$

- Les rectangles représentent les termes du 2<sup></sup>e degré à une ou deux variables:




Observe les trois premières représentations, puis complète les trois autres.

$(x-1)(^{-}x + 2) = -\,x^2 + 3x - 2$




Exemple tiré de *Carrousel mathématique III*, p. 273

Figure 17: Tuiles algébriques

Dans le cas de *Carrousel* (figure 17), la soustraction est interprétée comme l'addition de l'opposé et la soustraction ne correspond pas à une opération d'enlever mais à une juxtaposition de tuiles de couleurs ou de tuiles grises qui sont les opposées de tuiles de couleur (verte, rouge...). Un premier code consiste donc à représenter les termes à coefficient négatif. Un deuxième code va consister, lorsque sera introduite la multiplication, à situer les tuiles dans un plan à quatre quadrants déterminés par deux axes orthogonaux; les tuiles de couleur à coefficient positif sont placées dans les premier et troisième quadrants (en référence au plan cartésien) et les tuiles grises, à coefficient négatif, sont placées dans les deuxième et quatrième quadrants. Cette extension du modèle géométrique nous apparaît dangereuse. D'une part, nous rencontrons des aires négatives. D'autre part, le modèle peut renforcer la conviction que la "variable x" est toujours positive et qu'elle devient négative lorsqu'on la fait précéder d'un signe "-".

Le support géométrique aide dans les manipulations algébriques et, dans *Carrousel,* il paraît avoir le rôle tout particulier de représenter les termes semblables et d'éviter les erreurs classiques et résistantes telles que lorsque les élèves additionnent les polynômes (Cf. Booth, L., 1984, et Bednarz et Janvier, 1992). Sous le titre "addition de termes semblables", des exercices demandent de déterminer les énoncés qui n'ont pas de sens, en utilisant la représentation des tuiles: par exemple $x^2+x=x^3$ et $x^3-x^2=x$ sont proposés avec d'autres tels $x^2 + x^2 = 2x^2$. Quelle est la réponse attendue? Les tuiles peuvent conduire à la conclusion que $x^2+x=x^3$ n'a pas de sens alors que cet énoncé est vrai si $x=0$. Une discussion doit s'engager ici avec les élèves, en particulier sur l'équivalence ou non des expressions (égalité toujours vraie). Sinon, la concrétisation des variables et expressions peut faire oublier que ces variables et expressions représentent des nombres. Le manuel *Scénarios* insiste sur les nombres derrière les expressions: il est précisé que la lettre est la représentation algébrique de la mesure d'une certaine longueur, que les rectangles sont formés de côtés d'une certaine mesure, que deux termes peuvent représenter le même nombre sans être semblables. Comme le nombre est gardé présent à la fois derrière la lettre et derrière la présentation, il y a moins peut-être de risques de déviation du matériel vers une lettre objet.

En bref, si le géométrique peut supporter le raisonnement, la concrétisation des expressions algébriques sans contexte risque de créer des biais non désirables. Par "sans contexte", nous voulons dire que la représentation "tuiles" est présentée sans nécessité, sans qu'un problème soit posé, que l'expression $x^2+x=x^3$ est présentée sans information sur ce qu'elle modélise, sans référence aux nombres. Demander si une telle expression est vraie ou fausse (ce qu'on fait dans les exercices) n'a pas de sens: cette expression n'est ni vraie ni fausse, ça dépend!

Les tuiles permettent d'accepter la théorie algébrique (cf. Joshua et Joshua, 1987). Elles concrétisent les expressions et aident ainsi à les manipuler. Même si une référence à l'aire justifie au départ l'utilisation des tuiles, les tuiles et les manipulations de ces tuiles dans *Carrousel* se détachent de ce contexte pour ne devenir qu'un matériel avec des codes et des conventions de manipulation. Dans *Scénarios*, les rectangles utilisés dans une tâche consistant à calculer des aires ou à retrouver la mesure d'un côté du rectangle connaissant l'aire, n'ont pas tout à fait le même rôle (apparent) que les tuiles. L'aire est un nombre et non un objet. Les expressions algébriques représentent les mesures des côtés et non l'inverse. Les expressions équivalentes constituent deux manières de calculer l'aire: "*aire du grand rectangle = somme des aires des petits rectangles.*"

Le rôle des tuiles de *Carrousel* n'est pas de montrer ou de démontrer l'équivalence ni de provoquer une généralisation. Les rectangles de *Scénarios* avec le calcul d'aires n'ont pas vraiment ce rôle non plus, même si des éléments du texte vont dans le sens de montrer l'équivalence. Dans les deux manuels analysés, l'équivalence est validée par la vérification sur un cas particulier et non pas par la représentation géométrique. La représentation "aire" a ses limites; elle peut avoir toutefois une portée plus générale que la vérification de l'équivalence sur des cas particuliers. Lorsqu'on utilise l'algèbre comme outil de preuve, cette compréhension que la lettre est un nombre quelconque (ou non selon les situations) est déterminante; il faut voir l'ensemble des nombres possibles derrière la lettre pour se convaincre de la généralité de la preuve et pour que le recours à un cas particulier ne soit pas nécessaire. C'est la différence en fait entre se servir du matériel comme support aux manipulations et s'en servir comme support à la généralisation. Dans un cas, les expressions équivalentes sont vues comme procédure modèle à appliquer dans un cas particulier, dans l'autre elles sont vues comme généralisant un résultat. Cette distinction, Martin et Harel (1989) la font à propos d'observations faites souvent en expérimentation auprès d'élèves du secondaire. Ceux-ci ont tendance à "vérifier" la preuve générale avec des cas particuliers. Martin et Harel s'interrogeant sur le rôle de la preuve générale, émettent l'hypothèse que la preuve générale puisse être vue comme un modèle à suivre pour produire des cas particuliers.

### c. Preuves algébriques

Le théorème de Pythagore est au programme de 3$^{e}$ secondaire. Voilà une occasion d'utiliser l'algèbre comme outil de preuve; or, seulement *Carrousel* profite de cette occasion. Ce manuel propose également d'autres situations où l'élève devra utiliser l'algèbre comme outil de preuve: par exemple, on lui demande de démontrer que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3 ou que le périmètre ou l'aire d'une figure est ou n'est pas modifié en modifiant les dimensions des côtés. Ces situations sont peu nombreuses. Elles ne constituent en fait qu'une pratique des manipulations algébriques qui viennent d'être vues. D'autres situations qui permettraient d'aller plus loin sont présentées, mais c'est le tableau de valeurs qui est alors utilisé. Par exemple, "montrer que le produit de deux nombres naturels consécutifs est toujours un nombre pair." Il faut penser ici que si on a deux nombres consécutifs, l'un des deux est nécessairement pair et que le produit est nécessairement divisible par deux. La notation algébrique permet d'exposer l'argument; nulle part dans le manuel, ce rôle de l'algèbre n'est signalé. L'algèbre n'est pas vue comme outil de généralisation - au sens de preuve, ni comme outil de formulation du raisonnement général.

Ce n'est qu'en géométrie analytique, en 4$^{e}$ secondaire (436 seulement), que l'algèbre servira d'outil de preuve.

## 3.6 Preuve au secondaire, synonyme de démonstration, sinon de vérification

La preuve est officiellement introduite en 4$^{e}$ secondaire. On la retrouve dans les options 416 et 436 en géométrie. L'élève est alors initié à la démonstration. Dans *Regards mathématiques 416*,[40] elle est introduite comme une forme particulière d'argumentation en géométrie. On présente séparément définitions, axiomes et propriétés, on apprend dans des exercices à séparer hypothèses et conclusions, le type d'argumentation est lui-même "appris" via plusieurs exemples incomplets, à compléter, et présentés selon une forme standardisée (en T: affirmations T justifications). On enseigne une méthode (figure 18).

**Énoncé** ou conjecture______________________________

**Hypothèse:** ________________

________________ **Figure**

**Conclusion:** ________________

| **Arguments** | **Justifications** |
|---|---|
| 1. ________________ | 1. ________________ |
| 2. ________________ | 2. ________________ |
| 3. ________________ | 3. ________________ |
| . . . | . . . |

*Réflexions mathématiques 416*

**Figure 18:** Démonstration, présentation en T

La géométrie est traditionnellement le lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement déductif. Nous pouvons retrouver des traces d'une initiation à ce raisonnement parfois dès 1$^{ère}$ secondaire: on invite les élèves à déduire des mesures d'angles (sans mesurer). Toutefois, la préoccupation de validation, même en géométrie, n'est pas constante. Ceci est particulièrement vrai des sections portant sur

[40]Regards mathématiques 416 est la suite de *Carrousel mathématique III.* Au moment de notre analyse, ce manuel etait le seul disponible parmi les manuels de 4$^{e}$ secondaire rédigés conformément au nouveau programme d'études.

les constructions géométriques. Dans *Regards mathématiques 416,* juste avant d'entrer dans le sujet de la preuve, on travaille les isométries.[41] On y décrit entre autres comment trouver le centre de rotation à partir des médiatrices des segments joignant les points initiaux et images. Comme chaque couple de points initial et image est situé sur un cercle centré au centre de rotation, on a donc affaire à une famille de cercles concentriques. Chercher le centre de rotation revient donc à chercher le centre de ces cercles concentriques. Les élèves ont déjà vu, en 2[e] secondaire, comment déterminer le centre d'un cercle à partir des médiatrices. Or, jamais on ne fait le lien et jamais on n'explicite pourquoi la construction donne bien le centre de rotation! [42] Schoenfeld (1988) avait déjà fait le même constat: les constructions géométriques ne sont pas l'occasion de preuves.

Nous avons tenté de voir si on se préoccupait de validation ailleurs qu'en géométrie et aux niveaux qui précèdent l'introduction de la preuve. Comme nous l'avons vu, dans les sections portant sur l'algèbre, il n'y a pas de place pour la preuve ou très peu au premier cycle du secondaire. Souvent, des problèmes intéressants de théorie des nombres sont soumis, avec une représentation géométrique, mais les dessins ne sont pas utilisés comme outil de preuve (exemple générique qui pourrait aider à expliciter une preuve reposant sur les propriétés). L'essai sur quelques exemples paraît souvent être le seul moyen de s'assurer de la vérité d'un énoncé.

On trouve quand même des occasions où une démarche de preuve peut être engagée dans le cadre d'une résolution de problème, mais il s'agit la plupart du temps d'occasions qui constituent des encarts par rapport au propos principal. Par exemple, dans *Carrousel 3,* une page intitulée "La problématique" est insérée en plein milieu d'une section portant sur les opérations algébriques. Dans cette page, des conseils sont donnés pour la résolution de problèmes: faire preuve d'imagination et de créativité mais aussi entamer la démarche scientifique ou expérimentale. Cette démarche est définie ainsi: 1) faire des essais pour produire une conjecture; 2) tester sa conjecture; 3) prouver la validité de sa conjecture. Des problèmes sont proposés. Si ceux-ci peuvent être intéressants et mener, peut-être, à une recherche de vérité par nécessité, une préoccupation de validation dans ce sens (vérité par nécessité) reste marginale. Dans *Dimensions mathématiques 216,* une place importante est accordée à la résolution de problèmes et plusieurs opportunités de validation sont offertes, en demandant aux élèves d'expliquer un résultat, de le justifier ou de dire pourquoi on peut dire telle ou

---

[41]Breton & al. (1996), *Regards mathématiques,* pp. 74 à 141.

[42]Ce qui est pourtant le cas dans des manuels de 2[e] secondaire: Jordi & al. (1994) *Dimensions mathématiques 216* (pp. 330, 478 et 479) et Guay & Lemay (1994), *Scénarios 2* (pp. 375 à 379).

telle chose. Mais encore ici, les problèmes n'appartiennent pas aux exposés principaux (ils sont dans les marges). Ils peuvent alors apparaître accessoires. De plus comme le manuel semble privilégier une validation par vérification sur quelques cas, il est probable que la validation n'ira pas plus loin.

En bref, l'analyse des sections algébriques, avec les quelques incursions ailleurs, donne un portrait d'ensemble où la preuve, produit d'une recherche de vérité par nécessité, a peu de place. Même si nous pouvons penser que la situation dans l'enseignement en France peut être différente de la nôtre, avec un accent de preuve plus soutenu, il semble clair, comme le soulignent Marie-Alberte et Samuel Joshua (1987), que la preuve ici comme là soit conçue comme démonstration seulement, sans que des niveaux de preuve soient envisagés. Avant l'introduction de la démonstration en 4e secondaire le travail de l'élève se restreint à faire des expériences et à constater des résultats, qu'il aura à intégrer par exercices de pratique. Il n'y a pas de questionnement qui relève de la validation, cela dit tout au moins pour les sections algébriques. Quant aux sections géométriques, des indices nous laissent croire qu'on a là aussi un faible souci de validation; et ce, malgré les quelques exercices de raisonnement déductifs que nous pourrions observer en géométrie. C'est tout au moins une conjecture qu'il reste à vérifier ou à valider!

# CHAPITRE 4
# PRÉ-EXPÉRIMENTATION

## 4.1 Objectifs de la pré-expérimentation

Notre projet consiste à caractériser la validation chez les futurs enseignants en mathématiques au secondaire par sa place, ses fonctions et les arguments utilisés pour valider. Avant d'entreprendre l'analyse des leçons des étudiants dans ce sens, nous avons voulu explorer les stratégies de validation qu'eux-mêmes pouvaient mettre en oeuvre lors de la résolution d'un problème et le statut qu'ils accordaient à différents arguments pour valider et pour convaincre les élèves. Il s'agissait de préciser nos intuitions nées tout au long du travail de formation que nous effectuons auprès de ces étudiants. Pour ce faire nous avons rencontré en entrevues les étudiants, futurs enseignants des mathématiques au secondaire.

## 4.2 Contraintes particulières

Ces entrevues ont été réalisées à l'intérieur d'une expérimentation plus vaste portant sur la formation des étudiants futurs maîtres[43]. Les entrevues ont donc été soumises à différentes contraintes liées à cette expérimentation. Nous les soulignerons au moment opportun.

## 4.3 Population

Nous avons interrogé deux étudiants et deux étudiantes. Ils débutaient leur formation en enseignement des mathématiques au secondaire. Dans le cadre de l'expérimentation plus vaste signalée plus tôt sur la formation des futurs enseignants, ils avaient été choisis selon leur profil d'entrée à l'université. L'un des étudiants était passé par Polytechnique (sujet POL) et l'autre avait fait un Cégep en sciences pures (sujet SCI). Les deux se disaient "matheux". Quant aux étudiantes, l'une avait un profil

---

[43] Recherche subventionnée par FODAR. Équipe de recherche en mathématiques de l'UQAM: N. Bednarz, L Gattuso, C. Mary.

montrant une variété de cours principalement de type sciences humaines (sujet HUM); l'autre avait complété une formation professionnelle dans le domaine de la santé, domaine qui demande certaines habiletés mathématiques (sujet PRO). Nous avons rencontré ces quatre étudiants juste avant qu'ils entreprennent leur premier cours de didactique, à la première session de leur formation (automne 1995).

## 4.4 Déroulement des entrevues

Nous avons rencontré les étudiants individuellement au moment qui leur convenait. Les entrevues étaient enregistrées sur bande audio. Des tâches précises leur étaient proposées: tâches de résolution de problèmes, de production de preuve, d'intervention en classe et de choix à faire. Pour chaque épreuve, les problèmes ont été choisis de manière à ce que la tâche à réaliser ne requiert pas de trop grandes habiletés mathématiques. Il n'y avait toutefois pas de temps limite pour répondre aux questions. La durée des entrevues a varié entre une heure et deux heures selon que les étudiants étaient plus ou moins loquaces ou qu'ils cherchaient plus ou moins longtemps une solution aux problèmes posés. Les étudiants ont collaboré et se sont prêtés de bon gré aux tâches que nous leur proposions.

Les étudiants étaient invités à écrire s'ils le désiraient. Des instruments tels une règle, un compas et un rapporteur, étaient à leur disposition sans toutefois que nous sollicitions leur utilisation. Nous laissions à l'étudiant le plus d'initiative possible en n'intervenant que très peu. Nous nous sommes conformée assez précisément au protocole d'entrevue fixé au départ.

Nous présenterons dans l'ordre chacune des épreuves réalisées avec le protocole qui lui est associé, suivies chaque fois de l'analyse des résultats. Notons que nous ne décrirons pas les épreuves dans tous leurs aspects, certains ne relevant pas de la validation.

## 4.5 Problèmes: réaction à des solutions d'élèves

### 4.5.1 Question 1: Le problème des robes et des jupes

Le problème des robes et des jupes (question 1, page suivante[44]) est simple à

[44]Pour chacune des questions, sera donné en caractère **gras**, ce qui apparaît sur la feuille de l'étudiant,

résoudre, mais présente une particularité: on ne dit pas si on a plus de jupes que de robes. Il n'est donc pas conventionnel puisque habituellement dans ce genre de problème on le précise. Les étudiants pourraient rejeter la formulation ou envisager plusieurs solutions. Diverses procédures de résolution sont possibles. Trois sont présentées aux étudiants.

Question 1 de l'entrevue: Le problème des robes et des jupes

<u>Mise en situation</u>: (donnée verbalement)
*"Demain ton cours porte sur la résolution de problèmes.
Tu as donné à tes élèves un devoir. Ils avaient à résoudre un problème. Voici 3 solutions typiques qui ont été rapportées par les élèves.
Comment utiliseras-tu ceci?"*
[N. B.: S'ils posent des questions sur le cours du lendemain ou ce que les élèves ont déjà fait: à eux de définir le cadre du cours.]

*"Voici le problème:"*
*"Voici des solutions d'élèves "*
*[Le problème et les solutions sont présentés par écrit, sur des feuilles avec un espace pour les calculs...]*

**Le problème:**

**Dans une boutique, on compte 228 articles lorsqu'on prend les jupes et les robes ensemble. La différence entre le nombre de robes et de jupes est de 94. Combien y a-t-il de robes et de jupes?**

**Solution d'un élève:**

**288/2**
**144**
**robes: 144+94=238**
**jupes: 144 +144**
**382**

**382**
**-288**
**94/2**
**47**

**238-47=191**
**144-47= 97**
**288**
**robes: 191**
**jupes: 96**

**Solution de deux autres élèves:**
**228-94=134÷2=67+94=161 Réponses 161 et 67.**

**Le nombre de jupes plus le nombre de robes est 228. Puisque le nombre de robes est 94 de plus que le nombre de jupes alors 2 fois le nombre de jupes + 94 = 228. Deux fois le nombre de robes est donc égal à 134 ce qui veut dire qu'on a 67 jupes. Donc 161 robes.**

*"Il y a de l'espace sur les feuilles, tu peux t'en servir."*

---

en *italique*, les paroles de l'interviewer et entre crochets, les commentaires relatifs au le déroulement de l'entrevue.

*"Vous prenez le temps dont vous avez besoin pour répondre."*

En plaçant les étudiants devant la situation de récupérer des solutions d'élèves, nous les placions devant la tâche de vérifier les procédures et éventuellement de les valider.

Toutes les procédures présentées sont correctes[45]. Les deux premières consistent uniquement en calculs avec nombres; aucune explication en mots ne les accompagne. Pour la première procédure, la réponse est erronée étant donnée une erreur de lecture au départ. La présentation de la deuxième procédure est déficiente: elle montre des égalités fausses (228 - 94 = 134 ÷ 2). La troisième solution copie en mots une procédure algébrique courante pour solutionner ce problème.

**Analyse des résultats**

Nous avons constaté que la première procédure causait des difficultés. Les étudiants arrivent difficilement à la comprendre même s'ils identifient l'erreur de lecture. Un sujet soulève le manque d'explicitation de la deuxième procédure, mais cette procédure est assez bien acceptée. Les résultats les plus intéressants viennent toutefois de la troisième procédure. C'est cette procédure qui soulève le plus de commentaires.

Un sujet (POL) y reconnaît sa solution algébrique et la choisit de préférence aux autres. Elle est vue comme un premier niveau de résolution, avant l'algèbre, étant donné qu'elle n'utilise pas de lettres. "*Sans inconnues, c'est une autre façon de le voir; plus simplement, sans utiliser l'algèbre. Donc je pourrais utiliser ça pour les niveaux secondaire I, secondaire II.*"

Par ailleurs, nous avons observé, grâce à cette procédure, une définition fluctuante de ce qu'est une "résolution mathématique". En effet, elle est tantôt associée à la troisième procédure, en mots, et est qualifiée alors de logique. Tantôt, elle est associée à la deuxième procédure et s'oppose alors à la "résolution en mots".

> HUM: *je l'expliquerais peut-être plus, moi, mathématiquement, sans trop de calculs, j'irais plus avec des phrases, comme l'étudiant vient de le faire* (se référant ici à la dernière procédure, en mots).
> *Je verrais, disons que j'aime bien voir le problème mathématiquement, d'une façon logique là. Plus avec des mots.*
> *(...) je leur suggérerais deux façons: une qui est plus mathématique pour ceux qui sont beaucoup plus vites et visuels, puis une autre façon où je répéterais en*

---

[45] À la troisième phrase de la troisième solution, nous aurions dû lire "Deux fois le nombre de jupes est donc égal à 134..." Mais l'erreur passe inaperçue, ou presque. Un sujet a souligné l'erreur sans y accorder d'importance.

*d'autres mots le problème.*
Interviewer: *Quand tu dis plus mathématique, tu réfères à la deuxième?*
HUM: *À la deuxième, oui.*

### 4.5.2 Question 2: Le problème de l'autobus

Encore une fois, avec le problème de l'autobus (question 2), les étudiants étaient mis en présence de solutions fictives d'élèves.

Question 2 de l'entrevue: autobus

Mise en situation: (donnée verbalement)
*"Voici un problème. Tu es en classe. Tu demandes à tes élèves de résoudre le problème."*
[Le problème et les solutions sont présentés par écrit.]
*"Voici deux solutions. Que fais-tu?"* *

*"Commence par la première."*
[Ils ont tout le temps nécessaire pour répondre. Ils répondent verbalement et leur discours est enregistré sur bande audio.
Ils ont du papier à leur disposition et l'interviewer note autant que possible l'ordre dans lequel les calculs ou dessins ont été effectués. ]

**Le problème:**
**Deux autobus partent en même temps de deux villes distantes de 1917 km et se dirigent l'un vers l'autre. L'un file à une vitesse de 110 km/h et l'autre, à une vitesse de 103 km/h. Dans combien de temps se rencontreront-ils?**

**Voici deux solutions présentées par des élèves.**

**1917|2**
**958,5km**
**958,5|110**
**8,7h → 9h**
**958,5|103**
**9,3h → 9h**

**1917|110**
**17,4h**
**1917|103**
**18,6h**

Les deux procédures présentées ne tiennent pas compte d'un implicite qui constitue la clé du problème: les temps sont égaux et les distances parcourues non. La première procédure est erronée, mais la réponse est bonne. La seconde n'est pas complétée et apparaît, comme la première, considérer des distances parcourues égales. L'analyse de la première procédure tout au moins demande de s'interroger sur sa validité puisque la réponse est bonne. De plus, comme nous demandions aux étudiants de réagir à la solution proposée par l'élève, sur-le-champ, en classe, ils pourraient envisager une façon pour convaincre l'élève que son raisonnement est faux. Nous ne discuterons ici que des résultats relatifs à la première procédure, les réactions à la deuxième ne nous apprenant rien de plus.

**Analyse des résultats**

Le contexte de distance est propice à une représentation à l'aide de segments. HUM, cherchant à comprendre la procédure de l'élève, a tenté de valider la première procédure à l'aide de cette représentation. Ce sujet assumait que la procédure était correcte et cherchait à la comprendre.

> HUM: *j'imagine qu'il y a soit un raisonnement, un schéma qui pourrait justifier pourquoi il est arrivé à 9.*

SCI quant à lui a rejeté les deux procédures en identifiant l'erreur de raisonnement: *"il s'est comme dit, ils vont se rencontrer à 958,5 km alors que ce n'est pas le cas."* Mais lorsque nous lui avons précisé que la réponse de l'élève était juste, il s'est ravisé. Bien qu'il ait identifié l'erreur de raisonnement et qu'au départ il ait été sûr que le raisonnement était faux, il n'a fait aucune tentative pour invalider la procédure de l'élève. Ceci peut toutefois s'expliquer par une attitude de réserve face à une procédure donnée sans explication. Il s'empêchait de juger sans que l'élève ait pu s'expliquer et conséquemment, comme la réponse étant bonne, il s'empêchait d'interpréter la procédure.

> SCI: *je lui demanderais sûrement d'expliquer sa solution parce que moi, comme je disais, autant pour lui que pour l'élève numéro 2, y'a juste des calculs.*

Il se peut aussi qu'il se soit ravisé simplement parce que l'interviewer semblait dire que c'était bon!

POL envisageait une solution personnelle consistant à trouver d'abord l'endroit où les deux autobus se sont rencontrés, tout en acceptant aussi les deux procédures proposées; jamais il n'a cherché à les tester.

PRO, lui, a rejeté immédiatement les deux procédures et a interprété dans le contexte le calcul réalisé dans la première procédure:

> PRO: *c'est comme s'il disait lui, après 8 heures point 7 heures, il arrête, il attend l'autre, l'autre s'en vient pi ça lui prend 9 point 3, au bout de point 3 heures ça va faire 9 heures, l'autre va avoir attendu pendant point 3. Ça veut dire qu'il y en a un qui s'arrête qui attend l'autre.*

Par la suite son argumentation va reposer sur le fait que pour parcourir la même distance, ça ne peut prendre le même temps. Lorsque nous lui avons précisé que la réponse était correcte, il a envisagé une vérification: *faudrait peut-être vérifier 9 heures à 110 km/h et 9h à 103 km/h, si on arrive à 1917 km.* Mais la procédure continuant de le laisser perplexe, il a produit la solution correcte:

> *elle aurait pu le faire simplement. Il y en a un qui va à 110, c'est le même temps pour les deux, l'autre va à 103, toujours pendant le même temps; il faut qu'en tout ils se rendent à 1917 km.*

Nous sommes passés ensuite à une autre question.

Étonnamment, aucun n'a cherché à tester les procédures même lorsqu'un doute s'est produit, devant le fait que la réponse était bonne (sujet SCI). Évidemment, certaines considérations peuvent expliquer ce comportement. On peut vouloir laisser le bénéfice du doute à l'élève qui a peut-être un raisonnement complètement différent de celui qui est envisagé! SCI demanderait à l'élève de s'expliquer. Aussi, des arguments peuvent convaincre que la procédure est fausse sans nécessiter aucun test (sujet PRO). Pour le sujet PRO, il aurait été intéressant de cerner mieux la fonction de la vérification envisagée; mais l'entrevue ayant coupé court ici, nous ne pouvons extrapoler.

## 4.6 Preuves: production, réactions et choix

Trois questions demandaient spécifiquement aux sujets une preuve. Nous leur demandons parfois de faire une preuve eux-mêmes, parfois d'envisager une preuve pour la classe à partir d'arguments déjà formulés et parfois de se prononcer sur des arguments d'élèves. Sous l'inspiration d'Arsac (1993), les problèmes ont été choisis de manière à rendre possible l'utilisation d'arguments numériques, d'arguments reposant sur l'apparence et d'arguments de mesure et de calcul. Notre objectif n'était pas de vérifier l'habileté des étudiants à prouver, nous voulions avoir des indices sur le statut qu'ils accordaient à différents arguments.

### 4.6.1 Question 3: la fenêtre

Avec la situation de la fenêtre (question 3), nous demandions aux étudiants de se prononcer sur des formules produites par des élèves (fictifs) et sur les justifications qui accompagnaient ces formules. Mais avant, nous demandions aux étudiants de trouver eux-mêmes une formule. Nous voulions ainsi vérifier comment ils construisaient leur formule et comment ils la validaient, en référence à des cas particuliers ou non. Construiraient-ils une suite ou raisonneraient-ils directement à partir d'un dessin?

Question 3 de l'entrevue: les fenêtres

<u>Mise en situation:</u>
*"Vous avez proposé cette situation à vos élèves, en secondaire I."*
*"Il faut qu'ils trouvent la formule."*

**"Dans une usine, on fabrique des fenêtres carrées avec des carreaux transparents et des carreaux de couleur. Il y a seulement les carreaux sur le pourtour de la fenêtre qui sont colorés. Ceux du centre sont transparents. Trouvez une formule qui permettrait de calculer rapidement le nombre de carreaux colorés dont on aurait besoin pour n'importe quelle fenêtre si on connaît le nombre de carreaux sur un côté de la fenêtre.**

[Les laisser penser et trouver une formule. Leur demander de justifier. Puis leur proposer les solutions des élèves une à la fois.]
*"Est-ce que ça marche toujours?"*
*"Voici ce que certains ont répondu. Qu'en penses-tu?"*

<u>Voici ce que répond un élève:</u>

**Il faut prendre le nombre de carreaux sur un côté sauf 2, multiplier par 4 et rajouter 4 carreaux;**

**J'ai essayé avec 3, ça marche (1 ∞ 4+4=8);**
**avec 4, ça marche aussi (2 x 4 + 4 =12);**
**avec 5, ça marche (3 x 4 +4 = 16).**

*"Voici une autre réponse."* [Attendre les commentaires.]

**Voici ce que répond un autre élève:**

**Moi j'ai trouvé: 4 fois le nombre de carreaux sur un côté, et j'enlève 4 carreaux.**

**parce que j'ai 4 côtés mais il faut enlever les 4 qui ont été comptés en trop**

*"Les explications t'apparaissent-elles valables? Pourquoi?"*
*"Quelle explication favoriserais-tu pour ta classe?"*
*"Comment montrerais-tu que les deux formules trouvées sont équivalentes?*

La situation choisie nous paraissait particulièrement intéressante du fait qu'aucune règle, théorème ou propriété institutionnalisées n'est nécessaire pour valider.

Deux solutions d'élèves sont présentées. La première s'appuie sur quelques essais numériques. La deuxième est validée par un "raisonnement" général, en mots. Nous voulions ainsi recueillir des informations sur le statut que les étudiants accordaient à ces différentes validations. Les formules produites par les deux élèves fictifs sont différentes. Nous pouvions alors soulever la question de l'équivalence. La manière dont les étudiants démontraient ou montraient l'équivalence pouvait nous donner des indices sur ce qui pour eux validait.

### Analyse des résultats

Cette question est particulièrement propice à une démarche de preuve comme nous pouvons le constater.

> HUM: *J'ai fait un petit dessin du problème. Par la suite je me suis donné un cas particulier. Par exemple s'il me donnait 4 comme nombre de carreaux sur un côté de la fenêtre (...). Supposons qu'on prenait les côtés séparément, ils forment pas un carré, là il y aurait 4 côtés à faire, qui sont pas joints, alors ça lui demanderait 16 carreaux, 4 carreaux par côté et ils sont tous égaux donc ça fait 4 fois 4, 16. Mais là après ça, j'ai réalisé qu'il y avait un carreau dans chaque coin qui servait pour les deux côtés. Donc il fallait que j'en élimine quelques-uns parce que quand je les compte séparément, il y en a 4 que je compte de trop, puisqu'il y en a 4 qui servent pour les deux. Donc je savais que j'arrivais à 16 - 4 dans ce cas-ci. (...) J'ai fait au début $n^2$ - 4; 4 fois 4, mais là, je me suis dit, c'est un cas particulier, le carré a 4 côtés et j'ai choisi 4 carreaux par côté. donc je suis allé voir un autre. Là, j'ai vu qu'à trois carreaux, ben il y en avait encore 4 qui servaient pour deux côtés à la fois, donc j'étais certain de mon moins 4. Là c'était mon $n^2$ que j'étais moins sûr. Là j'ai bien vu que c'était 4 côtés. Je les faisais séparément pis après ça, j'enlevais ceux qui étaient sur deux côtés.*

Ce sujet a rejeté de manière cohérente, nous semble-t-il, les essais numériques, tout en préférant une preuve qui repose sur les propriétés du carré.

> HUM: *il n'a pas expliqué pourquoi il enlève 2, pourquoi il multiplie par 4, pourquoi il rajoute 4 après. Pis je trouve que ça c'est pas une preuve que sa formule elle tient. Je l'aurais plus expliquée de la façon que j'ai donnée: un carré ça a 4 côtés, ça a 4 coins, il y en a qu'il faut rajouter.*

Par ailleurs, ce sujet n'a pas accepté pour autant la deuxième justification, celle-ci lui apparaissant trop succincte, l'explication devant rendre compte à son avis du raisonnement sur la figure.

> HUM: *je trouve que c'est pas des justifications. (...) si c'était vraiment justifié pourquoi vous avez fait ça, je trouve pas que c'est une justification, parce qu'elle me dit juste vraiment ce qu'elle a trouvé, mais elle ne dit pas de quelle façon elle a pensé pour arriver là.*
> Interviewer: *Qu'est-ce que t'ajouterais à ça?*
> HUM: (...) *j'aurais ajouté: qui ont été comptés en trop parce qu'ils font partie de deux côtés à la fois.*

Cependant, HUM a montré l'équivalence des formules en s'appuyant sur une simplification algébrique plutôt qu'en s'appuyant sur les propriétés de la figure.

SCI a raisonné de manière générale directement sur la figure.

> *Je me suis dit que si c'est (...) x sur un côté de la fenêtre, autrement dit de l'autre côté de la fenêtre c'est x aussi. Et ensuite ils nous disent au départ qu'on fabrique, que c'est des fenêtres qui sont carrées. Donc autrement dit, il y a autant de carreaux de fenêtre sur le côté gauche que sur le côté droit, qu'en bas et qu'en haut. Donc t'as le même nombre de carreaux de fenêtre de chaque côté. Mais les 4 coins, en bas à gauche, en bas à droite, en haut à gauche et en haut à droite, ils se répètent deux fois (...)*

Encore ici, de façon cohérente avec la validation utilisée, les essais sur quelques cas ont été rejetés, parce que l'élève ne montre pas qu'il a compris, mais aussi parce que la vérification ne garantit pas que c'est toujours vrai.

> SCI: *Il a fait une démarche, déjà là c'est bon; il a eu la bonne réponse aussi, c'est bon. Mais il a pas compris. Il a essayé systématiquement avec 2, avec 3, avec 4 pis dans le fond, quant à moi, je pourrais lui dire essaie donc jusqu'à 50, tout à coup que ça marche pas avec 49. (...) moi je dis que c'est difficile d'être sûr d'une réponse à partir de trois exemples seulement.*
> Interviewer, en référence à la première solution: *Et comment tu convaincrais les autres élèves que ça marche son affaire?*
> SCI: *Au niveau logique, je pourrais pas parce que je le sais même pas pourquoi*

(inaudible). *On dirait qu'il a été cherché ça n'importe où. Mais au niveau algébrique (...)*

SCI a montré que les deux formules étaient équivalentes algébriquement, puisqu'il ne comprenait pas d'où provenait la 1ère formule. Nous constatons que le niveau "logique" s'oppose au niveau "algébrique", la logique étant associée chez cet étudiant à un raisonnement qui s'appuie sur le contexte.

Le sujet PRO a vu directement sur la figure que les formules proposées étaient correctes, sans utiliser aucun nombre en décomposant la figure. Par exemple:

> PRO: *Il a pris ceux du milieu, il a multiplié par 4, puis il a rajouté 4. (...) il enlève les deux bouts puis il les rajoute à la fin.*
>
> Il rejette lui aussi les essais numériques:
>
> PRO: *Je vais lui dire vas-tu essayer de même jusqu'à 20 fois.*

C'est par contre le seul sujet qui a montré l'équivalence des procédures en raisonnant directement sur la figure.

> PRO: *Lui il les compte* (les coins) *dès le début puis il les enlève à la fin tandis que lui, il les enlève pour compter ce qui reste, mais comme il sait qu'il les a enlevés complètement, il les remet. Lui, il sait qu'il les a comptés 2 fois donc il les enlève à la fin.*

Le sujet POL se distingue des trois autres. D'abord il a cherché à exprimer le rapport du nombre de carreaux colorés sur le nombre total de carreaux. Nous l'avons remis sur la piste après un certain temps, mais par la suite nous avons eu beaucoup de difficultés à le faire parler. Il était soit perturbé par un faux départ, soit qu'il poursuivait une réflexion intérieure. Il ne répondait pas à nos questions. Il semble toutefois que cet étudiant s'appuyait davantage sur le numérique et sur le particulier que les autres. Nous prenons comme indice de ceci le fait qu'il ait converti la situation en suite de nombres et qu'il ait vérifié les formules à l'aide d'un cas particulier.

> POL: *On remarque que ça fait 16. Donc 5, 5, 3, 3: ça fait 16. Pis là si on prend un exemple avec un carré de 4, ben, on va remarquer que c'est 9 carreaux sur 16.*
> Interviewer: *Comment tu fais pour remarquer ça?*
> Sujet POL: *(...) je peux toujours me fier en faisant le dessin pis en remarquant combien il y a de carreaux colorés*
> *(...)*
> POL: *On peut faire deux fois le nombre de carreaux sur un côté, supposons que c'est un carré de 4, pis plus deux fois n - 2.*

Lorsque l'interviewer a soumis la première solution, l'étudiant n'a pas réagi à l'argumentation par essais. Il donne toutefois quelques indices de sa démarche à lui pour vérifier la première formule.

> POL: *J'ai pris vraiment un exemple, là. Je trouve que (...) quand on comprend pas vraiment le problème, ben là, on est autant de mieux de se donner des exemples. Puis de développer là-dessus.*

Il reconnaît ici à l'exemple un rôle pour faire comprendre. Nous avons fait quelques tentatives infructueuses pour que POL se prononce sur une justification à l'aide de quelques exemples, mais il semble que le rôle de ces exemples n'était pas clair pour l'étudiant. Les exemples aident à produire la solution, à comprendre, mais quel est le rôle des exemples utilisés comme preuve? Ce n'est pas clair.

> POL: *Vu qu'il a trouvé ça, ben il a juste à l'appliquer. Mais s'il l'avait mal vu, ben peut-être que ça aurait découlé que ça aussi ça serait toute pas bon.*
> Interviewer: *Oui mais c'est possible aussi que voyant que ça c'est pas bon, il aurait changé d'idée.*
> POL: *Oui mais comment qu'il le savait que ça c'était pas bon? Il a dû sûrement les vérifier avant ou...*

Nous n'avons pas réussi à lui faire éclaircir ses propos et nous avons finalement abandonné.

Avec cette question, nous avons constaté deux comportements, un qui dégage une formule générale directement à partir d'un dessin agissant comme exemple générique (SCI et PRO) et un autre qui s'appuie sur le numérique donc sur un cas particulier (HUM et POL). Dans ce dernier cas, toutefois, un sujet (HUM) tentera de dégager le général du contingent en faisant d'autres essais, puis en s'appuyant sur les propriétés de la figure, tandis que l'autre restera attaché longtemps au cas particulier si bien qu'il aura même de la difficulté à se prononcer clairement sur une justification qui s'appuie sur des essais.

### 4.6.2 Question 4: le trapèze

Avec le problème du trapèze (question 4), nous ne proposions pas de solutions d'élèves. Nous demandions uniquement aux étudiants de le résoudre. Il s'agissait de comparer les aires de deux triangles: la base et la hauteur de ces triangles étant égales, les aires sont nécessairement égales. Mais cet argument pouvait échapper aux étudiants. Notre intention était alors de voir quels seraient les recours des étudiants: se fieraient-ils à l'apparence ou entreprendraient-ils de mesurer. Lors de l'entrevue, nous avions disposé sur la table des instruments de mesure (compas, rapporteur, règle) sans toutefois inciter les étudiants à les utiliser.

Question 4 de l'entrevue: le trapèze.

Mise en situation:
*"Je vous soumets un problème à résoudre. Cette fois on n'ira pas voir ce que font les élèves. Vous prenez le temps qu'il faut."*

[Apporter règles, compas, rapporteur.]

**4) Problème:**

**TRAP est un trapèze de bases [PA] et [TR]. Lequel des deux triangles TIP et RIA a la plus grande aire?**

*"I est le point de rencontre des diagonales du trapèze."*

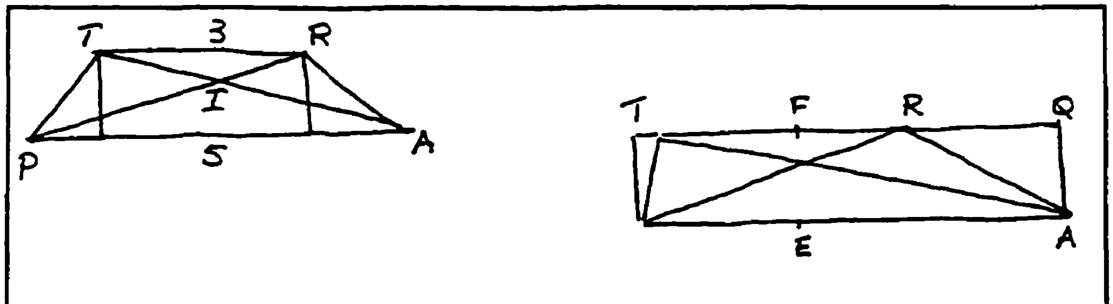
### Analyse des résultats

Le premier sujet a cherché les propriétés générales du trapèze sur lesquelles il pourrait s'appuyer.

> HUM: *Je le sais pas pourquoi mais j'aurais de la difficulté à justifier ma réponse, mais j'aurais tendance à dire qu'ils ont l'air pas mal semblables, quasiment pareils. Mais euh, parce qu'il y a sûrement des particularités dans le trapèze que j'oublie là.*

Curieusement lors de sa recherche d'informations, la hauteur et la base n'ont jamais été prises en considération. Il a abandonné disant qu'il n'avait pas assez d'informations.

SCI a commencé par faire le dessin d'un trapèze isocèle, ce qui l'a conduit à émettre l'hypothèse que les aires étaient égales. À partir d'un autre dessin, il a cherché et a fini par faire une étude par cas en considérant deux réponses possibles. Il a fait toutefois une erreur dans la démarche.




Question 4, production, SCI.

SCI: *La réponse varie selon moi, selon le cas. Si le côté RA est plus grand que le côté TP, dans ce cas-là ce serait le triangle RIA qui serait le plus grand. (...) j'ai divisé en deux triangles, à partir de, disons à I: l'intersection des deux diagonales. J'ai comme fait une droite qui aboutit sur les deux, sur les deux bases, PA et TR. Et puis j'ai complété le rectangle jusqu'au sommet A et jusqu'au sommet P. (...) dans mon cas, c'est PA qui est la grande base. (...) puisque RA est plus grand que TP, ça veut dire que (...) le rectangle qui s'en va jusqu'au sommet A disons, il a une base qui est plus grande (...) EA est plus grand que EP. (...) admettons EFQA. (...) la base de ce rectangle-là, elle est plus grande que la base du rectangle EPTF. Et puis la hauteur elle est identique (...) Donc ça veut dire que l'aire du rectangle EFQA est plus grande de l'aire du rectangle EPFT. Donc ce qui veut dire que puisque le triangle RIA c'est la moitié du rectangle EFQA, donc l'aire du triangle RIA, elle est plus grande que l'aire du triangle TIP.*

Il a refait ensuite le même raisonnement pour TP plus grand que RA. Lorsque nous avons répété son raisonnement pour s'assurer que nous avions bien compris, il s'est rendu compte de son erreur.

SCI: *Ah! non c'est pas vrai parce que (...) c'est pas une base de rectangle.*

Il est revenu alors à son intuition de départ en cherchant une explication.

SCI: *Si on appose une hauteur, ça change rien me semble.*

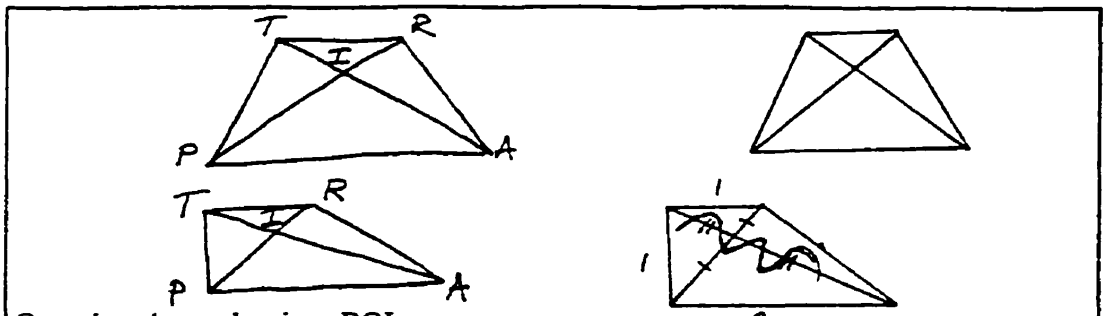
Abandonnant cette idée, il a alors envisagé une autre stratégie.

SCI: *ce que j'aurais tendance à faire probablement, je donnerais des mesures à TR et à PA, et puis j'essaierais de voir de façon générale qu'est-ce que ça peut faire. (...) Je mettrais admettons TR à 3, et PA à 5, et puis j'essaierais en apposant les diagonales de visualiser, par rapport à 3 et à 5, quelles sont les mesures des côtés du triangle. (...) j'essaierais de jouer avec ça, pis de trouver les mesures de IR, IA et RA (...) par rapport à 3 et à 5, donc par rapport à une formule générale, à "n" (...)*

Le cas particulier pouvait lui servir de tremplin à la généralisation. Il essaierait d'exprimer les autres dimensions en fonction de 3 et 5. Il n'a pas réalisé la preuve mais il est conscient que ces nombres particuliers doivent être utilisés différemment des exemples donnés en justification à la question précédente.

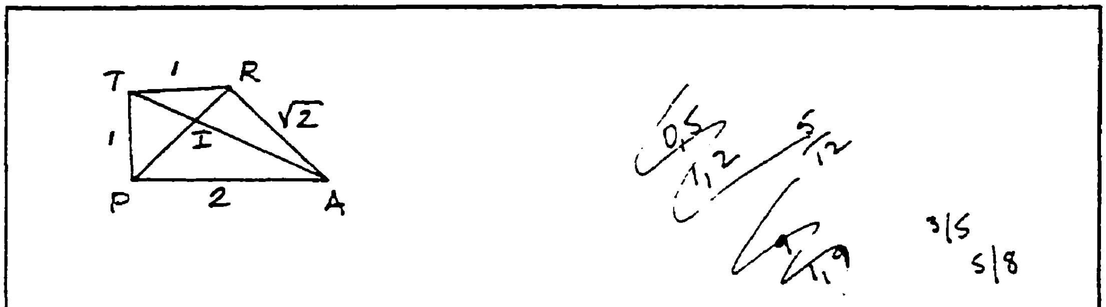
SCI: *faut que je l'amène de façon générale (...) sinon on revient au problème précédent: ça marche avec 3 et 5 mais ça marcherait peut-être pas avec 4 et 7. Donc faudrait vraiment trouver de façon rigoureuse, générale.*

Le sujet POL a commencé par faire l'hypothèse des aires égales à partir de dessins. Nous lui avons alors demandé sur quoi il se basait et avons insisté devant son silence. Il a demandé alors s'il pouvait développer à partir d'un des dessins (qu'il avait dessiné). Nous lui avons dit que oui. Il se peut que nous l'ayons incité malgré nous alors à utiliser un cas particulier mais il s'en est contenté facilement. Il a fait alors la conjecture que les triangles étaient semblables en invoquant l'évidence.




Question 4, production, POL.

Nous lui avons alors demandé ce qu'il entendait par triangles semblables. Il voulait bien exprimer le fait que les côtés étaient dans le même rapport. Nous lui avons alors dit: *Es-tu sûr de ça?* C'est alors qu'il s'est engagé dans une construction plus précise du trapèze particulier choisi: trapèze rectangle dont les bases mesurent 1 et 2 et la hauteur 1.




Question 4, production, POL.

Devant son silence, nous avons tenté d'expliciter sa démarche pour l'enregistrement.

> Interviewer: *qu'est-ce que tu fais là?*
> POL: *Je le refais*
> Interviewer: *en respectant les mesures?*
> POL: *ouais c'est ça*
> Interviewer: *T'as mis 1, 2, c'est ça?*
> POL: *Mmm, Mmm*
> *OK, oublions ça, ça c'est pas vrai*
> Interviewer: *c'est pas semblable?*
> POL: *Non*
> Interviewer: *T'as fait les rapports et ça marche pas?*

À partir d'un trapèze particulier, il a pris les mesures des côtés et fait les rapports entre les côtés correspondants des deux triangles, pour constater que les rapports n'étaient pas égaux. Il en a déduit que les triangles n'étaient pas semblables ou que sa méthode était incorrecte. Toutefois, ceci ne l'a pas fait se raviser et il a continué à raisonner sur un cas particulier.

$$A_{\Delta TAP} = 1 \qquad A_{TRAP} = \frac{3}{2} \quad \frac{h(b+B)}{2}$$

$$A_{\Delta TRP} = 1/2$$

$$A_{\Delta PRA} = 1 \qquad A_{\Delta TRA} = A_{\Delta TRA}$$

$$A_{\Delta TRA} = 1/2 \qquad A_1 + \cancel{A_2} = \cancel{A_2} + A_3$$

$$A_1 = A_3$$

Question 4, production, sujet POL.

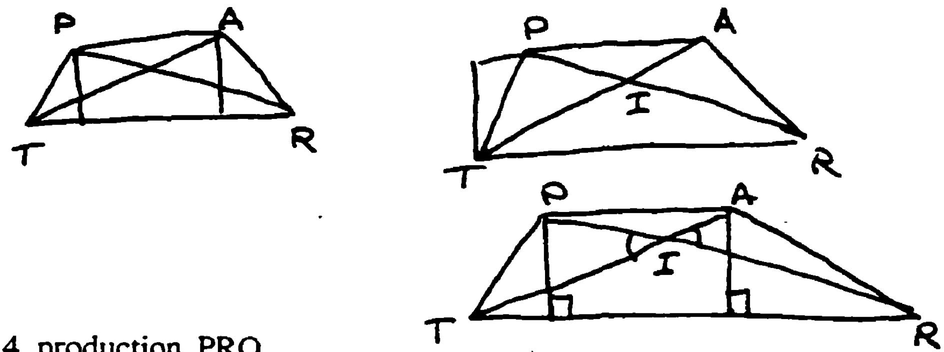
POL: *Mmmm, mmm*
Interviewer: (...) *tu vas juste m'expliquer ce que t'essaies de faire.*
POL: *j'essaie de calculer les aires des triangles*
Interviewer: *là, c'est l'aire du triangle TAP*
POL: *ouais, c'est ça. TAP (...) j'ai supposé que c'est un triangle droit, ici. Et puis là, je suis capable de calculer cette aire-là. Et puis l'aire de ce triangle isocèle-là.*
*Et pi là, je veux essayer de mettre en rapport (...) les deux triangles.*
*TIR avec le TIP, pi euh! PIA, RIA. J'ai essayé de (...) calculer l'aire de ça puis voir si c'est vraiment égal à cet aire-là.*

La démarche a été faite à partir d'un trapèze particulier, soit un trapèze rectangle dont les bases mesuraient 1 unité et 2 unités et la hauteur 1 unité. Il a pu ainsi calculer l'aire du trapèze (3/2 unités carrées), l'aire du triangle TAP (1 unité carrée) et l'aire du triangle TRP (1/2 unité carrée). De là, il a pu déduire l'aire du triangle TRA (1/2 unité carrée). Comme les aires des triangles TRP et TRA étaient égales, celles des triangles TIP et RIA étaient nécessairement égales aussi.

Le sujet PRO fut le seul à déduire que les aires étaient égales en raisonnant sur les hauteurs et les bases, directement.

PRO: *Si je prends ce triangle-là ici, ces triangles là* (TPR et RAP) *ont la même base pis la même hauteur. Euh! pour celui-là j'enlève ça* (PIA), *pis pour celui-*

*là j'enlève le même triangle. C'est pareil.*




Question 4, production, PRO.

Nous avons donc affaire ici à des comportements très différents. Devant la difficulté à produire une preuve, deux des sujets (SCI et POL) vont se rabattre sur des cas particuliers. Toutefois, SCI était conscient qu'il faudrait dépasser le simple constat. Son cas particulier lui servirait en fait d'exemple générique dans lequel serait distingué ce qui relève du particulier de ce qui relève du général. La preuve particulière a pour objectif de faire comprendre et d'aider à formuler la preuve générale. Dans le cas de POL, il s'est satisfait d'une argumentation reposant sur un dessin (particulier) et avait tout autant rejeté un résultat que contredisaient des mesures, conclusion qui contredisait d'ailleurs aussi le résultat principal, sans qu'il s'en soit rendu compte. L'argumentation est purement pragmatique et a comme fonction peut-être de se convaincre. Quant à PRO, il a directement fait appel aux propriétés de la figure.

### 4.6.3 Question 5: somme de deux nombres impairs

Question 5 de l'entrevue: la somme de deux nombres impairs.

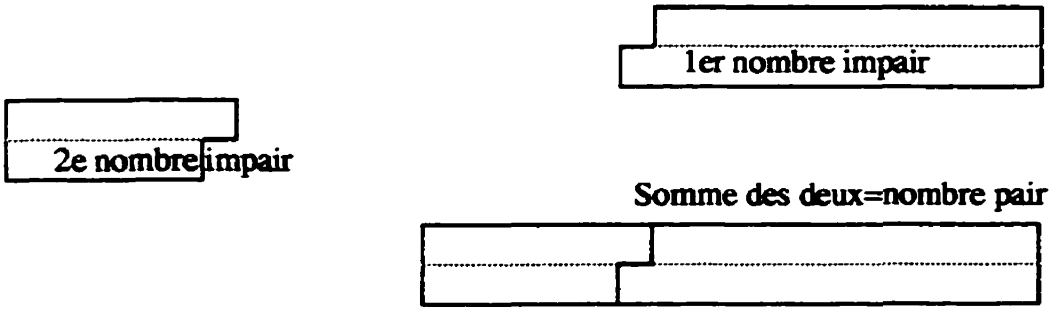
<u>Mise en situation:</u>
*"Voici un énoncé."*

**La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.**

*"Si tu devais montrer à tes élèves que c'est toujours vrai, comment ferais-tu?"*
*"Voici certains énoncés d'élèves. Qu'en penses-tu?"*

**1+3=4**
**5+13=18**
**5021+3375=8396**

$2n + 1 + 2m + 1 =$
$2(n + m) + 2 =$
$2(n + m + 1) =$
$2k$




***Un nombre impair est composé d'un nombre pair plus 1. Si j'additionne 2 nombres impairs, j'ai donc deux nombres pairs + 2. La somme de deux nombres pairs est un nombre pair. Si j'ajoute 2, j'ai encore un nombre pair.***

*"Quel énoncé préfères-tu? Pourquoi?"*
*"Es-tu à l'aise avec tous?"*
*"Ces énoncés t'apparaissent-ils tous valables?"*
*"Si oui, sont-ils tous sur un pied d'égalité? (mathématiquement, didactiquement, pédagogiquement?)*

Nous avons aussi demandé aux étudiants de se prononcer sur des arguments de preuve en leur demandant de choisir parmi plusieurs dans le but de montrer à leurs élèves qu'un énoncé était toujours vrai (question 5). Nous leur avons proposé des arguments d'élèves qui reposaient tantôt sur des essais numériques et tantôt sur une argumentation générale, plus ou moins explicitée ou formalisée. Les arguments prennent différentes formes: l'un est visuel, un autre utilise le symbolisme algébrique et un autre encore est écrit en mots. Ces différents niveaux et formes d'argumentations avaient pour objectif de provoquer des commentaires de la part des étudiants; commentaires que nous avons sollicités d'ailleurs en posant des questions entre autres sur leur préférence. Nous cherchions ainsi des indices sur le statut qu'ils accordent aux différents arguments.

### Analyse des résultats

Avant de proposer des arguments tout faits aux étudiants, nous leur avons demandé s'ils avaient une idée de comment faire *pour montrer aux élèves que ça* *fonctionne tout le temps.* Nous avons trouvé différents comportements assez cohérents avec leur comportement précédent.

> HUM a réalisé une preuve en s'appuyant sur un exemple générique.
> HUM: *je dirais que deux nombres impairs ont chacun un de plus qu'un nombre pair.* Si on *prend par exemple 7 et 5, parce qu'on sait qu'il y a toujours un nombre pair, un nombre impair, un nombre pair... C'est toujours une suite... Je le sais pas, comme ça... Si on prenait par exemple le 7 et le 5, le 7 a 1 de plus que le nombre pair qui le précède. Pis la même chose pour le 5 avec le 4. Donc si on fait la somme; c'est la somme des deux nombres impairs, je dirais que je fais la somme des nombres qui leur précèdent plus 2. Vu que la différence des deux est 2. Donc un nombre impair plus un nombre impair ça donne un nombre pair.*

Le discours de HUM n'est pas complètement organisé, mais nous pouvons voir que l'argumentation est générale. L'étudiant était parfaitement conscient du statut des nombres qu'il utilisait. En rejetant le premier argument proposé, l'argument d'un élève fictif, il s'est senti obligé de justifier l'utilisation de 5 et 7 dans son argumentation.

> HUM: *Moi j'ai trouvé 5 et 7 mais en disant là moins 1, plus 1...*
> Interviewer: *Même si tes cas étaient particuliers*
> HUM: *Ben j'en ai pris un et je l'ai comme généralisé un petit peu; j'ai pas pris 5 + 7 ça donne 12, j'ai dit que je le ramenais à deux nombres pairs, j'additionne par la suite les différences donc...*

Cette discussion sur les statuts différents des nombres, utilisés d'une part par un élève (1er argument) et d'autre part par notre étudiant, a débouché sur le rôle que pourraient avoir ces exemples particuliers utilisés par l'élève. Mais le résultat n'est pas clair.

> HUM: *C'est sûr que quelqu'un qui est déjà convaincu, ça peut montrer par la suite que sa preuve est bonne, là, s'il prend ces nombres-là, il les prend dans sa preuve, ...c'est beau... Pas la preuve mais mettons, quelqu'un donne une formule pour montrer que c'est toujours pair, il peut s'en servir, de ces exemples-là, mais après avoir montré une formule plus générale là.*

Ici il y a une double idée pensons-nous; il y a l'idée d'utiliser des exemples pour vérifier la preuve ou une formule et il y a l'idée d'appliquer la preuve et la formule pour montrer qu'elle produit bien ce à quoi on doit s'attendre. Nous avons essayé d'éclaircir ce point sans beaucoup de succès.

> Interviewer: *Ouais, ça servirait à quoi? Ça servirait de vérification à sa preuve?*
> HUM: *Exactement! À son équation, entre guillemets*
> Interviewer: *Pour être sûr qu'il s'est pas trompé, pour heu...*
> HUM: *Pour voir que... Comme moi je l'avais déjà trouvé dans ma tête qu'on*

> *soustrait. C'est toujours un de plus qu'un nombre pair, pis par la suite j'ai vérifié pour 5 et 7 si c'est bien vrai mais au départ c'est général là, ce que j'avais donné.*

S'agit-il d'une vérification comme lorsqu'on résout une équation où il est de bon ton de vérifier notre solution en cas où nous aurions fait des erreurs de calcul? S'agit-il comme nous l'avons déjà dit de vérifier que la formule produit bien ce qu'on veut? Dans ce dernier cas, la vérification jouerait un rôle de confirmation: on ouvre le robinet pour montrer que l'eau coule bien. L'exemple qu'il donne pour illustrer son propos n'éclaire pas vraiment. Mais son discours met en parallèle des subtilités difficiles à expliciter. Quelqu'un peut être convaincu que la somme de deux nombres impairs est paire et produire des exemples; ceux-ci ne peuvent constituer une preuve. Toutefois quelqu'un peut avoir dans la tête un énoncé général, comme tout nombre impair s'exprime comme la somme d'un nombre pair et 1, et le concrétiser dans un exemple (5 = 4 + 1); cet exemple n'est pas une preuve, mais on l'utilisera pour faire la preuve. Il est exemple générique.

Par ailleurs différentes vérifications peuvent être utilisées en mathématiques: des vérifications pour s'assurer qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul, des vérifications pour s'assurer que les transformations algébriques effectuées sur les équations n'ont pas changé l'ensemble solution (cf. §3.3.1), des vérifications sur la généralité d'un résultat, dans une preuve. Pour HUM, la preuve a comme fonction de convaincre de la généralité du résultat et dans ce sens, l'argument 1 ne remplit pas cette fonction, en tout cas il ne convaincrait pas tous les élèves: *"On aurait pu en essayer 50 et il en aurait d'autres qui n'auraient pas été convaincus encore!"* Mais la vérification n'est pas forcément utile pour convaincre. La vérification pourrait servir à vérifier la preuve dans la mesure où des erreurs ont pu survenir. Évidemment nous pouvons nous interroger sur la répercussion de ces vérifications sur la généralité du résultat. Nous avons demandé à HUM qu'est-ce qui arriverait si la vérification infirmait l'énoncé de départ.

> Interviewer: *S'il trouvait 5 + 13 égal 17*
> HUM: ... *Avec son équation qu'il avait trouvée? Ben ça lui prouverait que la généralité qu'il avait au départ, elle est pas bonne là. Parce que j'imagine qu'à son âge il devrait savoir que 13 + 5 = 18.* (Rires) *mais heu...c'est ça et je trouve que ça on peut les poser mais après avoir vérifié si notre généralité est bonne.*

Deux idées sont émises ici. Si à partir d'un énoncé général, on aboutit à une formule qui produit des exemples faux, alors l'énoncé de départ est faux. Par ailleurs, si l'énoncé de départ a été vérifié généralement vrai, alors on peut produire tous les exemples qu'on veut. Il ne s'agit pas tant d'une vérification de la preuve mais de concrétiser le résultat.

Plusieurs recherches soulignent le fait que même après qu'une preuve générale ait été produite, des élèves ou étudiants sentent le besoin d'une vérification sur des cas particuliers, parce que ceux-ci les convainquent davantage que la preuve générale. Nous pensions avoir affaire à une telle situation ici. Or, nous sommes portée à croire, suite à cette entrevue, que le rôle de cette vérification peut varier selon les situations. La preuve convainc que l'énoncé est vrai dans sa généralité mais la vérification, après coup, montre l'efficacité particulière de l'énoncé de départ. Nous rejoignons ici les commentaires de Martin et Harel (1989) à l'effet que la preuve générale soit vue comme une procédure à suivre pour générer des cas particuliers.

Le deuxième sujet, SCI, comme le premier utilise un raisonnement général sur un cas particulier, bien que, pour lui, le discours reste davantage collé à ce cas particulier, c'est-à-dire qu'on ne retrouve pas de formulations de la généralité des affirmations.

> SCI: *Probablement que j'irais en montrant par une division par 2, c'est quoi un nombre impair, c'est quoi un nombre pair. Je ferais une division par 2, je dirais mettons 38. Je divise par 2, ça donne 19, il y a un reste de zéro. Et puis je ferais aussi... 47. Je le diviserais par 2. Bon ça donne 23, il reste 1. Et puis je dis; si on additionne deux nombres impairs ensemble, admettons 47 et 19, ça fait 23 reste 1 et puis aussi... 19, ça fait 9 reste 1. Donc là OK. Le 23 et 9 sont... on s'en fout! Mais on prend les deux restes, il reste 1. Donc dans le fond, deux fois qui reste 1. Donc finalement au total il reste 2, mais puisqu'on divise par 2, ça fait comme un entier de plus et là il reste zéro.*

Cet étudiant fidèle à lui-même a rejeté le premier argument proposé reposant sur trois essais numériques. Faute de temps, nous ne l'avons toutefois pas relancé sur le fait que lui-même avait utilisé des exemples particuliers.

Quant à POL, il a trouvé l'énoncé évident et encore une fois l'interviewer a dû l'inciter à poursuivre.

> Interviewer: *C'est trop évident pour* (inaudible)
> POL: *Oui mais il s'agit juste de prendre n'importe quel exemple, là*
> Interviewer: *OK*
> POL: *Me semble que ... 1 plus 3, ça fait 4, 3 plus 5, ça fait 8; c'est évident que ça va toujours donner heu...*
> Interviewer: *Donc tu donnerais des exemples*
> POL: *Oui, oui. Ben là c'est... Faut-tu trouver une formule... une formule générale ou...*
> Interviewer: *Tu es dans la classe puis euh... Ça marches-tu toujours? Disons*

> *que* (inaudible)
> POL: *Oui, c'est sûr que ça va marcher toujours, C'est ça.*
> Interviewer: *Pas sûr moi! Un élève dit ça.*
> POL: *Je vais y penser.*
> Interviewer: *es-tu sûr que pour des gros gros nombres ça marche?*

POL a fini par donner un argument reposant sur le chiffre des unités, argument toutefois qu'il qualifie de pas très scientifique: "*si t'as deux chiffres des unités qui sont impairs, c'est sûr que l'addition des deux est paire...*" Devant les arguments des élèves proposés par la suite, il a précisé que pour lui c'est la preuve algébrique qu'il préfère et que c'est ce type de preuve qu'il appelle scientifique: "*ce que j'entendais comme scientifique, c'était vraiment celle-là..*" Devant les arguments proposés, il a souligné que les essais n'étaient pas suffisants.

> POL: *C'est sûr que de cette façon-là... comme je l'avais dit, c'est pas tellement scientifique parce que justement tu peux peut-être trouver un cas qui va pas satisfaire à l'énoncé. (...) Mais celle-là est sûre à tout coup. Tu peux pas passer à côté.*

Mais il a retenu quand même cet argument pour utilisation en secondaire I, comme le précise l'extrait ci-dessus.

> POL: *Je préfère beaucoup l'algèbre, là, pi j'opterais pour celle-là. mais quelqu'un qui... comme au secondaire I, j'irais peut-être plus avec ces deux-là.*
> Interviewer: *Avec euh... les exemples, pis le dessin.*
> POL: *Avec les exemples, pis avec le dessin.*

Le quatrième sujet[46], PRO, a utilisé une argumentation encore une fois générale sans besoin d'utiliser des nombres particuliers. Son argumentation n'est toutefois pas bien articulée.

> PRO: *Parce que la différence entre deux impairs c'est 2. Là je veux dire deux consécutifs là* (brouhaha). *Parce que si je fais l'inverse, la somme de deux nombres impairs est un nombre pair. Donc si je fais un nombre pair moins un impair, ça donne un impair... Pis entre chaque nombre impair, y a toujours un espace de deux.*

PRO a rejeté évidemment les simples essais.

Nous avons donc soumis quatre arguments aux étudiants: des essais rejetés trois fois sur quatre; une preuve algébrique, une preuve par dessin et une preuve en mots. Pour le quatrième sujet, les trois derniers arguments sont équivalents:

PRO: *lui il dit en mots, lui l'a faite en expressions, c'est équivalent, pi lui l'a*

---

[46]Notons que l'ordre de présentation des résultats ne correspond pas à l'ordre dans lequel se sont passées les entrevues.

*dessiné. Donc chacun ont leur, leur façon de voir.*

POL a préféré la résolution algébrique, jugée plus scientifique. C'est aussi le premier choix de SCI qui y reconnaît en partie sa résolution et aussi parce qu'il a des réserves sur les autres arguments. HUM a préféré l'argument en mots, y reconnaissant son propre argument. Quant à l'argument algébrique, il a fait les réserves suivantes: il faudrait préciser la signification des expressions 2n+1 et 2m+1, puis changer la suite des calculs en respectant l'argumentation en mots.

> HUM: *bien sûr la première ligne est bonne, avec une petite description de ce que sont les variables mais je l'aurais pas continué de cette façon-là, mais j'aime bien la façon d'y aller algébriquement.*

Ce sujet a eu au départ de la difficulté à décoder l'argument algébrique, faisant une erreur dans l'interprétation de n+m+1:

> HUM: *c'est un nombre impair parce que n, c'est un nombre pair vu que 2n est pair, n est pair aussi, euh...*

Il a reconnu cette erreur plus tard mais en gardant toujours la même réserve pour l'argument. Ce n'est pas le fait que l'argument soit algébrique qui le dérange mais c'est comme si l'argument algébrique proposé n'expliquait pas ce qui se passe.

> HUM: *mon premier choix, ce serait un texte comme ça avec une petite représentation mathématique*
> Interviewer: *symbolique?*
> HUM: *symbolique.*
> *(...)*
> HUM: *ma préférence c'est la dernière puis elle est plus facile à... Ça, ça compléterait celle-là*
> L'Interviewer précisant ce dont HUM parle: *Ce serait la deuxième qui compléterait la quatrième*
> HUM: *Exactement.*
> *(...)*
> Interviewer: *Pas la quatrième qui compléterait la deuxième, c'est ça que je veux savoir*
> HUM: *non la deuxième compléterait la quatrième*
> *(...)*
> HUM: *je l'aurais continué en fonction du texte de la quatrième réponse.*

Le choix est donc l'argument en mots accompagné d'une représentation qu'il qualifie de mathématique; et ce, non pas parce que l'argument "symbolique" est supérieur, au contraire, mais parce qu'il représente l'argument verbal (à condition qu'il le copie).

Cet étudiant a fait des réserves sur le dessin de la même nature que pour l'argument algébrique.

HUM: *j'aurais aimé heu... peut-être une explication des symboles utilisés.*

Ici, comme dans la preuve algébrique, il a explicité complètement ce que signifie chacun des codes et a verbalisé l'argumentation. Le dessin a constitué son deuxième choix accompagné d'une explication. Sa conclusion s'est formulée alors en une préoccupation pédagogique:

HUM: *Je trouve qu'on irait chercher tout le monde dans la classe avec ça.*

Les choix sont guidés très fortement par la situation de classe qui est proposée comme nous le voulions d'ailleurs. Ainsi les commentaires lors des choix sont souvent faits en considérant le niveau des élèves auxquels ils s'adressent. Ainsi, la preuve par dessin est choisie par SCI pour le primaire et par POL pour secondaire 1. Cette preuve par dessin a soulevé quelques commentaires intéressants à souligner:

> HUM: *je trouve ça bien la façon qu'il a exprimé, schématisé, sauf que ça prendrait une explication supplémentaire*
>
> SCI: *j'avais pas pensé à une solution aussi simple que ça (...) moi c'est une pensée mathématique que j'avais. (...) y aurait peut-être des étudiants (...) que ça convaincrait pas des dessins. J'ai de la misère à me mettre dans la peau d'un étudiant de 12, 13 ans. Moi je suis d'accord avec ça, c'est une façon de voir les choses. mais peut-être qu'en faisant au tableau, y a un étudiant qui dirait (...) "oui, mais si le deuxième nombre pair, le côté qui dépasse, il le met en bas comme l'autre, ça va faire..." (...) Mais peut-être que ça convaincrait moins les étudiants que la deuxième solution qui est selon moi, plus... plus rigoureuse...*
>
> POL: *ouais, je trouve ça très bien. J'avais pas vu ça de cette façon-là. (...)c'est un petit peu plus évident là pour eux autres.*
>
> PRO: *Il l'a fait en dessin là. Ayoye! Il dit qu'il y a un petit bout qui dépasse pi un petit bout qui dépasse pour l'autre aussi. Ça fait un beau petit carré à la fin. Ben lui c'est le fun mais je sais pas comment. Bon dans le fond, il considère que des nombres pairs* (inaudible), *y en a un de plus.*

Le dessin est apparu pour eux une découverte. Ils l'ont accepté tout en émettant parfois des réserves en particulier sur sa valeur pour convaincre; on le dit moins rigoureux. Par contre on le dit aussi plus évident.

Quant à la preuve en mots, préférée par HUM, elle est jugée équivalente à l'argument 2 par les sujets POL et PRO, mais est critiquée par SCI qui considérait qu'elle utilisait un énoncé non démontré de même niveau que l'énoncé à démontrer: *"on* *pourrait peut-être lui dire d'abord "pourquoi que la somme de deux nombres pairs est paire?" Ce serait un peu redondant."*

En bref, les critères qui guident les quatre étudiants sont différents. Tous vont reconnaître le caractère de généralité d'une preuve, mais le fait qu'une preuve n'est pas générale ne conduit pas nécessairement à la rejeter comme argument pour convaincre les élèves. La capacité qu'a l'argument de convaincre semble être intervenue comme critère de choix pour tous sauf PRO. Celui-ci juge toutes les preuves générales équivalentes quel que soit le mode d'expression choisi (algèbre, dessin ou mots) et il ne fait aucun commentaire explicite sur leur capacité à convaincre les élèves. Pour HUM, le degré d'explicitation des preuves apparaît important surtout quand elles utilisent un code: dessin ou symboles. Sa préférence va à l'argument en mots, plus explicatif. Tous, sauf PRO, manifestent une attirance pour la preuve algébrique même HUM qui n'aime pas particulièrement l'argumentation sous-jacente. La preuve algébrique est considérée comme plus rigoureuse par SCI et POL, les deux "matheux", mais ce dernier la dit équivalente à celle en mots (bien qu'en fait l'argumentation soit différente). C'est le pouvoir de conviction et le degré d'explicitation plus que la forme de l'argument qui semblent mis en cause, bien que ce soit lié. Ils acceptent tous comme bonnes (nous interprétons comme montrant la généralité de l'énoncé) des preuves non conventionnelles comme celle avec un dessin, preuve qui les étonne mais qu'ils acceptent.

Par ailleurs, il semble bien qu'ils choisissent la preuve qui ressemble à celle qu'ils ont eux-mêmes produite. Ils cherchent dans les preuves ce qu'ils ont eux-mêmes fait. Ainsi POL qui accepte une preuve empirique pour la 1ère secondaire avait aussi fait d'abord cette "preuve" pour une classe fictive. HUM a choisi le raisonnement qui colle le plus au sien, rejetant le développement algébrique qui s'écarte justement de ce raisonnement. SCI reconnaît en partie son raisonnement dans la preuve algébrique qu'il choisit et même y découvre une amélioration par rapport à sa preuve. PRO qui a accepté toutes les preuves avait un raisonnement qui pouvait s'accommoder de toutes.

Des épreuves semblables ont été soumises à des élèves du Royaume-Uni (Hoyles, 1996). Les résultats montrent que seulement 21% des élèves choisissent la même preuve pour eux et pour soumettre à un professeur pour évaluation. Dans l'ensemble, pour les sections algébriques, les élèves choisissent pour eux une preuve qui montre la généralité et qui est explicative (une preuve "narrative"). Pour l'évaluation par un professeur de mathématiques, ils choisissent une preuve qui montre la généralité mais pas nécessairement une preuve qui explique; ce sont alors les preuves formelles qui l'emportent. L'étude des quatre cas ici, montre que la preuve formelle (algébrique) a un statut privilégié mais qu'elle n'est pas pour autant choisie par les étudiants pour convaincre les élèves.

## 4.7 Autres questions

D'autres questions ont été posées qui apportent un éclairage complémentaire par rapport à la validation. Nous les décrirons brièvement maintenant.

### 4.7.1 Question 6: définition de la moyenne

Question 6 de l'entrevue: la moyenne.

Mise en situation:

*"J'ai posé à des élèves la question..."*

6) **Situation**:

**Qu'est-ce que ça veut dire trouver la moyenne?**

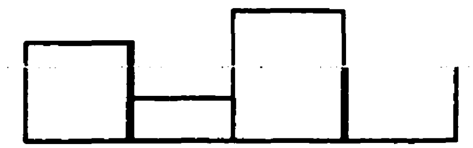
*"Voici qu'est-ce qu'ils ont répondu."*

**Réponses des élèves**:

1) **Ça veut dire partager également.**

2) **J'additionne toutes les données et je divise par le nombre de données.**

3) **C'est comme si on égalisait. R'garde j'ai des piles de livres pi j'les égalise.**



4)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

5) **Moyenne veut dire généralement, à peu près.**

*"Que pensez-vous de ces affirmations?"*

Sous-questions:

*"Est-ce mathématique?"*
*"Est-ce mathématiquement correct?*
*"Est-ce bon à utiliser pour les élèves?"*

Cette situation a été proposée aux étudiants tout particulièrement pour voir quel statut ils accordaient au symbolisme, à une représentation visuelle et à une formulation en mots, les uns par rapport aux autres. Les énoncés étaient encore une fois prétextes à commentaires. Nous n'avons pas eu le temps d'approfondir en posant les sous-questions prévues dans le protocole.

**Analyse des résultats**

La première observation que nous avons faite lors de l'analyse des résultats est que la formulation de la question "qu'est-ce que ça veut dire trouver la moyenne" renvoyait à une explication.

> PRO, en référence à l'énoncé 2: *Ben, il donne la définition de la moyenne, mais ça dit pas qu'est-ce que ça veut dire de trouver la moyenne. Il définit la moyenne. Ça veut pas dire qu'il comprend par exemple. ...l'autre, cette expression-là, "partager également", je donne plus de compréhension à celle-là.*

Si bien que les énoncés 2 et 4, jugés équivalents par tous, ont été classés souvent en dernier parce que ne répondant pas à la question. L'énoncé 2, la formule en mots, a dans un cas (SCI) été préféré à l'énoncé 4 (formule symbolisée) et même à l'énoncé 3 (dessin) parce qu'expliquant mieux.

> SCI: *j'aime autant mieux quelque chose qui est expliqué en mots qu'une simple formule qui est lancée comme ça. (...) Pour faire comprendre à un étudiant, c'est quoi la moyenne, je lui donne ça, il comprend pas plus, tandis qu'en lui expliquant, comme la solution no 2 qui nous dit "j'additionne toutes les données et je divise par le nombre de données" moi je trouve que c'est beaucoup plus explicite comme solution.*

Le premier énoncé a été jugé le plus souvent trop peu explicite (HUM, SCI, POL) de même le dessin (HUM, SCI).

> HUM: *j'aurais aimé qu'il termine avec quelque chose de plus général comme par exemple, ce serait le nombre de livres que chaque pile aurait si elles étaient toutes égales. Il les a égalisées, mais j'aurais... J'aime le fait qu'il donne un exemple comme ça précis; ça me prouve qu'il a l'air de de comprendre ce que ça veut dire, mais je trouve que ce n'est pas suffisant.*

> SCI: *faudrait au moins qu'il dise pourquoi que c'est cette ligne-là qui est le milieu.*

Le dessin a quand même été généralement apprécié malgré les quelques commentaires critiques. Il apparaît souvent comme premier choix (HUM et POL et peut-être PRO) permettant une explicitation des compensations.

Quant au dernier énoncé, il a été généralement considéré comme inacceptable. L'argument utilisé pour le rejeter n'est cependant pas celui auquel nous nous attendions. Nous référions à une conception inadéquate de la moyenne comme nombre près duquel devrait se retrouver chaque donnée. Les étudiants ont tous réagi comme le sujet HUM:

> *Je dirais qu'une moyenne vu que c'est calculé avec des chiffres précis, ça peut pas donner un chiffre à peu près.*

Ils ont tous associé les formules en mots et symbolique. Certains ont associé les énoncés 1 (partage égal) et le dessin (piles de livres) étant donné que dans les deux cas il y ait égalisation (POL et PRO). Mais on a vu aussi que dans le dessin il n'y avait pas la division par 4 que pouvait supposer l'énoncé 1 (SCI).

Nous retenons deux aspects de ces résultats: le symbolique explique mal et, par opposition, les mots expliquent mieux. Le dessin a une valeur explicative, mais nécessite une explicitation.

### 4.7.2 Question 7: addition de fractions

Devant l'erreur d'additionner les dénominateurs et les numérateurs, l'intervention peut consister à rappeler un algorithme. Elle peut aussi consister en une estimation de manière à montrer que la réponse donnée n'a pas de sens. Elle peut encore s'appuyer sur un dessin. La représentation visuelle et la verbalisation peuvent ou non référer à un objet concret du type barres de chocolat. Par cette question, nous voulions vérifier les moyens dont les étudiants disposaient pour intervenir.

Questions 7: addition de fractions.

<u>Mise en situation:</u>
**Addition de fractions**
**Un élève dans la classe effectue le calcul suivant**

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{2}=\frac{8}{10}$$

a) *"Que faites-vous?"*

b) *"Vous voulez trouver la bonne réponse que faites-vous?"*

[Si le temps le permet, demander d'envisager différentes façons!]

### Résultats

Le moyen privilégié pour traiter cette erreur en classe est le rappel de l'algorithme (HUM, SCI et POL). Un cas seulement (PRO) a utilisé une estimation: la première fraction étant plus grande que la demie, si j'ajoute une demie, la réponse est nécessairement plus grande que 1.

## 4.7.3 Question 8: multiplication de fractions

Les résultats donnés par ce problème peuvent nous renseigner sur ce que les futurs enseignants considèrent comme une explication.

Nous demandions aux étudiants d'introduire la multiplication de fractions aux élèves. Nous voulions voir s'ils se contenteraient de donner l'algorithme ou s'ils chercheraient à faire comprendre pourquoi il en est ainsi. Dans le cas où les étudiants voulaient faire comprendre, nous voulions savoir sur quoi s'appuyait leur argumentation.

Question 8: multiplication de fractions.

Mise en situation:
"Vous travaillez en classe la multiplication de fractions. Comment faites-vous? Illustrez sur l'exemple proposé."

**Multiplication de fractions. Exemple:**

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

### Analyse des résultats

La première stratégie que nous avons observée consistait à déduire la règle d'un exemple, par observation. Ici le tout est concrétisé par une tarte.

HUM: *J'aurais tendance à faire un exemple banal au début... deux pointes de tartes!* (rires) *euh... si on prend une tarte et on la coupe en 2, on a deux demies, on a 2 une demie; et puis on sait que quand on fait une demie plus une demie, ça fait 1 (...) Pis une demie plus une demie c'est l'équivalent de deux fois une demie. Donc on voit que deux fois une demie, ça donne 1. Euh... ensuite* *j'aurais tendance à faire 2 c'est 2 sur 1, fois une demie est égal, on sait que ça donne 1. Alors je demanderais de voir qu'est-ce qu'on peut en déduire.* (Rires) *Je mettrais ça au tableau devant tout le monde pis je leur demanderais euh... qu'est-ce qu'ils remarquent, qu'est-ce qu'on a fait pour en arriver à 1.*

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = 1$$

En comparant l'algorithme de multiplication de fractions et l'algorithme d'addition de fractions avec l'erreur commise précédemment (question 7), SCI en est venu à s'interroger sur pourquoi la procédure d'opérer sur les numérateurs et les dénominateurs séparément marche dans un cas et pas dans l'autre. Après une première tentative qu'il qualifie de mathématiques (encadré ci-après), il prend une voie *logique*, selon ses propres mots.

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7+4}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$$

Il en est venu alors à se situer dans un contexte concret de probabilité pour expliquer la multiplication de fractions. Il en est arrivé à déduire que 1 tiers multiplié par 1 quart égalait 1 douzième. Il restait alors à déduire la règle, par observation.

Pour POL, la stratégie d'introduction de la multiplication de fractions consistait à décrire l'algorithme sur plusieurs exemples en disant comment faire.

POL: *Avec une dizaine d'exemples un peu différents, là... pas toujours dans le même style de fractions, là. Des fractions vraiment différentes. Pis je leur explique comment faire la multiplication de fractions.*

Nous n'avons pu recueillir les résultats que pour HUM, SCI et POL, une interruption dans la bande étant survenue lors de l'entrevue de PRO. Deux étudiants sur trois ont donc ce sentiment qu'il faille expliquer au-delà de comment faire, en s'appuyant entre autres sur une concrétisation des fractions. Le passage à l'algorithme ne dépasse pas toutefois la simple observation sur un résultat particulier.

## 4.8 Bilan

Cette pré-expérimentation nous a permis d'identifier des comportements de validation qui appuient notre cadre théorique et l'enrichit: une réelle démarche de preuve où l'activité de découverte et de validation sont étroitement liées (chez HUM), l'utilisation d'arguments intellectuels contextualisés sans recours à l'exemple (chez PRO), un grand recours aux nombres comme support au raisonnemnt avec aussi une discussion sur le statut des nombres utilisés (chez SCI et POL, mais surtout HUM), avec des niveaux selon que le discours est plus ou moins collé au cas particulier, que ce cas particulier est plus ou moins utilisé (dans le discours) comme exemple générique.

Nous avons constaté également que les critères utilisés pour juger d'un argument sont variables d'un individu à l'autre et que les exemples ont un statut qui bouge chez un même individu. De plus, nous voyons que le comportement des étudiants dans les tâches proposées est assez cohérent (tableaux synthèses, pages suivantes). L'étudiant PRO, peu loquace, allant généralement droit au but, a identifié l'équivalence des procédures ou des arguments utilisés sans accorder beaucoup d'importance à la forme. C'est le seul aussi qui a pu aisément passer d'une formule à l'autre dans le problème des fenêtres sans recours à l'algèbre, en restant dans le contexte, et qui traite l'erreur sur addition de fractions autrement qu'en rappelant l'algorithme. C'est le seul aussi qui traite une solution fausse en interprétant cette solution dans le contexte, encore une fois. La valeur de l'argument chez PRO ne tient donc pas à sa forme et la généralisation est étroitement liée au contexte. Par contre, les autres ont distingué les arguments selon leur valeur explicative (HUM surtout) et selon des critères extérieurs de rigueur (SCI, sans pouvoir expliciter clairement ces critères) ou de valeur scientifique (POL) avec toutefois une certaine ouverture aux solutions ou arguments que nous leur avons présentés.

HUM a choisi les arguments selon un critère de généralité et des qualités d'explication. Les arguments sont généralement améliorés en explicitant davantage les propriétés ou les codes. Ses productions personnelles montrent une attitude de recherche de propriétés générales. Seules les explications données lors de l'introduction d'une notion ou au moment d'une intervention ne reflètent pas ce souci de justification générale. Cette rupture nous la constatons aussi pour SCI, qui présente un portrait semblable en certains points à HUM, dans sa préoccupation de justification générale. Ceci nous fait dire que même si des étudiants, futurs enseignants, reconnaissent les qualités d'une argumentation du point de vue de sa généralité, le passage à une validation générale dans l'explication et l'intervention ne va pas de soi. Nous avons observé le passage à une règle générale à partir d'un simple constat (question 8) et le rappel de l'algorithme comme seule intervention face à l'erreur (questions 7). Par contre, de manière générale, nous avons remarqué une ouverture des étudiants face à des formes de validation différentes, lorsque nous leur en proposions. Le manque de rigueur et de sens que nous avons observé lorsqu'ils ont à expliquer ou à intervenir pourrait alors s'expliquer par un manque de moyens. Mais évidemment, la validation d'un algorithme n'est pas chose facile a priori et notre exemple était peut-être, en ce sens, mal choisi.

Tous sauf PRO ont utilisé des exemples pour supporter leur raisonnement. Le rôle de ces exemples a été discuté par HUM en particulier. Cette discussion (et d'autres commentaires) montre que le rôle des exemples par rapport à la preuve peut varier et qu'il n'est pas clairement identifié. Par ailleurs le recours à un contre-exemple ou à un argument qui met en défaut un raisonnement (qui donne la bonne réponse) ne semble pas faire partie de la pratique courante de validation des étudiants.

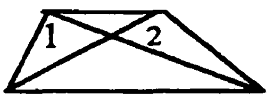
Dans la classe, les exemples peuvent même jouer le rôle de preuve. POL révèle une position ambiguë face aux essais ou exemples particuliers. Il les a acceptés comme argument pour montrer aux élèves qu'un énoncé était toujours vrai tout en sachant que l'argument ne montrait pas cette généralité. Lui-même a utilisé assez fréquemment des arguments pragmatiques sans portée générale, bien qu'il s'agisse de l'étdiant qui a la formation en mathématiques la plus poussée. Il se peut que malgré tout il ait été démuni devant les tâches proposées. Il se peut aussi que le fait de placer l'étudiant en situation de classe a pu déterminer des choix différents de ceux qu'il aurait fait ailleurs. Ainsi, il se pourrait que les choix didactiques diffèrent des choix mathématiques. Le choix d'une preuve ou d'un argument pourrait être déterminé par la fonction qu'on veut lui faire jouer. Les choix des étudiants sont guidés par la nécessité de convaincre mais aussi par la nécessité de rejoindre tous les élèves. HUM l'a explicité clairement. SCI, préoccupé par la rigueur, pourrait utiliser des dessins pour les visuels, lui se disant plutôt auditifs. Le potentiel d'un dessin, par exemple, pour travailler la preuve pourrait alors être sous-estimé. La qualité explicative des arguments est intervenue souvent lorsque étaient discutées des solutions d'élèves du point de vue de l'enseignant qui analyse: il y a trop peu, il faudrait expliquer davantage, ce sont seulement des calculs. Mais elle est aussi intervenue lorsque c'était le temps de faire le choix d'un argument, en particulier chez HUM, très préoccupé par la compréhension des élèves.

Nous avons été étonnée de l'ouverture des étudiants qui, par moments, semblaient vraiment découvrir une nouvelle façon de voir. Nous avons aussi été étonnée de leur perspicacité à voir dans un argument, un autre, donc de leur capacité à faire des liens entre les arguments et à compléter l'un par l'autre. Ils ne voient pas cependant aussi facilement nous semble-t-il les différences entre arguments. Ou bien ils rejettent un argument ou une solution parce qu'ils ne la comprennent pas, ou ils discutent des arguments seulement en tenant compte de la forme ou du degré d'explicitation.

## Tableau I
### Synthèse des résultats d'entrevue

| HUM<br>profil sciences humaines | SCI<br>profil sciences pures | POL<br>profil sciences pures polytechnique partiel | PRO<br>professionnel sciences |
|---|---|---|---|
| **Problèmes: réactions à des solutions d'élèves (questions 1 et 2 de l'entrevue)** | | | |
| Réactions lorsque le raisonnement est correct (problème des robes et des jupes): | | | |
| choix: solution en mots + calculs | (rien à signaler) | résolution personnelle: algébrique<br>choix: solution en mots qui copie une résolution algébrique | voit l'équivalence des procédures même dans le cas où la réponse est fausse mais le raisonnement juste; ne s'attarde pas à la forme. |
| Réactions au raisonnement erroné, bonne réponse (problème de l'autobus): | | | |
| cherche à valider par un dessin; n'y arrive pas; semble convaincu que c'est bon | identifie l'erreur: finit par accepter devant la bonne réponse; ne cherche pas de contre-exemple; voudrait des explications de l'élève | résout d'abord algébriquement, accepte les solutions des élèves, peut-être en référence à la réponse; dit sa solution idéale. | utilise une argumentation qui repose sur le contexte, pour mettre en défaut la procédure. |
| **Formule à construire: la fenêtre (question 3 de l'entrevue)** | | | |
| Production personnelle de la formule | | | |
| recherche le général à partir d'un cas particulier; | raisonnement à partir des propriétés | fait une suite numérique; reste collé au particulier; constatation sur dessin. | raisonne à partir des propriétés (enregistrement pas clair). |
| Équivalence des formules | | | |
| argument algébrique | argument algébrique | voulant expliquer sans algèbre (consigne de l'interviewer), il explique sur une figure d'abord de façon générale puis retombe sur le particulier | équivalence des procédures dans le contexte. |

**Preuve à produire (question 4 de l'entrevue):** Aire(1)=Aire(2) dans le trapèze




| HUM | SCI | POL | PRO |
|---|---|---|---|
| cherche des propriétés du trapèze et abandonne | 1er essai: preuve en 2 temps selon la longueur des côtés → échec<br>2e essai (projet): à partir de 2 mesures fixées, déterminer les autres en les exprimant en fonction des 1ères. | 1ère conjecture: les triangles sont semblables: conjecture rejetée par mesure et calculs.<br>2e essai: aires égales, confirmées par mesures et calculs. | après quelques hésitations, identifie la propriété même hauteur, même base. |

**<u>Preuve à produire et à choisir (question 5 de l'entrevue):</u>** Somme de 2 nombres impairs = nombre pair

Preuve personnelle

| | | | |
|---|---|---|---|
| raisonnement général sur un exemple | raisonne sur un exemple générique mais reste collé au particulier dans le discours | exemples, c'est évident... si l'élève n'est pas convaincu: il suffit de regarder le chiffre des unités (argument qu'il dit non scientifique) | argumentation générale mais pas très explicitée |

Choix de preuve

| | | | |
|---|---|---|---|
| rejet des essais; ils peuvent servir de vérification<br>1er choix: en mots avec algèbre remaniée et code expliqué<br>2e choix: dessin avec code expliqué | rejet des essais;<br>1er choix: algébrique (rigoureuse)<br>2e choix: dessin T. B., pour primaire;<br>s'interroge sur son pouvoir de conviction;<br>En mots: critique l'utilisation d'un énoncé de même niveau que l'énoncé à prouver | 1er choix: algébrique (plus scientifique)<br>2e choix: dessin avec exemples pour 1ère secondaire (bien que pas scientifique, ne montre pas la généralité). | rejet des essais;<br>voit les trois autres comme équivalents |

Justification des choix

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aller chercher tout le monde | ∅ | ∅ | ∅ |

**<u>Choix d'énoncé explicatif: moyenne (question 6 de l'entrevue)</u>**

Choix

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1er choix: dessin + explication | 1er choix: formule en mots<br>2e choix: dessin avec explication; voit les limites du dessin | 1er choix: dessin | dessin et partage égal |

Raisons des choix

| | | | |
|---|---|---|---|
| comprendre ≠ donner une procédure | comprendre ≠ donner une procédure | comprendre ≠ donner une procédure | comprendre ≠ donner une procédure |

**<u>Intervention face à une erreur: addition erronée de fractions</u>** (question 7 de l'entrevue)

| | | | |
|---|---|---|---|
| rappel de l'algorithme | rappel de l'algorithme | on peut/ on peut pas | estimation |

**<u>Explication: multiplication de fractions (question 8 de l'entrevue)</u>**

| | | | |
|---|---|---|---|
| déduction de la règle par observation sur un cas particulier dans un contexte de tartes. | cherche à justifier pourquoi un dénominateur commun pour l'addition et pas pour la multiplication<br>∅ échoue;<br>à partir d'un contexte de probabilité déduit un résultat; la règle est déduite ensuite par observation. | description de comment faire sur exemples variés | (non disponible) |

# CHAPITRE 5
# MÉTHODOLOGIE

## 5.1 Objectifs de l'expérimentation

Dans le chapitre 2 nous avons vu, que les mathématiques ont développé des moyens de validation particuliers pour vérifier la vérité d'un énoncé, par souci de rigueur. Mais également l'activité mathématique ne peut se passer de l'intuition et de la signification des concepts. Comment concilier sens et rigueur? Traditionnellement la preuve a été utilisée dans l'enseignement pour sa fonction de vérification dans le cas d'énoncé qu'on savait déjà vrai et qu'on utilisait déjà depuis longtemps, si bien que la preuve n'avait pas de sens dans l'activité mathématique de l'élève. Toutefois, plusieurs programmes scolaires ont fait un tournant majeur par rapport au rôle de la preuve en introduisant celle-ci dans une démarche où des expérimentations sont possibles, où des conjectures sont formulées et testées. C'est ce qui est arrivé au Royaume-Uni (Hoyles 1996), depuis déjà plusieurs années. C'est aussi les orientations du nouveau programme du secondaire du Québec. Cependant, dans nos manuels, tout au moins au premier cycle du secondaire et en algèbre, le résultat semble être une survalorisation, des essais numériques qui sont parfois même institutionnalisés comme moyen de vérifier si un énoncé est toujours vrai en mathématiques et donc comme preuve. Dans ce contexte, il faut se demander si les futurs enseignants que nous formons sont préparés ou prêts à introduire dans la classe une problématique de validation. Nous chercherons dans cette thèse à caractériser la validation dans les planifications et prestations de leçons des futurs enseignants du secondaire en mathématiques, d'après sa place (lieu et importance), ses fonctions et les moyens utilisés.

Nous nous limitons au premier cycle du secondaire et aux objectifs identifiés comme algébriques ou préparant à l'algèbre dans le programme d'études du Ministère de l'éducation. Nous avons la conviction que l'aptitude à valider se prépare dès le premier cycle du secondaire (et même avant). De plus, nous pensons que si un enseignant n'encourage pas à valider, au premier cycle du secondaire, il ne le fera guère plus au second cycle même si des objectifs de programme sont plus spécifiques à cet effet. Il peut cependant manquer de moyens ou avoir l'impression d'en manquer! Nous avons choisi l'algèbre plutôt que la géométrie parce que ce domaine est moins documenté, qu'il occupe une grande place dans le programme d'enseignement du premier cycle et que la validation devrait y trouver une place. Si elle se limitait qu'aux sections géométriques des manuels, elle risquerait de n'être encore que des exercices parmi d'autres.

Les conceptions et les comportements des étudiants peuvent varier selon leur chapeau: étudiant de mathématiques, de didactique, de psychologie ou de pédagogie. Dans la classe, les étudiants portant tous ces chapeaux à la fois, la validation risque alors de revêtir des fonctions multiples. Notre objectif toutefois n'est pas de déterminer les conceptions de la validation des stagiaires mais de caractériser les arguments de validation qu'ils utilisent et les étapes de validation qui apparaissent dans leurs leçons, arguments et étapes que nous-mêmes associons à la validation, en nous servant de notre cadre théorique.

## 5.2 Description de la population.

Quinze étudiants font l'objet de cette étude. Tous ces étudiants sont engagés dans un programme de formation qui les prépare à l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. La majorité (12) de ces étudiants étaient en deuxième année de formation et réalisaient leur premier stage d'enseignement en mathématiques. Les trois autres étudiants étaient en quatrième année et réalisaient leur deuxième stage d'enseignement en mathématiques.[47] Au moment de l'entrée dans le programme de formation, les étudiants avaient un bagage mathématique assez semblable. D'après les critères d'admission, tous avaient suivi au CEGEP, au moins deux cours de calcul différentiel et intégral et un cours d'algèbre linéaire. Ils devraient donc avoir été confrontés à des preuves formelles via ces cours.

Dans leur programme universitaire, ils avaient au moment de leur stage obligatoirement suivi et réussi le premier cours de didactique qui visait à les préparer à construire des leçons et à développer chez eux certaines habiletés de raisonnement et d'explicitation et de représentation de ces raisonnements. Ils ont également suivi un cours de didactique de l'algèbre, un cours portant sur le raisonnement proportionnel et les concepts associés, un cours de géométrie les initiant à une théorie axiomatique et un cours de structure numérique. Ils n'ont toutefois pas forcément réussi ces cours. Les étudiants de quatrième année avaient, en plus, suivi un cours de didactique portant sur

[47]En troisième année, les étudiants suivent un stage d'enseignement dans une autre discipline dont nous ne tenons pas compte ici.

les fonctions, un deuxième cours de géométrie et un cours les préparant à construire une séquence d'enseignement sur un thème. Nous décrirons certains aspects de ces cours et les conditions de stage dans la section suivante.

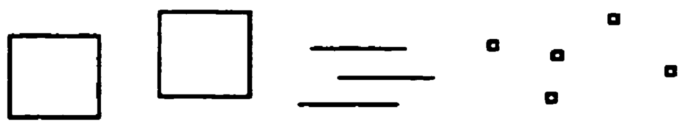
## 5.3 Cours de didactique et stage d'enseignement

### 5.3.1 Cours de didactique

Dans les cours de didactique donnés à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), une grande importance est accordée à la mise en contexte, aux représentations visuelles et aux exemples génériques, comme support à la validation. Les limites de ces supports sont par ailleurs discutées lorsque c'est pertinent. Prenons quelques exemples[48].

Pour montrer le critère de divisibilité par 3, les étudiants sont appelés à utiliser du matériel. À partir de l'exemple qui suit (figure 19a), une verbalisation peut alors être produite qui, tout en s'appuyant sur le cas particulier, est générale.

Soit le nombre 235



On peut partager chaque dizaine en 3 avec un reste de 1 unité par dizaine; de même on peut partager chaque centaine en 3 avec un reste de 1 unité; on aura donc un reste de 1 pour chacune des centaines et un reste de 1 pour chacune des dizaines. Il suffit donc que la somme de ces restes et des unités soit divisible par 3.

**Figure 19a:** Critère de divisibilité par 3 - preuve particulière

La preuve algébrique suivante (figure 19b) peut accompagner l'argumentation s'appuyant sur le matériel.

[48] Ces exemples n'ont pas forcément été utilisés en cours avec les étudiants qui sont sujets de notre recherche.

Tout nombre entier inférieur à 1000 peut être représenté par le développement décimal suivant: $a + b \infty 1\ 0 + c \infty 10^2$ où a, b, et c sont des entiers inférieurs à 10;

d'où $a + b \infty 10 + c \infty 10^2 = a + b(9+1) + c(99+1) = a + 9b + b + 99c\ c =$ $(9b+99c) + (a+b+c)$ qui est divisible par 3 si a+b+c est divisible par 3.

**Figure 19b: Critère de divisibilité par 3 - preuve algébrique**

Nous pouvons dire que cette preuve, générale pour un nombre inférieur à 1000, constitue un autre niveau de preuve par rapport à la précédente étant donné le symbolisme utilisé et le fait que le nombre utilisé ne soit pas particulier. Dans le premier cas, le nombre 235 n'est pas utilisé dans sa particularité non plus; il sert d'exemple générique. Mais il reste tout de même présent. Les étudiants voient-ils la différence? Ces explications ne sont pas nécessairement appelées preuve dans le cours, bien qu'elles puissent être considérées comme telles. Pour les étudiants, qu'en est-il?

L'exemple qui suit (figure 20a) illustre également l'utilisation d'un raisonnement général sur un cas particulier, dans un contexte de barres de chocolat.

Montrons que $^3/_4 = {}^6/_8$.

Soit $^3/_4$ d'une barre de chocolat: une barre divisée en 4 morceaux dont on en a pris 3.

Si on divise en deux fois plus de morceaux la barre de chocolat, alors les morceaux

seront deux fois plus petit, donc il faudra en prendre deux fois plus pour que ce soit équivalent.

**Figure 20a: Fractions équivalentes - raisonnement général sur un cas particulier**

Cette explication n'est pas appelée preuve dans le cours, mais elle veut justifier la manipulation des fractions pour produire des fractions équivalentes. Elle convainc sans l'ombre d'un doute. Pourrions-nous l'appeler preuve? Nous répondons oui, dans la limite de ce contexte et du sens conséquemment accordé à la fraction. Elle est très différente d'un simple constat (figure 20b).

Dans le premier argument (figure 20a) bien que l'exemple soit particulier, le raisonnement a une portée générale qui s'appuie complètement sur le contexte. La verbalisation peut permettre un passage du concret à l'abstrait qui a une valeur de généralité. Qu'on ait une barre de chocolat ou n'importe quoi d'autres, qu'on ait ces nombres ou d'autres, le raisonnement s'applique, bien sûr dans les limites où on donne à la fraction le sens partie d'un tout. Les étudiants voient-ils la différence entre l'argumentation illustré par la figure 20a et l'illustration commentée de la figure 20b.

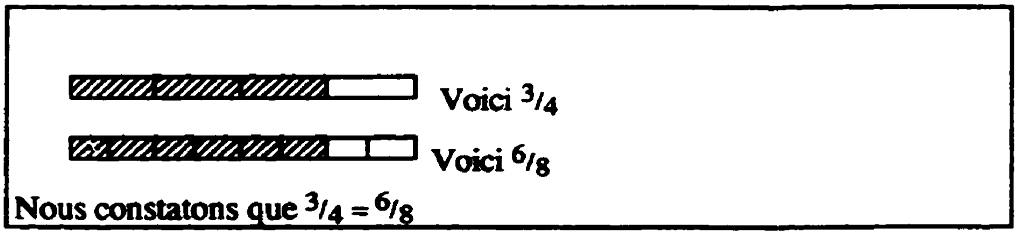



**Figure 20b: Fractions équivalentes -cas particulier**

Pour montrer que 3/4 = 6/8, l'illustration de la figure 20b suffit. Pour montrer de manière non contingente l'équivalence des fractions, l'argument 20a est plus près de l'objectif. Il rejoint les preuves intellectuelles de Balacheff (1988). Selon que l'on donne à l'explication la fonction de montrer que c'est vrai ou la fonction de "prouver" que c'est vrai, le choix entre les figures 20a ou 20b peut être différent. Quelles fonctions de l'explication les étudiants retiennent-ils?

Prenons un autre exemple: 2 tiers de 5 c'est 10 tiers (figure 21a).

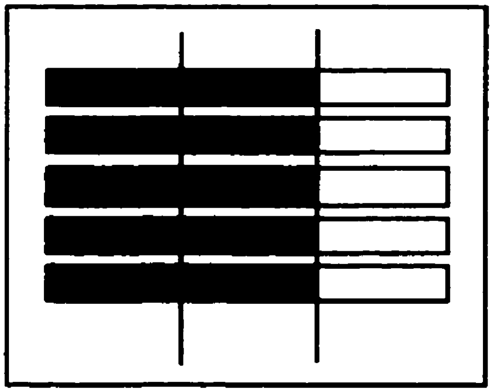


**Figure 21a: Équivalence numérique- à l'aide d'un dessin à portée générale**

On voit ici qu'on obtient 5 fois deux tiers, donc 5 fois, 2 fois un tiers donc 10 fois un tiers.

Le dessin qui suit (figure 21b) n'a pas du tout la même portée que le précédent:

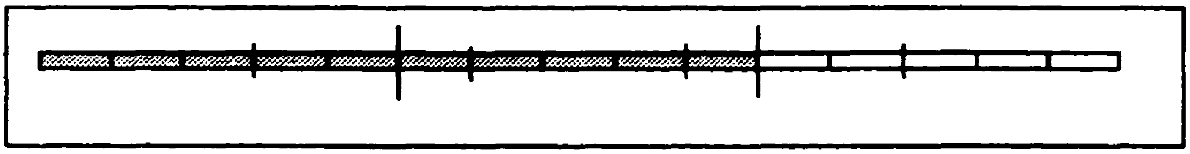


**Figure 21b: Équivalence numérique- illustration particulière**

Alors que le premier peut laisser entrevoir une généralité, le deuxième aura besoin d'être reproduit chaque fois qu'on voudra constater le résultat. Nous avons observé que certains étudiants avaient de la difficulté à voir les différences entre ces deux types d'illustration (figures 21 a et b).

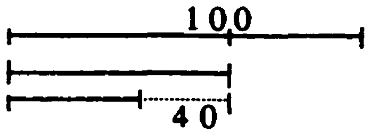
Dans le cours de didactique de l'algèbre, la validation est abordée de façon explicite au moment de l'introduction à l'algèbre via des activités de généralisation. Des situations telles celle du fabricant de fenêtre, présentée en question 3 de l'entrevue (chapitre 4), sont travaillées par les étudiants.

> "Dans une usine, on fabrique des fenêtres carrées avec des carreaux transparents et des carreaux de couleur. Il y a seulement les carreaux sur le pourtour de la fenêtre qui sont colorés. Ceux du centre sont transparents. Trouvez une formule qui permettrait de calculer rapidement le nombre de carreaux colorés dont on aurait besoin pour n'importe quelle fenêtre si on connaît le nombre de carreaux sur un côté de la fenêtre."

La validation des formules alors construites peut s'appuyer sur les régularités qu'exprime le contexte: pour trouver le nombre de carreaux de couleur il suffit de prendre le nombre de carreaux sur un côté, fois 4, puisqu'il y a le même nombre de carreaux sur chacun des côtés d'un carré, et d'enlever les coins qu'on a alors compté deux fois. Ces situations sont présentées en alternative à des suites numériques où la validation ne peut alors reposer que sur le constat d'un écart constant entre les termes, à partir de trois ou quatre termes, sans que l'on ait aucune information sur les caractéristiques générales de la suite. C'est souvent le cas dans les manuels: comme l'objectif n'est pas d'enseigner les suites, mais d'introduire à l'algèbre, les manuels semblent se refuser à mentionner à quel type de suites on a affaire. Nous avons donc encore une validation qui peut s'appuyer sur un cas particulier mais qui a une portée générale car elle invoque les propriétés générales de la situation.

Lors de la résolution de problèmes algébriques, les étudiants découvrent un moyen de résolution qu'ils trouvent intéressant parce qu'efficace.

La somme de deux nombres est 100 et leur différence 40.




C'est donc que l'un est égal à l'autre + 40; donc deux fois le premier nombre + 40 = 100 d'où (100-40)/2=30.

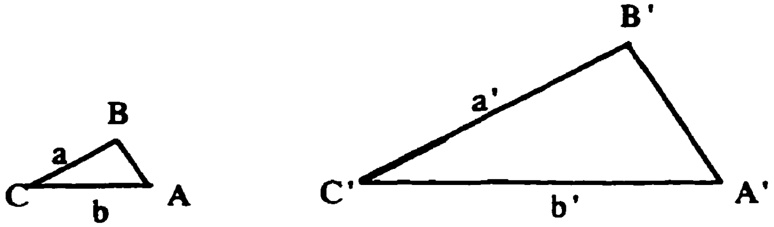
**Figure 22:** Résolution d'un problème à l'aide d'un dessin

Des segments (ou des surfaces) sont également utilisés pour travailler les propriétés des opérations telles la distributivité de la multiplication sur l'addition (figure 16, chapitre 3). Les limites des représentations sont habituellement discutées. Encore une fois, elles ne sont pas envisagées comme preuves. Dans la résolution de problèmes, elles servent comme support à la résolution. Dans le cas des propriétés des nombres, les représentations peuvent servir d'explications ou de justifications aux propriétés, conjointement à une verbalisation; elles peuvent être utilisées comme réponses à un pourquoi, dans les limites de la représentation (nombres positifs). Elles ne sont encore une fois pas explicitement étiquetées comme étant des preuves.

La plupart du temps, lorsque les cours se rapportent au premier cycle du secondaire, les raisonnements s'appuient sur du matériel ou une illustration, avec une grande importance accordée à la verbalisation et en ayant une intention plus ou moins explicite de validation générale. Par ailleurs, sous diverses formes, des preuves explicites apparaissent régulièrement, avec un souci, nous semble-t-il, d'enrichir le concept plutôt que de simplement vérifier qu'un énoncé est vrai. Ainsi seront privilégiées des preuves qui éclairent (Hanna, 1995). Nous avons donné un exemple de ce type de preuve dans le chapitre 2 (figure 2a, preuve 2), nous en donnons un autre ici.

Nous avons vu que deux triangles sont semblables si et seulement si les mesures de leurs côtés correspondants sont proportionnels. Démontrer qu'alors les rapports entre les mesures des côtés d'un triangle sont respectivement égaux aux rapports entre les mesures des côtés correspondants de l'autre triangle.

Soit a, b, les mesures de deux des côtés du triangle ABC et a', b', les mesures des deux côtés correspondants du triangle A'B'C'.




**Preuve 1:**
Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ alors $\frac{aa'}{a'} = \frac{ba'}{b'}$ car si on multiplie par un même nombre non nul, deux quantités qui sont égales, les produits sont aussi égaux; d'où $a = \frac{ba'}{b'}$ (simplification des fractions); et si $a = \frac{ba'}{b'}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ (pour les mêmes raisons).

**Preuve 2:**
Dire que les mesures des côtés correspondants sont proportionnelles c'est dire que le rapport entre les mesures des côtés correspondants est constant: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$; ce qui revient à dire qu'on peut obtenir chacune des mesures des côtés du triangle A'B'C' à partir des mesures des côtés du triangle ABC:
$a' = k \times a$ et $b' = k \times b$ d'où $\frac{a'}{b'} = \frac{ka}{kb}$ et $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$.

**Figure 23a:** Rapports internes dans des triangles semblables.

Dans les cours, la deuxième preuve pourra être privilégiée si on veut mettre en évidence le coefficient de proportionnalité qui étant le même assure de l'égalité des rapports internes. Une illustration plus explicite, sur un cas particulier, pourrait accompagner la preuve.

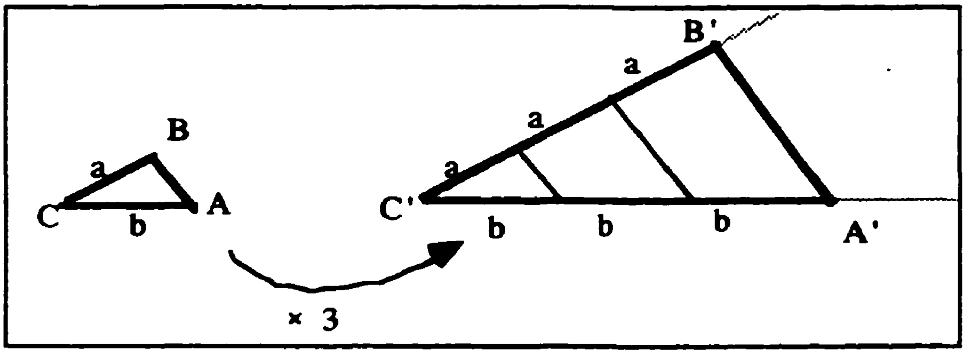



**Figure 23b:** Illustration de la preuve 2, figure 23a.

Signalons finalement que les étudiants suivent un cours de géométrie euclidienne et ont, dans ce cours, constamment à faire des démonstrations dans le cadre d'une théorie axiomatique. Les étudiants dont nous avons analysé les leçons et que nous avons observé en stage, via les enregistrements vidéoscopiques, avaient donc été confrontés à différents types de preuves sans toutefois que n'aient été discutées précisément la valeur des différentes preuves selon leurs caractéristiques et leurs fonctions.

### 5.3.2 Stage d'enseignement

Nous décrirons maintenant les conditions et exigences du premier stage d'enseignement réalisé par douze des stagiaires dont nous analyserons les leçons.

Ce stage d'enseignement en mathématiques se déroule dans une école secondaire sous la responsabilité d'un enseignant. Celui-ci cède deux groupes au stagiaire pour au moins une période de deux semaines. Il contribue à la formation du stagiaire par des rétroactions régulières qui aident ce dernier à s'améliorer. En même temps, l'enseignant doit laisser une certaine autonomie au stagiaire et lui laisser toute la latitude désirée pour expérimenter des approches pédagogiques, qui respectent, bien sûr, les contraintes du milieu.

Le stagiaire est aussi sous la responsabilité d'un superviseur, professeur ou enseignant du secondaire, représentant l'université. Ce superviseur doit s'assurer que l'étudiant respecte bien les exigences de l'université quant à la tâche à assumer à l'école et quant aux préparations de leçons. C'est lui qui, après une ou deux observations du stagiaire en classe et une rencontre avec l'enseignant associé, décide de l'évaluation du stage. Le superviseur est également responsable de l'évaluation des travaux exigés pour le stage, notamment la préparation de trois leçons, selon les directives émises dans le cahier de stage (annexe 2). Les responsabilités des différents intervenants sont décrites dans le cahier de stage (annexe 1). Il faut noter ici que le stagiaire doit produire la préparation de leçon avant son départ en stage, mais le plus souvent, à ce moment-là, le travail est à l'état d'une ébauche. Le stagiaire doit toutefois en avoir discuté avec le superviseur, bien que la responsabilité de ce travail reste la sienne. Dans le rapport remis au superviseur après le stage, le stagiaire doit revenir sur les leçons et leur prestation, de manière à les améliorer. Les exigences du rapport relatives à ces leçons sont fournies en annexe 3. C'est principalement suite à ce stage que nous avons recueilli nos données expérimentales.

Quant aux étudiants de quatrième année, ils prennent charge de la classe de l'enseignant associé pendant sept semaines. Avant le départ en stage, les stagiaires doivent produire une séquence d'enseignement consistant en une analyse du concept, de sa situation dans le programme, du manuel utilisé, en portraits-types des élèves avant et après enseignement, en un découpage par étapes des aspects à couvrir, en exemples de leçons et en un choix de principes d'évaluation. Une description de la séquence est fournie en annexe 4. Cette séquence doit être approuvée avant le départ en stage. Lors de la visite du superviseur, les stagiaires doivent remettre la planification détaillée de leur leçon. Une fois le stage terminé, les étudiants doivent également remettre un rapport dans lequel ils reviennent sur leurs planifications de leçons à la lumière de l'expérimentation en stage, comme le font les stagiaires de deuxième année (annexe 3).

### 5.3.3 Effet de la formation

Selon une étude comparative (Bednarz, Gattuso, Mary, 1996)[49] réalisée auprès de la cohorte d'étudiants entrant dans le programme de formation en enseignement des mathématiques au secondaire, à la session d'automne 1995, et d'un groupe étudiants finissants de la session hiver 1996, étudiants qui avaient complété tous les cours de didactique ainsi que les stages d'enseignement, nous pouvons signaler quelques changements qui peuvent résulter de l'impact de la formation.

Généralement, les changements vont dans le sens qui suit en ce qui concerne leur conception des mathématiques. Au début, ils ont tendance à penser que sans symbole, il n'y a pas de mathématiques ou que sans le langage et le vocabulaire qui leur sont spécifiques, il n'y a pas de mathématiques; ce n'est plus le cas en fin de formation. Au début, ils pensent que résoudre des problèmes en mathématiques, c'est mettre en application des règles de calcul, ou qu'il y a toujours une règle à suivre pour résoudre un problème en mathématiques, à la fin ils sont plutôt en désaccord. Avant, ils pensent que les mathématiques reposent sur un ensemble de définitions qu'il faut connaître, après moins.

Au sujet de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques, les débutants pensent que l'élève apprend les mathématiques en suivant le modèle présenté par le professeur et en le mettant en application dans différents problèmes, exercices, ou que les élèves préfèrent apprendre les mathématiques à partir d'un livre ou d'une

---

[49]Formation à l'enseignement. Subvention FODAR,1995-1998,

méthode; plusieurs finissants changent d'idée. Les débutants pensent que l'exploration et la manipulation seraient utiles pour les élèves plus vieux si le temps et le programme le permettaient et que ce n'est pas une bonne idée que les enfants s'entraident en mathématiques parce que ce sont les plus doués qui font tout le travail. Les finissants reconnaissent une plus grande valeur au matériel et à l'activité d'exploration et de représentation. L'accent n'est plus mis sur l'apprentissage de règles, de formules et d'algorithmes mais sur le raisonnement de l'élève et sur sa participation.

En bref, les étudiants de ce programme semblent progresser vers une mathématique et un enseignement des mathématiques moins formels, dans le sens de moins symbolique et moins axés sur des règles, définitions et formules. Ils donnent une place aux activités d'exploration avec matériel et envisagent différentes façons de voir et de faire. Ces effets nous pouvons les observer dès le premier stage d'enseignement.

## 5.4 Cueillette de données

Nous avons demandé aux étudiants de deuxième année de nous donner les planifications des trois leçons consécutives qu'ils devaient obligatoirement réaliser selon la description fournie en annexe 2. Nous référerons désormais à ce document en l'appelant planifications. Ces planifications comprennent une brève analyse du concept laquelle doit s'attarder sur les conceptions des élèves, les raisonnements importants à travailler, les habiletés à faire acquérir, les difficultés anticipées chez les élèves, les erreurs les plus fréquentes, les changements majeurs souhaités et les acquis (bons, mauvais ou nuisibles) des élèves en relation avec le sujet. Elles comprennent également les planifications de base des trois leçons: le sujet, le niveau d'enseignement, le portrait des élèves, les objectifs du programme, les préalables à la leçon, les intentions du stagiaire relativement à l'analyse du concept faite préalablement, une brève description des activités avec le matériel utilisé, les problèmes proposés et une justification des choix faits, les devoirs, les grandes lignes de la leçon. En plus, les planifications comprennent le scénario détaillé d'une leçon (planification détaillée) qui doit reproduire le déroulement en classe comme si on y était, en précisant entre autres comment seront présentés les exemples, les situations, le matériel et comment sera organisé le questionnement, les questions posées aux élèves, les réponses que le stagiaire anticipe et la manière dont il compte s'y prendre pour récupérer ces réponses. Les travaux présentés par les stagiaires ne sont pas de qualité égale et ne fournissent pas tous aussi clairement les informations demandées, certains stagiaires peuvent escamoter certains aspects quand d'autres les développent avec beaucoup de soin. Cependant, ils nous fournissent amplement d'informations pour caractériser les arguments et les étapes de validation de ces planifications.

Tous les stagiaires devaient également enregistrer sur vidéo au moins une leçon en classe, avec les élèves. Nous appellerons prestations, ces leçons enregistrées. Les prestations correspondent souvent à une des planifications et le plus souvent à la planification détaillée. De plus, les stagiaires ont présenté dans leur rapport de stage, la version améliorée d'au moins une leçon suite à l'expérimentation en classe. Nous appellerons planification améliorée cette version de la planification. Même si les stagiaires devaient produire des versions améliorées pour les trois leçons consécutives, le plus souvent une seule a été améliorée, celle qui a été l'objet d'évaluation par le superviseur.

Parmi toutes les planifications et les prestations que nous avons recueillies de la part des stagiaires de $2^{e}$ année, nous avons pris en considération toutes les leçons portant sur les sections identifiées comme algébriques ou préparant à l'algèbre dans les manuels et nous nous sommes limitée au premier cycle du secondaire. Nous avons ainsi constitué une banque de documents pour douze stagiaires ayant fait leur stage en $1^{ère}$, $2^{e}$ ou $3^{e}$ secondaires. Le tableau ci-dessous (Tableau IIa) résume le contenu des documents dont nous disposons pour ces stagiaires de $2^{e}$ année.

| NOM (FICTIF) DU STAGIAIRE | PLANIFICATIONS (AU MOINS 3) | PRESTATION (AU MOINS UNE) | PLANIFICATIONS AMÉLIORÉES |
|---|---|---|---|
| Alain (sec. 1) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Bernadette (sec. 2) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Brigitte (sec. 1) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Denis (sec. 2) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Frank (sec. 2) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Ginette (sec. 1) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Marcel (sec. 1) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Odette (sec. 2) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Paul (sec. 3) | ✓ | -- | ✓ |
| Patricia (sec. 2) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Tim (sec. 1) | ✓ | ✓ | ✓ |
| Violette (sec. 2) | ✓ | ✓ | ✓ |

**Tableau IIa:** Ensemble des leçons des stagiaires de deuxième année.

À ces douze stagiaires de $2^{e}$ année s'ajoutent 3 stagiaires de $4^{e}$ année. Leurs planifications ou prestations étaient étroitement liées aux leçons des stagiaires de deuxième année que nous avons analysées. Deux de ces stagiaires ont planifié dans les grandes lignes, avant le départ en stage, quelques dix-huit leçons consécutives en algèbre en deuxième secondaire et ont présenté au moins une planification détaillée de leçons conformément aux exigences du stage (annexe 2). Le tableau ci-dessous (IIb) résume le contenu des documents dont nous disposons pour ces stagiaires de 4$^{e}$ année.

| NOM (FICTIF) DU STAGIAIRE | PLANIFICATIONS (AU MOINS 3) | PRESTATION (AU MOINS UNE) | PLANIFICATIONS AMÉLIORÉES |
|---|---|---|---|
| Blanche (sec. 2) | √ | √ | √ |
| Cécile (sec. 2) | √ | √ | √ |
| Lucette (sec. 1) | Pas en algèbre | √ | Pas en algèbre |

**Tableau IIb:** Ensemble des leçons des stagiaires de quatrième année.

Nous avions choisi au départ d'analyser les planifications et prestations des stagiaires de deuxième année parce que seuls ces stagiaires devaient obligatoirement fournir les planifications de trois leçons consécutives. L'aspect consécutif des leçons nous apparaissait important pour analyser l'articulation d'une étape de validation avec les autres activités des leçons sur un thème donné.

Comme l'ensemble des leçons se divise en deux groupes selon leurs thèmes et objectifs d'apprentissage et qu'il s'est avéré que la validation pouvait dépendre de ces thèmes et objectifs, notre analyse s'organisera à partir de ces deux groupes.

Notons que les planifications précèdent la prestation et que les planifications améliorées suivent les prestations. Les planifications, prestations et surtout les planifications peuvent avoir été l'objet de conseils de la part du superviseur et de l'enseignant associé. Les planifications et prestations sont donc produites et revues conformément aux exigences de l'université et du milieu. Nous devrons en tenir compte dans notre analyse. Les effets de ces contraintes ne devraient pas provoquer une diminution de la place de la validation. Nous pensons que, tout au contraire, les superviseurs ont plutôt tendance de conseiller aux étudiants de poser plus de questions de type pourquoi.

## 5.5 Grille d'analyse

Notre objectif est de caractériser la validation d'après sa place et ses fonctions dans les planifications et prestations des stagiaires et d'après les moyens utilisés par les stagiaires pour valider.

Nous reconnaissons une validation ou un moment de validation dans les planifications et prestations des stagiaires lorsque l'acceptation d'une théorie, d'un résultat, d'un énoncé ou d'une procédure est en jeu. Nous appelons moyens de validation, les arguments et les supports à ces arguments qui sont utilisés par le stagiaire pour faire accepter cette théorie, ce résultat, cet énoncé ou cette procédure.

La place de la validation peut se concevoir comme le lieu où intervient une validation ou comme l'importance accordée à la validation dans la planification ou la prestation. Nous nous intéressons tout particulièrement au lieu, c'est-à-dire à l'endroit, dans la planification ou la prestation, où intervient une validation et à l'articulation de l'étape de validation avec le reste. Qu'est-ce qui est validé et à quel moment cette validation arrive-t-elle dans la structure de la leçon? Comment s'articulent dans la leçon les exemples, illustrations, règles... et les arguments explicites de validation? Mais nous nous intéressons aussi à l'importance accordée à la validation, en tant que préoccupation du stagiaire. Pose-t-il souvent des questions de type pourquoi? Justifie-t-il ses affirmations?

La fonction de la validation est ce que permet l'argument de validation par rapport à l'objet de validation. À quoi sert-il? Sert-il à faire comprendre les fondements de la théorie, à tester une conjecture, à vérifier la vraisemblance du résultat... Mais aussi comme nous analysons des planifications et prestations de leçons, la fonction de la validation est ce que permet l'étape de validation par rapport aux objets mathématiques en jeu, relativement aux autres activités. Sert-elle à l'introduire, à le renforcer, à l'institutionnaliser... C'est alors que l'analyse de la place de la validation comme lieu, nous sera utile.

Les trois aspects de notre analyse, moyens, place et fonction, ne peuvent être traités indépendamment. Tout particulièrement, la place et les moyens renseignent sur la fonction de la validation. Ainsi, même si nous distinguerons, dans le chapitre qui suit, des sections qui présentent tout particulièrement un aspect plutôt qu'un autre, ces aspects sont étroitement entremêlés.

Pour faire notre analyse, nous utiliserons quatre voies.

**1. Les intentions des stagiaires**

Dans leurs planifications de leçons, soit en introduction, soit dans l'analyse du concept ou encore aux différentes étapes de planification lorsqu'ils justifient leurs choix, les stagiaires précisent leurs intentions en rapport avec les leçons qu'ils présentent (Cf. § 5.4). Ces intentions nous permettront de déterminer le projet des stagiaires spécifiquement pour les leçons analysées et éclaireront éventuellement sur la fonction des étapes et moyens de validation. Nous retenons a priori deux projets caractérisés par Margolinas (1989): un projet de recherche de vraisemblance et un projet de recherche de vérité par nécessité.

**2. Le schéma d'organisation de la leçon**

Le schéma d'organisation de la leçon découpe la planification ou la prestation en étapes et montre la structure de la leçon. Nous avons décidé d'effectuer cette schématisation de la leçon car elle permet d'identifier des lieux de validation et de situer la validation par rapport aux autres éléments de la leçon et notamment avec ce qui est objet de validation. Ainsi, nous pourrons caractériser la validation par son lieu et peut-être par la structure de la leçon à la manière de Joshua et Joshua (1987). La catégorisation réalisée par ces auteurs (Cf. §2.3.3), nous servira de référence bien que nous en débordions largement. De plus, le schéma d'organisation pourra donner des indications sur les fonctions des étapes de validation.

**3. L'analyse des interactions de classe**

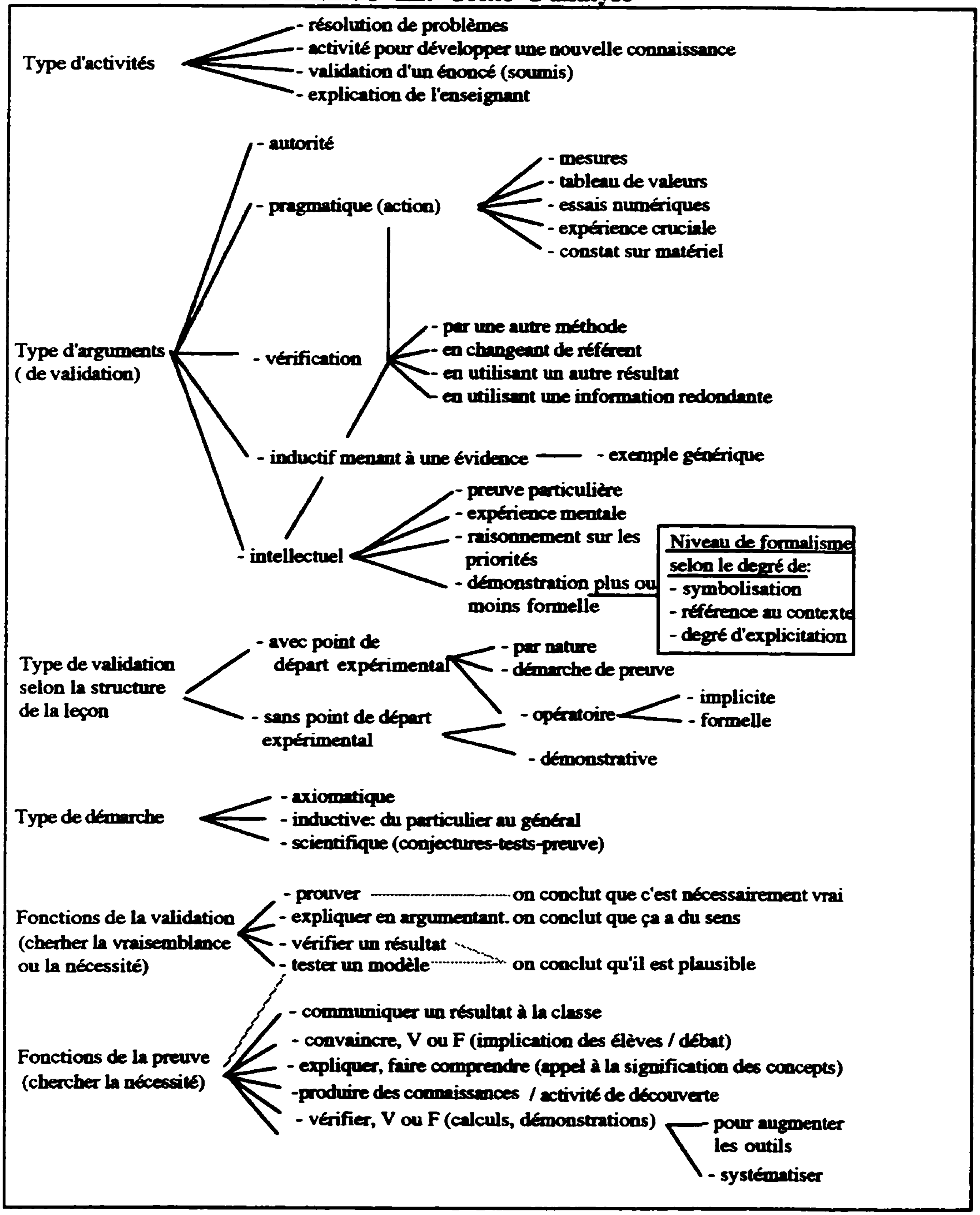
Les règles de validation se construisent dans l'interaction de l'enseignant avec ses élèves: les questions posées, ce qui est accepté ou refusé comme arguments, les renforcements comme le peu d'intérêt accordé à une réponse, la part des discussions, contribuent à la construction de ces règles et aussi d'une attitude face à la validation. Nous trouverons dans les prestations les questions et réponses du stagiaire et des élèves. Les réactions des élèves lors d'une étape de validation, nous renseignent sur l'effet de cette validation et par conséquent sur sa fonction effective. De plus, l'analyse du questionnement dans les planifications détaillées, aussi bien que dans les prestations, nous donnera une idée de l'importance accordée à la validation dans la classe.

**4. Les arguments proprement dits**

Les arguments sont, avec les supports à ces arguments, les moyens utilisés par les stagiaires pour statuer sur un énoncé, pour convaincre les élèves qu'un énoncé est vrai, pour faire comprendre une théorie, pour vérifier... Les caractéristiques des arguments utilisés pour valider vont nous renseigner sur la fonction de la validation comme nous l'avons vu dans Barbin (1989) et Hanna (1989), entre autres. Nous pouvons également identifier des niveaux de preuve comme l'ont fait Balacheff (1988) et Rouche (1989).

En plus des questions qui précèdent et des quatre voies que nous venons de décrire, les critères qui nous serviront à réaliser notre analyse sont présentés dans le tableau qui suit qui résume notre cadre théorique.

## TABLEAU III: Grille d'analyse



# CHAPITRE 6
# RÉSULTATS ET ANALYSE

## 6.1 Introduction

Nous allons analyser les leçons de douze stagiaires produites lors de leur premier stage d'enseignement en mathématiques, en deuxième année de formation, et les leçons de trois stagiaires produites lors de leur deuxième stage d'enseignement en mathématiques, en dernière année de formation. Ces leçons portent sur les sections identifiées comme algébriques ou préparant à l'algèbre dans le programme d'études secondaires du Ministère de l'Éducation et dans les manuels du premier cycle du secondaire. Nous voulons ainsi caractériser la validation dans les planifications et prestations des futurs enseignants des mathématiques au secondaire, dans un domaine moins généralement reconnu comme lieu de preuve, que la géométrie euclidienne par exemple, et avant que la notion de preuve ne soit introduite comme objet d'enseignement.

Ces leçons sont donc les toutes premières leçons d'algèbre du curriculum du secondaire. Elles ont comme thèmes principaux: l'introduction aux suites et au symbolisme algébrique, en première secondaire; la familiarisation aux expressions algébriques et l'introduction aux opérations sur les expressions algébriques, en deuxième et troisième secondaires, la résolution d'équations du premier degré à une variable et la résolution de problèmes se traduisant par de telles équations, en deuxième secondaire, l'introduction aux fonctions linéaires, en troisième secondaire.

Deux groupes de leçons se sont imposés, ceux-ci se positionnant de deux façons différentes par rapport à la validation, comme nous le verrons. Les objectifs didactiques de ces deux groupes, ainsi que les activités d'apprentissage envisagées dans les planifications de leçons, sont aussi différents.

Dans le premier groupe (Tableau IV), les stagiaires ont comme objectif principal d'introduire à des règles de calcul ou de résolution qui seront institutionnalisées. Pour réaliser cet objectif, les stagiaires utilisent des problèmes, des illustrations et du matériel concret grâce auxquels les élèves pourront *découvrir* et *fonder* les règles, selon leurs propres intentions.

| NIVEAU | THÈME PRINCIPAL | ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE ET INTENTIONS DU STAGIAIRE | NOMBRE DE STAGIAIRES |
|---|---|---|---|
| 2e sec.<br>3e sec. | Introduction au calcul sur expressions algébriques<br>Ex.: $2(x+3)=2x+6$<br>Ex.: $2x(x+3)=2x^2+6x$ | Problème à résoudre, manipulation de matériel concret ou illustration visant à faire découvrir et fonder des règles de calcul. | 6 (Alain, Frank, Bernadette, Blanche, Cécile)<br>1 (Violette) |
| 2e sec. | Introduction aux règles de résolution des équations du premier degré à une inconnue. (Exemple: $x+3=2x \rightarrow 3=2x-x$) | Problème à résoudre, manipulation de matériel concret, ou illustration visant à faire découvrir et fonder des règles de calcul. | 5 (Blanche, Frank, Odette, Patricia) |

Tableau IV: Groupe 1 de leçons, introduction à des règles de calculs ou de résolution

Dans le deuxième groupe (Tableau V), les stagiaires ont planifié des activités de généralisation qui mènent à la production d'expressions algébriques par les élèves. L'objectif est le plus souvent de donner du sens au symbolisme. À ce groupe, nous associons les stagiaires ayant construit des leçons sur les suites (première secondaire) et sur les fonctions linéaires (troisième secondaire) et les stagiaires ayant utilisé une situation de suites ou avec inconnues pour familiariser les élèves aux expressions algébriques ou les rendre habiles à exprimer les relations entre grandeurs (deuxième secondaire).

| NIVEAU | THÈME PRINCIPAL | ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE ET INTENTIONS DU STAGIAIRE | NOMBRE DE STAGIAIRES |
|---|---|---|---|
| 1ère sec. | Introduction aux suites et au symbolisme | Production d'une formule par les élèves pour qu'ils donnent du sens au symbolisme ou comprennent les suites. | 4 (Brigitte, Marcel, Ginette, Lucette) |
| 2e sec. | Familiarisation avec les expressions algébriques | Production d'une formule par les élèves pour qu'ils donnent du sens au symbolisme. | 4 (Alain, Blanche, Cécile, Tim) |
| 2e sec. | Résolution de problèmes | Traduction ou formulation des relations entre grandeurs dans un problème pour développer chez les élèves des habiletés d'expression. | 2 (Denis, Cécile) |
| 3e sec. | Introduction aux fonctions linéaires. | Production d'équation avec les élèves pour qu'ils comprennent. | 1 (Paul) |

Tableau V: Groupe 2 de leçons, activités de généralisation et de production d'expressions algébriques.

Toutes les planifications et prestations ne portent pas directement sur le thème principal identifié dans les tableaux IV et V. Certaines traitent de thèmes connexes. Par exemple, nous trouvons des exercices visant à développer des habiletés complémentaires telles la comparaison d'expressions algébriques qui, à l'occasion, relève du projet de *développer l'esprit critique.* Aussi, il arrive que des leçons semblables soient inscrites dans des cadres très différents d'enseignement. Ainsi les activités de généralisation peuvent servir l'introduction des suites, comme objet d'enseignement. Dans ce cas, nous aurons quelques leçons sur les suites. Les activités de généralisation peuvent également introduire aux expressions algébriques, au vocabulaire et d'autres notions comme le *domaine d'une variable* et la *valeur numérique d'une expression algébrique*. Ces leçons connexes seront traitées en complément des leçons principales.

Nous avons affaire à plusieurs leçons d'introduction pour lesquelles les stagiaires mettent un soin particulier à décrire, dans leur planification de leçons, le matériel (matériel concret ou problèmes) dont ils disposent, l'utilisation qu'ils comptent en faire et le déroulement des activités. Nous nous intéressons tout particulièrement à ces leçons parce que ce sont les plus détaillées et qu'elles nous permettent d'identifier des étapes que nous reconnaissons comme porteuses de validation. **Notre objectif est de voir comment s'articule cette étape de validation avec les autres éléments de la leçon pour établir sa fonction par rapport à l'objet mathématique en jeu, relativement à ces autres éléments.**

Déjà, nous pouvons dire que les stagiaires du premier groupe (groupe 1) ont presque tous comme objectif de faire *découvrir* les règles du calcul algébrique et de leur *donner du sens* par opposition à un enseignement des règles qui mise sur la seule mémoire. C'est ce qu'ils expriment dans les commentaires qui accompagnent leurs planifications de leçons.

Quant aux stagiaires du deuxième groupe (groupe 2), souvent ils annoncent dans leurs planifications une période de *validation* ou de *vérification* une fois les formules produites par les élèves. Ces périodes sont décrites, mais elles ne font pas l'objet de commentaires qui nous révéleraient les intentions des stagiaires quant à ces validations ou vérifications. Plusieurs stagiaires de ce groupe expriment le désir de *donner du sens* et *de la pertinence* au symbolisme algébrique, mais il n'est pas clair que ce projet concerne les périodes de *validation* ou de *vérification* explicites.

Ainsi, la division en deux groupes des stagiaires ou de leurs leçons s'avère particulièrement instructive. D'une part, nous trouvons des leçons où une validation s'appuie sur le matériel construit par l'enseignant pour faire découvrir la règle et se situe donc avant la règle. D'autre part, nous avons des leçons où une validation est prévue après la règle et qui concerne les productions des élèves. Dans le premier cas, la validation reste implicite, dans le deuxième cas, elle est souvent annoncée. De plus, dans le premier cas, la fonction semble clairement de donner du sens. Dans le deuxième cas, la fonction des *validations* ou *vérifications* est moins claire. Nous avons deux groupes de leçons qui se positionnent différemment selon la place (lieu) de la validation, son statut et peut-être sa fonction.

Dans les prochaines sections (§6.2 et §6.3), nous allons présenter les analyses de résultats de chacun des groupes en cinq étapes: 1) projet des stagiaires; 2) place (lieu) de la validation, dans la leçon 3) fonctions de la validation; 4) compléments d'analyse et 5) bilan des résultats et analyses. Nous établirons le projet des stagiaires à partir des intentions qu'ils expriment en introduction de leurs planifications de leçons ou dans les commentaires qui accompagnent chacune des étapes de la planification. Nous identifions le lieu de la validation en découpant la leçon (planification ou prestation) en étapes, en schématisant l'organisation de ces étapes et en analysant les activités d'enseignement. Comme nous l'avons prévu dans le chapitre précédent, nous trouverons des indices des fonctions de la validation i) dans les intentions du stagiaire; ii) Dans l'articulation de l'étape de validation (annoncée par le stagiaire ou reconnue par nous) avec le reste de la leçon selon le schéma d'organisation de la leçon; iii) dans les réactions des élèves comme effet des actions du stagiaire et iv) dans les arguments, y compris les gestes, dessins et mots utilisés par le stagiaire. Ces indices permettent de caractériser la validation et éventuellement sa fonction. Le complément d'analyse puisera dans des leçons connexes des aspects éclairant par rapport aux thèmes traités. En conclusion, nous ferons le bilan de l'analyse pour chacun des groupes de stagiaires.

Pour le premier groupe de stagiaires qui ont construit des leçons introduisant à des règles d'opérations, les intentions des stagiaires sont apparentées et nos conclusions sur la place et la fonction qu'ils accordent à la validation rejoignent les intentions que les stagiaires ont eux-mêmes formulées. Ceci nous conduit à présenter notre analyse de la place et de la fonction de la validation de manière globale en illustrant notre propos d'exemples. Quant au deuxième groupe de stagiaires, dont les leçons consistent principalement en activités de généralisation, la situation est plus complexe: les périodes de validation qui sont annoncées ne sont pas commentées et leurs fonctions n'apparaissent pas d'emblée. Pour justifier nos conclusions, il apparaît essentiel d'exposer aux lecteurs quelques études de cas complètes.

## 6.2 Groupe 1 de leçons: Introduction à des règles de calcul ou de résolution

Huit stagiaires ont produit des leçons visant à introduire les règles de manipulations des expressions algébriques ou des équations (premier degré, à une inconnue). Ces huit stagiaires constituent notre premier groupe analysé (groupe 1). À la suite de Joshua et Joshua (1987, 1988), qui identifient différents types de validation en se situant dans une perspective de modélisation et de transmission d'un modèle, nous considérerons que les règles de manipulations introduites par les stagiaires constituent le modèle à transmettre. Nous analysons, de ce point de vue, les moyens utilisés par les stagiaires pour valider ou faire accepter le modèle.

Comme nous l'avons souligné précédemment, nous présenterons d'abord le projet des stagiaires (§6.2.1) selon les intentions qu'ils formulent dans leurs planifications de leçons. Nous tenterons de voir dans quelle mesure le projet s'inspire du manuel qu'ils utilisent ou de leurs cours de didactique. Deuxièmement (§6.2.2), nous analyserons les planifications ou prestations des leçons des stagiaires en schématisant l'organisation des activités relatives à l'introduction d'une règle et en décrivant l'activité d'apprentissage (ou d'enseignement) qui mène à cette règle, pour identifier un lieu ou un moment de validation et amorcer l'analyse de la fonction de la validation. Ensuite, nous préciserons la fonction de la validation en cherchant à voir pour ce groupe en particulier, jusqu'où va le projet des stagiaires de donner du sens aux règles de manipulations et de résolution (§6.2.3). Puis, nous compléterons notre analyse par la présentation de deux cas dont les prestations de leçons n'ont pas fait l'objet d'une planification personnelle (§6.2.4). Enfin, nous ferons le bilan de l'analyse du premier groupe de stagiaires (§6.2.5) avant de passer au groupe 2 (§6.3).

Pour réaliser l'analyse, nous disposons d'au moins une <u>prestation</u> de leçons pour tous les stagiaires et des <u>planifications</u> d'au moins trois leçons consécutives pour sept d'entre eux. Nous n'avons pas les planifications d'Alain correspondantes à ses prestations; nous avons cependant d'autres planifications qui appartiennent au groupe 2 de leçons. Le tableau VI, qui suit, résume la situation. Nous indiquons entre parenthèses, le nombre de leçons consécutives autour du thème traité.

| STAGIAIRE | STAGE[50] | NIVEAU | THÈMES DES PLANIFICATIONS | THÈME DES PRESTATIONS |
|---|---|---|---|---|
| Alain | 1er | 2e | Planifications appartenant au groupe 2 | Opérations algébriques (2) |
| Bernadette | 1er | 2e | Opérations algébriques (3) | Exercices: vrai ou faux? |
| Frank | 1er | 2e | Opérations algébriques (3) | Résolution d'équations. |
| Odette | 1er | 2e | Résolution d'équations (3) | Exercices sur les opérations algébriques |
| Patricia | 1er | 2e | Résolution d'équations (3) | Résolution de problèmes |
| Violette | 1er | 3e | Opérations algébriques (3) | Opérations algébriques |
| Blanche | 2e | 2e | Opérations algébriques (6) résolution d'équations (6) | Résolution d'équations. |
| Cécile | 2e | 2e | Opérations algébriques (6) | Opérations algébriques |

**Tableau VI:** Thèmes des planifications et prestations des leçons du groupe 1.

### 6.2.1 Projet des stagiaires

Pour cerner le projet des stagiaires relativement aux leçons analysées, nous procéderons en quatre étapes; nous présenterons a) les objectifs du programme, b) les intentions que formulent les stagiaires dans leurs planifications de leçons, c) les intentions du manuel utilisé par tous les stagiaires de deuxième secondaire d'après le guide d'enseignement qui accompagne ce manuel et d) les lignes directrices du cours de didactique de l'algèbre que tous ont suivi.

#### a. Les objectifs du programme

Les leçons de deuxième secondaire dont nous ferons l'analyse relèvent du même objectif terminal du programme d'études: "***résoudre des problèmes se traduisant par une équation du premier degré***". L'accent est mis sur la résolution de problème et non sur les manipulations algébriques: "*L'apprentissage ne devra pas être dominé par la manipulation d'expressions algébriques; ces manipulations découleront du besoin de l'élève de résoudre des équations du premier degré qu'il aura conçues*" (Programme d'études, Mathématiques 216, enseignement secondaire, objectif terminal

[50] Il s'agit ici de stage d'enseignement en mathématiques seulement.

1.2, 1994, p.26). Il ne semble pas que les stagiaires aient retenu cette recommandation, les règles de manipulations algébriques étant introduites avant que les élèves ne soient familiarisés aux équations. Les leçons des stagiaires couvrent les objectifs intermédiaires suivants qui sont exprimés en termes d'habiletés à développer: *calculer la somme et la différence d'expressions contenant une variable et des constantes, calculer le produit et le quotient d'expressions contenant une variable et des constantes par une constante, résoudre une équation du premier degré à une inconnue* (Id. p. 27).

En troisième secondaire, le programme insiste sur la *compréhension plutôt que sur la mécanique*. Les objectifs intermédiaires que nous retrouvons dans les leçons de la seule stagiaire qui a réalisé des leçons en troisième secondaire sont principalement: *appliquer les propriétés des exposants à la transformation d'expressions arithmétiques, appliquer à la transformation d'expressions algébriques les propriétés* suivantes: $n^a \times n^b = n^{a+b}$ *et* $n^a/n^b = n^{a-b}$ *où* $a, b \in N$, *calculer le produit d'un monôme par un polynôme et d'un binôme par un binôme et calculer le quotient d'un polynôme par un monôme* (Programme d'études, Mathématiques 314, enseignement secondaire, objectif terminal 1.3, 1995, pp. 28-29 ).

**b. Les intentions des stagiaires dans leurs planifications de leçons**

Dans leurs planifications de leçons, les stagiaires formulent des objectifs d'apprentissage conformément aux objectifs intermédiaires du programme d'études; mais ils veulent aussi miser sur la compréhension plutôt que la mécanique. En effet, pour introduire les élèves aux règles de manipulations, nous notons que dès le début, dans leurs planifications de leçons, cinq stagiaires (sur 8) expriment leur motivation à <u>donner du sens</u> aux règles ou à les <u>faire comprendre</u> par opposition à un enseignement qui mise sur la mémoire. Alain, précise que "*La compréhension doit être basée sur la logique et le sens et non sur les règles descendues du ciel!* " Violette souligne que "*l'algèbre est parfois perçue comme une simple manipulation de lettres*" en précisant: "*Il faut y amener un* ***raisonnement, un sens***".[51] Elle dit aussi que les élèves "*devraient apprendre à visualiser le problème avant de commencer à le solutionner.*" Bernadette veut "*présenter (...) une* ***algèbre de compréhension plutôt que de mémorisation*** *à l'aide d'activités* ***globalisantes*** *qui procurent la base du raisonnement.*" Elle dit aussi que les élèves devront apprendre à "*résoudre divers types d'équations du premier degré à une inconnue*" et que pour "*développer cette habileté, il*

---

[51]Les parties en gras dans les citations des stagiaires ont été soulignées par nous.

*est nécessaire de favoriser le processus de résolution de problèmes par l'élève plutôt qu'une méthode préétablie donnée par l'enseignant."* Blanche précise que le but de sa leçon "*est de donner un sens aux opérations mathématiques sur les expressions algébriques* ." Odette indique que son "*principal objectif est de ne pas engager les stagiaires dans des techniques de manipulations algébriques sans réfléchir.*"

Le projet de donner du sens aux règles et de les faire comprendre s'associe à celui de faire découvrir les règles par les élèves. Les extraits suivants tirés des planifications de leçons de cinq stagiaires illustrent cet aspect.

> Bernadette, planification de la leçon sur les opérations. "*Le but de cette leçon est de faire découvrir et justifier les règles d'opérations sur les expressions algébriques.* "
>
> Violette, planification de la leçon sur la division d'un polynôme par un monôme. "*Ils ont déjà travaillé à décomposer des nombres selon l'exposant duquel il est affecté, (...) Je vais donc utiliser ceci pour leur faire découvrir la loi des exposants désirée.*"
>
> Cécile, planification de la leçon sur la somme et la différence d'expressions algébriques. " *Une fois que les élèves ont découvert comment on effectue une addition d'expressions algébriques* [à l'aide d'un matériel] *on se détache du contexte (...).*"
>
> Blanche, planification de leçons sur les opérations. "*(...) je veux faire vivre aux élèves des activités globalisantes dans le but de faire découvrir et de justifier les règles d'opérations sur les expressions algébriques.*"
>
> Odette, planification d'une leçon sur la résolution d'équations. "*La méthode de résolution devra venir de l'élève ainsi la procédure lui apparaîtra plus logique et efficace.*"

Le projet de donner du sens aux règles, de les faire comprendre et de les faire découvrir, est associable à un projet de validation dans la mesure où les stagiaires veulent montrer que ces règles ne sont pas arbitraires, qu'elles ne descendent pas du ciel et qu'elles se justifient. C'est ce que montre de manière assez explicite les extraits d'Alain, Bernadette, Blanche et Odette qui précèdent. Dans les extraits des planifications ci-dessous, Blanche et Bernadette parlent même de *fondements*.

> Bernadette: "*J'utiliserai une activité me permettant de mettre en évidence les règles des différentes opérations algébriques et d'illustrer le fondement de ces règles.*"
>
> Blanche: "*À partir de contexte, les élèves pourront illustrer le fondement ou le raisonnement logique de ces règles. En effet, le support visuel est une excellente approche si nous voulons que les élèves dégagent par eux-*

> *mêmes les règles, l'observation vaut souvent mille mots. C'est par la compréhension du support visuel que l'élève pourra faire le passage vers les opérations sur les expressions algébriques."*

La majorité de stagiaires a clairement le projet de donner du sens aux règles, voire de les faire comprendre. Ce projet implique la participation des élèves à différentes activités à partir desquelles ils pourront découvrir les règles et nous considérons que ce projet concerne la validation des règles. Tous les stagiaires n'expriment pas aussi clairement leurs intentions mais il nous semble que seul Frank s'écarte complètement de ce projet.

**c. Les intentions du manuel d'après le guide d'enseignement**

Tous les stagiaires de deuxième secondaire ont utilisé le même manuel; il s'agit de Carrousel mathématiques 2 (Breton, 1994). Le guide d'enseignement nous révèle que le projet de sens des stagiaires s'inspire fortement du manuel.

> *"On cherche (...) à présenter ou à faire découvrir aux élèves une algèbre de compréhension plutôt qu'une algèbre de mémorisation. On veut que l'élève atteigne un savoir-faire basé sur le gros bon sens ou sur la logique des choses, et non sur des règles dictées et répétées. Pour cela, le présent itinéraire[52] propose un certain nombre d'activités globalisantes qui amènent les élèves à assimiler les principaux concepts algébriques, et à faire des opérations sur celles-ci tout en assurant l'acquisition de la logique de base nécessaire à la compréhension.* (Carrousel Mathématique 2, Guide d'enseignement, deuxième secondaire/ tome 1, p. 523).

À la page suivante, le guide présente les deux grandes orientations de la section portant sur le calcul algébrique: "*donner un sens aux expressions algébriques*" et "*amener les élèves à opérer en se servant de leur "gros bon sens" au lieu d'appliquer des règles apprises par coeur. (...) les règles doivent s'imposer comme les conclusions des activités proposées.*"

**d. Les lignes directrices du cours de didactique de l'algèbre.**

Les cours de didactique que les stagiaires ont suivis dans leur formation valorisent la participation de l'élève à la construction de ses connaissances et un enseignement qui mise sur la compréhension des fondements. Ces cours valorisent également une mathématique contextualisée où le bon sens et l'intuition ont une place importante dans la mesure où leur utilisation est fructueuse. Nous avons donné des exemples dans le chapitre 5.

---

[52]Chaque chapitre de ce manuel est appelé "itinéraire".

Ainsi, nous pouvons sans doute dire que les cours de didactique partagent avec le manuel et les stagiaires un projet de sens, même si la superposition entre les projets n'est pas complète.[53] Nous chercherons à voir jusqu'où va ce projet de sens dans les arguments qu'ils utilisent.

Voyons maintenant comment les intentions des stagiaires s'actualisent dans leurs planifications et prestations de leçons.

### 6.2.2 Lieu de validation

Nous analyserons maintenant les planifications et les prestations des leçons qui visent à introduire des règles de calcul ou de résolution. Ces règles peuvent être vues comme un modèle à faire accepter dans la perspective de Joshua et Joshua (1987, 1988). Alors, des activités d'enseignement (manipulations, exercices, exposé théorique, etc.) et l'organisation de ces activités d'enseignement peuvent être vues comme une argumentation contribuant à valider le modèle (les règles). Nous avons découpé les planifications et prestations en étapes de manière à schématiser l'organisation des activités dans le temps. Le schéma d'organisation sert à situer les moments qui contribuent plus spécifiquement à faire accepter les règles. Nous appelons place de la validation, dans le sens de lieu, l'endroit dans le schéma qui est davantage porteur de validation. C'est par l'analyse des activités d'enseignement qui ont lieu alors et de la relation entre les parties du schéma que nous préciserons la fonction de la validation. Nous présenterons deux schémas d'organisation distincts pour l'introduction des règles qui s'avèrent correspondre au projet des stagiaires (§6.2.1): un schéma non motivé par le projet de donner du sens (figure 24) et un schéma motivé par le projet de donner du sens, où la validation s'appuie sur une étape expérimentale (figure 25). Ce deuxième schéma est majoritaire. Nous lui accorderons plus d'importance. Dans cette section nous amorcerons l'analyse de la fonction de la validation, mais c'est dans la section suivante (§6.2.3) que nous la terminerons en discutant des limites du projet des stagiaires du point de vue de la validation.

Voyons les schémas d'organisation des leçons. Pour regrouper sous un même schéma plusieurs leçons, ou parties de leçons, nous ne nous sommes pas contrainte aux limites d'une période en classe; ainsi la période d'exercices indiqué dans le premier

---

[53]Des glissements ont pu s'opérer, par exemple de *construire* à *découvrir* les mathématiques, mais pour le moment nous considérons ces glissements comme un abus de langage.

schéma pourrait se dérouler au début de la deuxième période portant sur le même thème. De la même manière, le schéma concernant l'introduction d'une règle, plusieurs schémas peuvent apparaître consécutivement dans une période. Dans cette section, nous utiliserons les extraits de planifications ou de prestations les plus illustratifs, notre objectif n'étant pas ici de comparer planification et prestation.

#### 6.2.2.1 Premier schéma d'organisation

| Théorie ⟶ Règle ⟶ Exemples et exercices |
|---|

**Figure 24:** Groupe 1, premier schéma d'organisation, non motivé par le projet de donner du sens

Le premier schéma (figure 24) regroupe les leçons qui exposent la théorie sans souci de préparation des élèves, ni de validation (justification ou preuve) ultérieure: les définitions nécessaires sont données, suivies de la procédure de calcul qui est parfois exécutée sur un exemple; ensuite le stagiaire donne des exemples et des exercices à faire par les élèves. Ce schéma est rare: seul Frank l'utilise systématiquement et Violette, à l'occasion. Chez Frank, le schéma se répète pour les notions suivantes et la séquence se termine par des problèmes d'application. Frank n'a pas d'intention explicite de validation: il n'en formule pas que ce soit pour montrer les fondements (preuve) ou pour donner un sens ou une pertinence à ce qui est fait. Du point de vue de l'élève, nous pouvons penser que ce qui est énoncé sera considéré vrai par l'autorité du stagiaire et que cette acceptation sera renforcée grâce à la réussite d'exercices corrigés par le stagiaire. La validation en jeu se qualifierait d'*opératoire implicite* selon les termes utilisés par Joshua et Joshua (1987, 1988). L'autorité du stagiaire tenant lieu principalement de validation, nous dirons que la validation se situe à l'extérieur du schéma d'organisation.

L'élève est pratiquement absent de la planification de leçon. En fait, la planification de leçon, dont nous présentons un extrait ci-dessous, pourrait correspondre à ce que le stagiaire veut que les élèves retiennent, ce que l'élève devra prendre en notes (pour garder en mémoire). Les questions prévues permettent l'enchaînement des idées et non une participation significative des élèves.

<u>Extrait de Frank, sec. 2: addition et soustraction (planification de leçons)</u>
Question: *Qu'est-ce que des termes semblables?*
Réponse: *terme composé de la même variable; Ex.: 5x et 3x*
Question: *Est-ce que 8 et 15 sont des termes semblables?*
Réponse: *Oui*

Exemple avec plusieurs termes.
Stagiaire: *Pour additionner ou soustraire des termes semblables, il suffit d'additionner ou de soustraire les coefficients. Ex.: 8n+3n=11n;*
*les termes 5x et 3y n'ayant pas la même variable, leur somme ou différence ne peut donc pas être réduite.*
*2v+7v? (5n+8)+(4n+3)? 2c+7v-8c+c? -6s-6s-(-s)?*

Ce premier schéma d'organisation (figure 24) n'est pas fréquent puisque les stagiaires du groupe 1, rappelons-le, ont en majorité l'objectif de faire *découvrir* la règle de calcul ou de résolution par les élèves . Pour ce faire, ils intègrent au début de leurs leçons, comme nous allons le voir, des exemples, un problème avec illustration ou du calcul sur des expressions algébriques via une illustration. Voici leur schéma type.

### 6.2.2.2 Deuxième schéma d'organisation

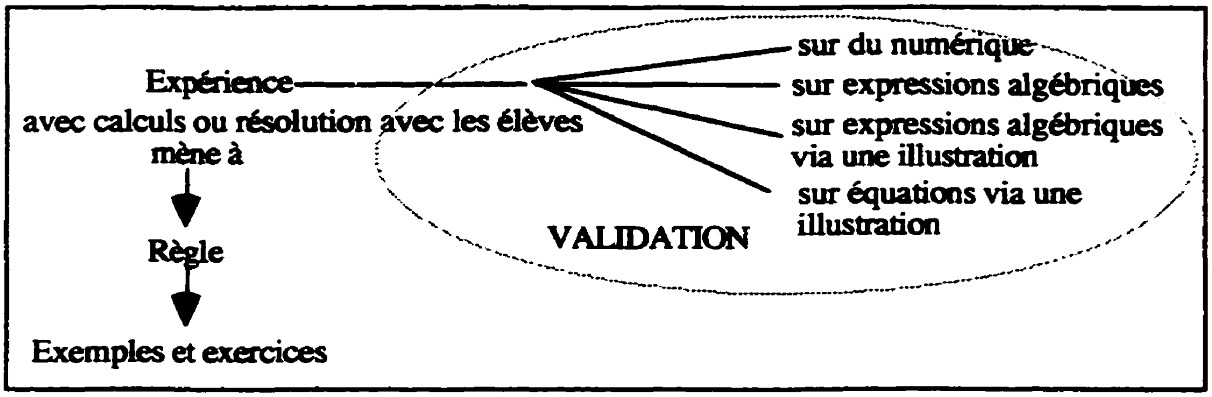



Figure 25: Groupe 1, deuxième schéma d'organisation, avec étape expérimentale pour donner du sens.

Le deuxième schéma se caractérise par un point de départ expérimental (expérience) qui vise à donner du sens et à faire participer les élèves au calcul ou à la résolution. Pour reprendre la terminologie de Joshua et Joshua (1987, 1988), lorsque la procédure est d'abord exécutée sur un exemple, nous pouvons dire que le point de départ est expérimental. Si dans le premier schéma (figure 24), il arrive qu'un exemple précède l'énoncé de la règle, dans le deuxième schéma, l'espace occupé par cet expérimental est beaucoup plus grand et l'activité n'est pas accessoire; la partie expérimentale ne se résume pas à montrer quoi faire mais comporte **implicitement** au moins, une part d'explication des fondements et dans ce sens a un **potentiel** de preuve. Cette étape est donc particulièrement porteuse de validation. Nous caractériserons maintenant ce lieu de validation en l'inscrivant dans le schéma de la leçon.

L'expérience se fait à partir (a) d'exemples numériques (Violette), (b) d'expressions algébriques (Blanche), (c) d'expressions algébriques via une illustration (Alain, Bernadette, Blanche, Cécile, Violette), (d) d'équations via une illustration (Blanche, Frank, Odette, Patricia).

**a. Expérience sur du numérique: Violette, troisième secondaire**

Violette utilise des exemples numériques lorsqu'elle introduit les lois des exposants pour la multiplication et la division, en troisième secondaire. Par exemple, en se basant sur la définition d'exposant ($8^3 = 8\times8\times8$), elle fait déduire la loi des exposants à partir d'un exemple numérique ($8^3\times8^5 = (8\times8\times8) \times (8\times8\times8\times8\times8) = 8^8$), qu'elle institutionnalise: "*qu'est-ce que j'ai fait avec mes exposants? (...) On va écrire ça: dans une multiplication, on additionne les exposants des bases identiques*". D'autres exemples suivent puis elle passe à l'algèbre: "*On va le transposer à l'algèbre maintenant que vous êtes des experts; $a^4 \times a^2$ ?* (E: *$a^6$) Qu'est-ce que t'as fait? Si je le décomposais?* (E: *$a\times a\times a\times a\times a\times a$) Si je compte les a? (...).*" Ensuite elle propose un autre exemple.

Cet extrait est tiré d'une prestation et la planification suit le même schéma. L'exemple numérique utilisé comme expérience est générique et sert à énoncer la règle. Une fois la règle formulée (en mots), elle est appliquée à d'autres exemples numériques puis transférée à l'algèbre. Ces nouveaux exemples participent selon nous à la validation en faisant réaliser que le principe de décomposition peut s'appliquer tant aux nombres qu'aux expressions algébriques avec exposants. Nous identifions ici deux lieux de validation, correspondants aux deux étapes de décomposition, celle qui précède l'énoncé de la règle et celle qui la suit. Conformément au projet de Violette, l'argument de validation (la décomposition) peut **donner du sens** à la règle et même **la prouver**. Les élèves peuvent également participer à déterminer la règle bien que nous constations, dans la prestation, que l'argumentation est complètement assumée par la stagiaire. Malgré ses intentions, les élèves ont une participation limitée.

**b. Expérience sur une expression algébrique: Blanche, deuxième secondaire.**

Blanche introduit la multiplication d'une expression algébrique par une constante à l'aide d'un exemple 2(x-15) en faisant appel à un sens de la multiplication que les élèves utilisent. L'extrait ci-dessous est tiré de sa planification.

Extrait de Blanche, sec. 2: multiplication par une constante (planification):
"*(...) les élèves pourront affirmer que c'est répéter deux fois x-15.*

*2 fois x-15 = x - 15 + x - 15*
*x + x - 15 - 15*
*2x - 30*
*Ainsi, je ferai réfléchir les élèves sur le lien de distributivité qu'il est possible d'appliquer sur la multiplication d'une expression algébrique par une constante. En effet, je les ferai raisonner jusqu'à ce qu'ils découvrent que multiplier une expression algébrique par une constante revient à multiplier le coefficient de la variable et la constante par un certain facteur multiplicatif."*

La planification fournit peu d'information sur comment se fera le passage à la règle mais nous constatons que l'exemple utilisé est générique et peut **expliquer la règle** et **même la prouver**, dans la mesure où les élèves reconnaissent les propriétés (générales) des opérations dans les transformations algébriques exécutées.

**c. Expérience sur des expressions algébriques via une illustration: Alain, Bernadette, Blanche et Cécile, 2e secondaire, Violette, 3e secondaire.**

Pour l'introduction aux règles du calcul algébrique, tous les stagiaires, sauf Frank, utilisent dans leurs planifications et prestations de leçons une illustration (matériel ou dessin) pour supporter le travail sur les expressions algébriques. Nous avons observé deux tendances dans l'utilisation de l'illustration: 1) celle-ci se substitue aux expressions algébriques sans référence à des grandeurs; 2) elle représente les grandeurs en l'occurrence géométriques. Dans ces leçons, la validation se situe dans l'interaction entre le domaine de l'illustration et le domaine algébrique.

1. L'illustration substitut aux expressions algébriques, sans grandeur.

Nous utiliserons la planification de Cécile pour introduire l'addition d'expressions algébriques comme exemple d'expérience portant sur une illustration sans référence à des grandeurs. Cécile utilise un matériel semblable à celui que propose le manuel: des jetons de couleur. Elle dessine au tableau les différents jetons en écrivant leur signification et en précisant que *"les petits carrés sont un certain nombre que l'on ne connaît pas"*. Elle insiste sur le code de couleur.

□ = - x  ■ = x  ○ = - 1  ● = 1

L'extrait, ci-dessous, montre le traitement prévu en classe.

Extrait de Cécile, sec. 2: addition d'expressions algébriques (planification de leçon)

*"Sur le rétroprojecteur, je représente à l'aide des cubes et jetons l'addition suivante:*

*Je demande à un élève de venir effectuer l'addition de chaque ensemble d'objets et de représenter le résultat à l'aide de carrés et de jetons. (...) Si toutefois l'élève est incapable de représenter le résultat, je verbaliserai l'addition de la façon suivante: tu as 4 petites boîtes contenant chacune un certain nombre de jetons et 5 jetons auxquels tu ajoutes 2 petites boîtes et 3 jetons. Combien auras-tu de petites boîtes au total? Combien auras-tu de jetons au total?*
*Je demande à un autre élève de venir indiquer, en dessous des ensembles de jetons et de cubes, l'expression algébrique représentant chaque terme (...) (y compris la somme) (...)*
*Je demande à l'élève d'aller inscrire au tableau l'équation qu'il vient de compléter.* "

Différents calculs sont proposés aux élèves et chaque fois le calcul effectué est écrit algébriquement au tableau avec le résultat, par exemple $(4x+5)+(2x+3)=6x+8$. C'est à la suite de ces expériences réalisées avec le matériel que la stagiaire demande aux élèves de trouver la règle, à partir des expressions écrites au tableau et en référence aux manipulations sur matériel. Ainsi, l'expérience concrète contribue fortement à l'acceptation de la règle. Une fois la règle énoncée, les élèves peuvent même poursuivre l'expérience, dans les exercices.

Les manipulations effectuées avec le matériel ne suffisent pas complètement à énoncer la règle puisque la règle doit être formulée indépendamment des jetons. Cécile anticipe des réponses qui collent au matériel: "*on additionne les carrés ensemble et les jetons ensemble*". Dans sa planification, elle prévoit devoir insister sur le fait que "*la règle doit être générale et utile pour l'addition d'expressions algébriques sans manipulations de jetons et de carrés*". Cécile est consciente que l'expérience s'effectuant avec du matériel qui représente des expressions algébriques, le passage du domaine concret à celui des expressions algébriques nécessite une attention particulière. La validation prend place non simplement dans la partie expérimentale, mais dans l'interaction entre le domaine concret et le domaine algébrique. Dans sa planification, Cécile décrit avec soin l'aller retour qu'elle fait entre le matériel et les expressions algébriques. Toutefois, le passage semble se limiter à la représentation et à la traduction des expressions du début et de la réponse qui résulte des manipulations, alors qu'il aurait pu concerner aussi les étapes intermédiaires $[(4x+5)+(2x+3) = (4x+2x)+(5+3) = (4+2)x+ (5+3) = 6x+8]$.

La règle, écrite au tableau et prise en note par les élèves, s'énonce comme suit: "*Pour additionner des expressions algébriques, il suffit d'additionner les termes* *constants et les termes contenant la même variable ensemble. Ces termes sont appelés termes semblables."* À la suite de cette règle, Cécile pose la question *"comment a-t-on fait pour additionner les termes semblables?"* et elle écrit : *"Cela revient à additionner les coefficients numériques des termes semblables et additionner les termes constants. La variable, elle, ne change pas!."*

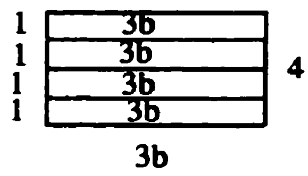
Lors de la prestation, la règle est énoncée plus tôt et pour les exemples qui suivent, le matériel sert à vérifier la réponse obtenue algébriquement. En même temps, les nouvelles expériences permettent sans doute de raffiner le sens de la règle.

Nous reconnaissons que Cécile **fournit aux élèves des images pour les expressions algébriques et les opérations sur ces expressions et que l'élève peut être convaincu, après quelques expériences, que les expressions (de type ax+b) peuvent toujours être représentées et additionnées de la même manière.** L'illustration a un potentiel générique dans la mesure où l'élève peut pressentir que quelque soient les expressions, il pourra toujours les représenter et les additionner de cette manière. Il ne semble pas que Cécile va au-delà; en d'autres mots, il ne semble pas qu'elle veut mettre en évidence les propriétés mathématiques dont dépend la règle. Nous en rediscuterons dans la section 6.2.3. Notons aussi que malgré les intentions de Cécile de faire découvrir les règles, **les élèves ont une participation réduite** puisque la stagiaire les amène devant l'évidence.

2. L'illustration représente les grandeurs en l'occurrence géométriques.

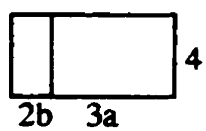
La deuxième tendance chez les stagiaires qui veulent introduire les règles de manipulations algébriques en utilisant une illustration est représentée par Alain. Sa prestation sur la multiplication d'un monôme ou d'un binôme par une constante, en deuxième secondaire, servira d'exemple.

Alain associe l'opération de multiplication au calcul de l'aire d'un rectangle, les expressions algébriques représentant les mesures des côtés. Il demande aux élèves de lui dire comment ils font pour calculer l'aire d'un rectangle, puis leur propose de calculer l'aire de différents rectangles dont un rectangle de côtés 3b et 4. Un élève donne 12b comme réponse. Un autre s'objecte en argumentant qu'on ne peut pas mélanger les termes (en référence à l'addition). Un autre explique que 4 fois 3b c'est comme 3b + 3b +3b +3b. Alain illustre en indiquant qu'il y a "4 couches d'aires 3b".




À partir de calculs réalisés sur plusieurs rectangles, Alain pose la question: *"qu'est-ce qu'on a fait pour avoir la réponse?"* Les élèves invoquent naturellement la formule de l'aire du rectangle mais Alain cherche à savoir le calcul effectué pour passer, dans le cas ci-dessus, de 4 × 3b à 12b. Il donne finalement la procédure suivante pour multiplier un monôme par une constante: *"Lorsqu'on multiplie un terme constant avec une expression algébrique avec coefficient, pour avoir la réponse, on réécrit les mêmes variables et on multiplie la constante par le coefficient de l'expression algébrique".* Notons qu'Alain aurait pu, par exemple, se référer à l'associativité, que les élèves ont déjà travaillé, et illustrer l'équivalence entre 4 × 3b et (4 × 3) b, ce qu'il n'a pas fait.

Une fois cette première procédure énoncée, il passe à la multiplication d'un binôme par une constante à l'aide de l'illustration suivante:




À un élève qui répond 8b + 12a, Alain demande *"pourquoi?"* L'élève explique qu'il a d'abord trouvé l'aire du petit rectangle, 2b × 4, puis l'aire de l'autre rectangle, 3a × 4. D'autres expériences sont réalisées de la même manière et la règle est énoncée en l'associant explicitement à la distributivité de la multiplication sur l'addition: *"multiplier un tout, c'est multiplier chacune de ses parties (distributivité de la multiplication sur l'addition)."* Les élèves prennent en notes la règle avec un exemple qu'ils effectuent sans illustration cette fois. Puis Alain passe à la division.

Ici aussi, comme pour Cécile, la validation se situe dans l'association entre l'illustration et le domaine algébrique. L'énoncé de la règle et sa validation reposent sur la décomposition des rectangles et sur l'association entre l'illustration (rectangle) - problème d'aire (qui implique une multiplication) et expressions algébriques (qui représentent les mesures des côtés). Toutefois le décodage pour passer du domaine de l'illustration à celui des expressions algébriques n'est pas aussi grand que dans la planification de Cécile, les segments et les surfaces (l'illustration) étant associés naturellement à des longueurs et des aires et la multiplication à l'aire du rectangle. Par ailleurs le problème des opérations sur les expressions algébriques ainsi contextualisé peut servir d'exemple générique dans la mesure où l'élève reconnaît que cette association est toujours possible.

Ainsi, **Alain contribue à donner du sens aux opérations sur expressions algébriques en associant à la multiplication d'expressions algébriques des images qui sont fructueuses.** En effet, les élèves sont amenés à **argumenter en référence au contexte d'aires.** Il y dans la situation un **potentiel de preuve.** Toutefois, dans le premier exemple donné, la règle est obtenue à partir d'un constat sur les expressions, 12 est obtenu à partir de 4 × 3, et non par une généralisation de l'argument utilisé par l'élève (4 × 3b = 3b+3b+3b+3b).

Les schémas qui suivent (figures 26 et 27) nous permettent de montrer les lieux de validation dans l'organisation des leçons avec étape expérimentale quand celle-ci se fait sur une illustration. Le premier schéma (figure 26), réalisé à partir de la leçon de Cécile, veut montrer le travail parallèle entre les deux domaines d'expérience.

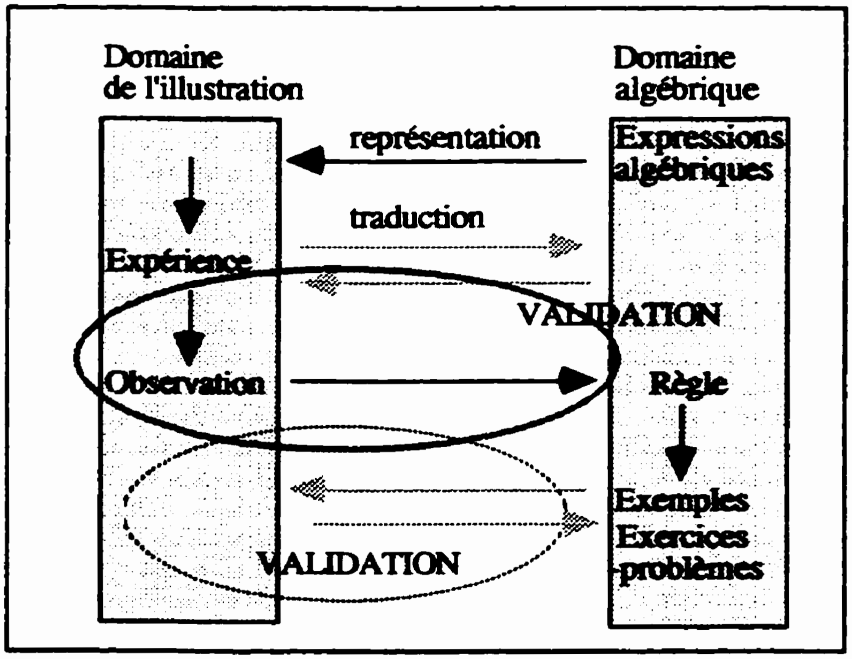



**Figure 26:** schéma des leçons avec expérience sur une illustration, substitut aux expressions algébriques

En effet, des expériences sont réalisées directement, sur l'illustration, et des expériences sont réalisées indirectement, sur les expressions algébriques. Le passage d'un domaine à l'autre nécessite des étapes de représentation (passage d'une expression algébrique à une illustration) et de traduction (passage d'une illustration à une expression algébrique) qui assurent le transfert. Dans les leçons représentées par celle de Cécile, des expressions algébriques ou les quantités inconnues d'un problème sont représentées, des manipulations sont effectuées (l'expérience) et des observations sont faites; la règle de manipulations des expressions algébriques est ensuite déduite à partir des observations sur l'illustration ou à partir des expressions algébriques elles-mêmes, en référence aux illustrations. La validation prend donc place entièrement dans ce rapport qu'entretiennent les deux domaines d'expérience. Une fois la règle trouvée, elle est appliquée à d'autres exemples ou exercices avec ou sans support de l'illustration. Ces exemples ou exercices contribuent à renforcer le modèle. À ce moment-là, il arrive que l'illustration soit utilisée pour vérifier le résultat ou même le trouver. Un deuxième lieu de validation avec illustration apparaît alors; cette validation a une fonction de vérification mais contribue aussi à raffiner la compréhension de la règle.

Dans le cas d'Alain, comme dans celui de Cécile, l'expérience sur les expressions algébriques se fait via l'illustration. Cependant la relation entre les deux domaines d'expérience n'est pas la même. Dans le cas de Cécile, l'illustration est un code parallèle à celui des expressions algébriques, un substitut à la lettre; c'est ce que nous avons schématisé dans la figure 26. Dans le cas d'Alain, l'illustration représente des mesures de longueur ou d'aire qui sont associées naturellement à des segments et des surfaces. La distance entre les deux domaines d'expérience nous apparaît moins grande ici. Le transfert entre l'illustration et les expressions algébriques est plus immédiat et des étapes de représentation et de traduction moins nécessaires. C'est ce que nous avons voulu schématiser dans la figure 27.

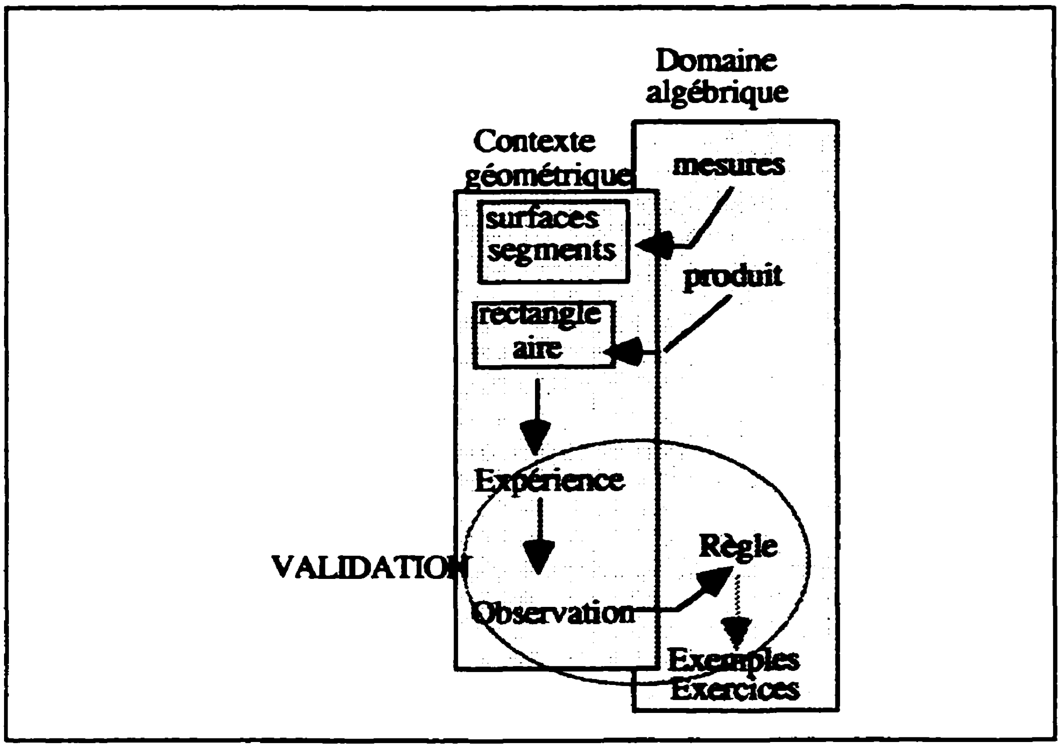



**Figure 27: schéma des leçons avec expérience sur des grandeurs géométriques.**

Cette différence schématisée par les figures 26 et 27, a des conséquences sur la validation, celle-ci se situant en particulier dans la relation qu'entretiennent les deux domaines d'expérience. Ainsi, la distance entre les deux domaines sera si grande chez Bernadette, qu'on en perdra même le sens. Le cas de Bernadette est présenté à la section suivante.

Nous associons toutes les planifications leçons de Bernadette à la première tendance: une illustration substitut aux expressions algébriques. Les planifications ou prestations de Cécile, Blanche et Violette, sont mixtes. Les prestations d'Alain sont de la deuxième tendance. Le contexte géométrique n'est pas le seul contexte où apparaissent des grandeurs, mais c'est le seul où les stagiaires maintiennent le lien entre le domaine algébrique et l'illustration par l'intermédiaire des grandeurs; en d'autres mots, la plupart du temps, la représentation n'est pas en rapport avec les grandeurs en jeu comme nous le voyons dans l'extrait qui suit d'une prestation de Violette.

Elle propose aux élèves le "problème" suivant: *"Un père de famille veut partager également entre ses deux enfants une certaine somme d'argent, soit ($2x^2 + 4x - 6$). Combien chacun aura-t-il?"* Puis, elle présente le matériel: *"Ce que je veux partager, c'est $2x^2 + 4x + 6$. Si je vous dis que $x^2$ est représenté par...* [elle montre une tuile] *de* *surface $x^2$ parce que chacun des côtés mesure x. De combien de carrés j'ai besoin?"* L'illustration choisie (surfaces de couleurs) n'est pas particulièrement appropriée à la représentation d'un partage d'argent. Les propriétés géométriques de l'illustration ne sont pas mises à profit bien qu'elle associe l'expression en $x^2$ à l'aire d'un carré ayant x, comme mesure de côté. D'ailleurs les élèves réagissent; ceux-ci semblent se demander qu'est-ce que la stagiaire est en train de faire et pourquoi elle le fait.

> <u>Extrait de Violette, sec. 3: division d'un polynôme par une constante (prestation)</u>
> Violette: *(...) Bande côté 1 et x .*
> Élèves: *Madame, le problème .*
> Violette: *Je l'fais là.*
> Violette continue d'expliquer le matériel: *Un p'tit carré qui signifie 1 unité. J'ai besoin de combien de tuiles pour représenter l'expression?*
> Elève: *C'est niaiseux!*

L'utilisation du matériel se rapproche de la première tendance représentée par Cécile. Le problème est artificiel, toutefois, le contexte permet de donner un sens à la division: *"la division de polynôme peut être vue comme une situation de partage"* (planification). Ainsi pour illustrer la division d'un polynôme par 2, Violette partagera en deux parts égales les pièces représentant l'expression algébrique.

Nous retrouvons l'utilisation de contextes avec grandeurs chez la grande majorité des stagiaires. Seuls Frank (figure 24) et Bernadette n'en utilisent pas; pour ces deux stagiaires, de tels problèmes sont reportés à la fin, si le temps le permet, comme problèmes d'application. Le contexte avec grandeurs permet d'orienter l'action en donnant, par exemple, un sens à l'opération et peut permettre des décompositions algébriques comme nous l'avons vu chez Violette, Alain et aussi Blanche.

Résumons l'argumentation qui mène à la règle de calcul, dans le cas où une illustration est utilisée. Des expériences chacune à potentiel générique sont effectuées sur les expressions algébriques via l'illustration. Les diverses expériences tiennent compte des différentes situations qui peuvent se présenter à l'élève: Alain et Cécile utilisent des expressions affectées d'un signe négatif et des grands nombres. Parfois, la règle semble découler de la comparaison entre l'expression de départ et la réponse finale, obtenue par manipulations de l'illustration, comme chez Alain, dans le cas de la multiplication d'un monôme par une constante, et peut-être chez Cécile. D'autres fois, la règle découle plus directement du raisonnement dans le contexte, comme chez Alain, dans le cas de la multiplication d'un binôme par un monôme où le calcul de l'aire d'un rectangle s'effectue par le calcul de l'aire de deux sous-rectangles.

**La fonction de cette argumentation est principalement de mener à la règle en lui donnant un sens. Ce sens provient en particulier de la concrétisation des expressions algébriques et des opérations ou d'un raisonnement dans le contexte d'un problème. Toutefois, il n'est pas clair si ce sens concerne les fondements.** Nous tenterons d'éclaircir ce point dans une prochaine section.

En terminant, signalons que les stagiaires de deuxième stage (en enseignement des mathématiques), Cécile et Blanche, qui ont produit jusqu'à six leçons sur l'introduction aux règles d'opérations, utilisent plusieurs contextes (géométrique et autres) pour travailler de différentes manières les notions et avancer dans la progression du contenu. Cette variation des contextes peut conduire à une certaine généralisation et ainsi permettre une décontextualisation. Blanche utilise par exemple trois contextes pour travailler l'addition d'expressions algébriques: biscuits et boîtes de biscuits à compter, périmètre à évaluer, nombre de points de différentes personnes si on ne connaît que les relations entre le nombre de points de chacun. Autant sont utilisés pour la soustraction. Cécile, qui utilise un contexte géométrique comme deuxième approche explique dans sa planification de leçon:

> *"Cette activité est intéressante puisque la variable représente une certaine longueur, aspect qu'ils n'ont pas beaucoup travaillé jusqu'à maintenant. Cette activité consolide également l'addition qu'ils ont vue au dernier cours en se détachant des jetons et des carrés. C'est par cette activité que j'installerai une démarche claire (regrouper les termes semblables.)".*

En travaillant sur un contexte géométrique, Cécile espère se détacher du "contexte" des jetons et enrichir la compréhension du contexte algébrique par un contexte géométrique. De plus, elle en profite pour aller plus loin; le nouveau problème veut amener les élèves à considérer la somme de plusieurs expressions algébriques et à conclure qu'il serait utile de regrouper les termes semblables. Blanche tient des propos semblables. Les nouveaux problèmes ne sont pas des problèmes d'application mais l'occasion de reprendre le travail, de le consolider et d'aller plus loin. Ainsi les problèmes sont choisis pour travailler différents aspects.

Nous avons discuté jusqu'ici des leçons qui visent à introduire des règles de calculs algébriques, mais sous le deuxième schéma d'organisation (figure 25), nous retrouvons aussi les leçons visant à introduire aux règles de transformation des équations du premier degré à une inconnue ($a=b \Rightarrow a+c=b+c$ et $a=b \Rightarrow ac=bc$). Pour ces nouvelles leçons, nous pouvons faire des remarques semblables aux précédentes quant à la relation entre les deux domaines d'expérience.

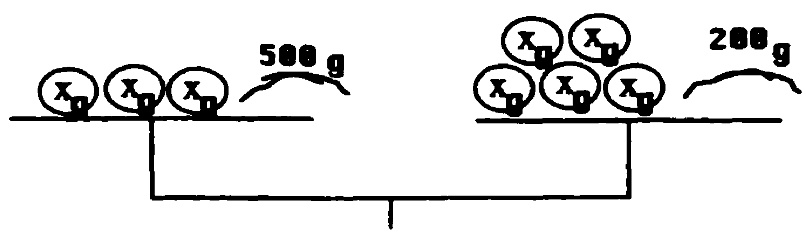
**d. Expérience sur des équations via une illustration: Blanche, Frank, Odette et Patricia, deuxième secondaire**

Les stagiaires proposent un problème aux élèves où deux quantités comportant une valeur inconnue sont égales. Le problème est conçu pour travailler la résolution d'équation à l'aide d'une illustration et l'équation colle alors directement à l'illustration comme dans l'exemple de Patricia ci-dessous.

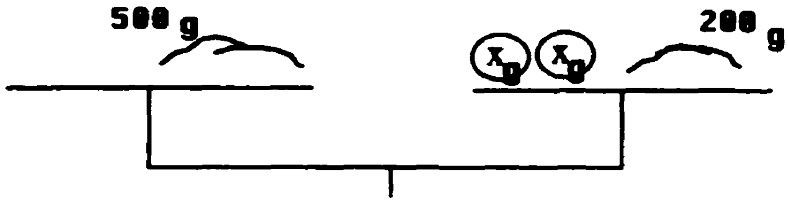
> *"On met trois sacs contenant la même quantité de farine dans le plateau gauche d'une balance et cinq sacs dans le plateau droit. Pour obtenir un équilibre parfait, on ajoute 500 grammes de farine dans le plateau gauche et 200 grammes dans le plateau droit. Quel est le poids, en grammes, de chaque sac de farine."*

Blanche et Patricia utilisent des masses connues et inconnues sur une balance. Frank et Odette utilisent des assiettes contenant un nombre égal de bonbons et sacs de bonbons. Le problème est résolu en manipulant du matériel ou à l'aide d'une illustration au tableau. Nous donnerons deux extraits de planifications: un extrait de Patricia qui utilise un contexte de balance et de masse et un extrait d'Odette qui utilise un contexte de bols contenant une même quantité de bonbons. Dans le premier cas, les égalités et inégalités entre masses sont illustrées par les équilibres et les déséquilibres de la balance.

> <u>Extrait de Patricia, sec. 2: résolution d'équations (planification de leçons)</u>
> *"Pour illustrer la situation, on va faire comme il est dit dans le problème, c'est-à-dire en se servant d'une balance. ÉLÈVE pourrais-tu me dire comment on peut représenter la situation s.v.p.*




> *(...) Maintenant, comment il faudrait faire? À TROUVER AVEC LES ÉLÈVES.*
> *Réponses attendues des élèves*
> *Si on enlève 3 sacs sur chacun des plateaux, comme on enlève le même poids sur les deux plateaux de la balance, celle-ci est encore en équilibre et on a maintenant:*




*(...)"*

Dans le cas d'Odette, les égalités ne sont pas illustrées. L'illustration est un support au raisonnement mais ne permet pas le constat.

Extrait d'Odette, sec. 2: résolution d'équations (planification de leçons)
*"J'ai deux bols de bonbons. Les bols ont des quantités égales de bonbons. Peux-tu manipuler les bonbons et les sacs de bonbons pour trouver la quantité de bonbons dans les sacs?*
*On sait que les sacs contiennent tous le même nombre de bonbons.*
*Note: insister sur les quantités égales.*

***Solution:***
*J'enlève deux sacs de chaque côté. J'ai, donc, encore la même quantité de bonbons de chaque côté.*

*(...)"*.

L'illustration et les équations sont travaillées soit en même temps soit après une première expérience sur l'illustration. Les stagiaires dégagent les propriétés des équations d'abord dans le contexte puis s'en détachent pour généraliser. Cette généralisation est plus ou moins verbalisée. Blanche (sur la balance) et Odette (sur les équations) se contentent d'insister sur le maintien de l'équilibre ce qui entraîne de toujours faire les mêmes opérations de chaque côté de l'égalité. Patricia précise les opérations qui maintiennent l'égalité: *"quand on soustrait une certaine quantité sur un des côtés de l'égalité, pour que notre équivalence soit conservée, il faut soustraire la même quantité à l'autre partie de l'égalité."*

Il n'y a pas de vérification à la fin consistant à remplacer la réponse trouvée dans l'équation de départ mais cette vérification fait partie des étapes à suivre lors de la résolution de problèmes se traduisant par une équation (Blanche, Patricia). Nous ne savons pas si la fonction de cette vérification est explicitée aux élèves. Notons que dans leur planification de leçons, Patricia, Odette et Blanche appellent la méthode introduite, ***méthode des équations équivalentes***, mais qu'elles ne réfèrent jamais à l'équivalence des équations dans les leçons; toutefois, elles mettent beaucoup de soin à montrer ***l'équivalence*** entre les quantités.

Le travail se fait surtout par les stagiaires en interaction avec le groupe; le raisonnement est guidé assez étroitement par les stagiaires malgré un désir de faire participer les élèves. La leçon se conclut par d'autres problèmes à résoudre ou sur des exercices techniques portant directement sur les règles de résolution.

Nous retrouvons dans les deux exemples donnés plus haut, peut-être l'équivalent des deux tendances présentées en c) mais cette fois pour l'égalité. Comme pour les leçons sur le calcul algébrique, le traitement de l'illustration et des expressions algébriques peut se faire plus ou moins en parallèle selon le lien qu'entretiennent les deux domaines d'expérience. D'une part, la résolution peut s'effectuer par une suite de déductions qui repose complètement sur les quantités et relations entre ces quantités. Le raisonnement contextualisé sert alors d'exemple générique. D'autre part, l'illustration peut fonctionner complètement comme une analogie (en particulier dans le contexte de la balance) en parallèle au domaine algébrique. C'est la tendance aussi du manuel qui propose plusieurs exercices de balance que reprend d'ailleurs Patricia une fois le problème de départ résolu. Par ailleurs, les deux situations présentées dans les extraits présentent des caractéristiques différentes importantes à souligner si on considère la validation: dans le problème de Patricia, la légitimité des opérations sur les équations peut trouver confirmation dans le maintien de l'équilibre observable si une vraie balance est utilisée comme le fait Blanche; dans le cas d'Odette, comme l'égalité ne peut être constatée, l'expérience ne peut se réaliser que mentalement.

De façon générale, l'expérience contribue à **donner du sens aux propriétés de l'égalité** lorsqu'elle lui associe l'image d'une balance en équilibre ou déséquilibre (sens analogique). De plus, l'expérience mentale contribue au sens en permettant de déduire la réponse par un **raisonnement naturel dans le contexte**. Toutefois, ce sens est relatif à la participation de l'élève au processus et comme plusieurs stagiaires semblent avoir de la difficulté à laisser les élèves résoudre le problème, le sens y perd.

Brièvement, nous pouvons terminer cette section en rappelant qu'un seul stagiaire donne directement la théorie pour ensuite faire pratiquer les élèves et que les autres travaillent à partir d'exemples à potentiel générique le plus souvent illustrés et contextualisés. Ces exemples servent à faire accepter le modèle. C'est là principalement que prend place la validation. Cette étape avec la part de validation qu'elle porte, a pour fonction de donner du sens aux règles du calcul algébrique et aux méthodes de résolution des équations, d'après le projet de plusieurs stagiaires et aussi d'après notre analyse, en associant en particulier des images aux opérations sur les expressions algébriques et à l'égalité qui parfois permettent une argumentation à potentiel de preuve. Mais ce projet de donner du sens va-t-il jusque là? Va-t-il jusqu'à vouloir montrer les fondements, comme le disent certains stagiaires? Dans la section suivante, nous tenterons de préciser jusqu'où va le projet de sens des stagiaires et par le fait même de préciser la fonction de la validation.

### 6.2.3 Fonction de la validation: limites du projet des stagiaires

Dans leur planification, la majorité des stagiaires ont le projet de donner du sens aux règles de manipulations (§6.2.1). La partie expérimentale de leurs leçons remplit cette fonction (§6.2.2). Cette partie consiste à introduire les règles à l'aide d'exemples, d'illustrations et de problèmes à contexte qui permettent entre autres de donner un sens concret aux opérations, expressions algébriques, équations et propriétés de ces équations et qui dans certains cas permettent une argumentation qui pourrait devenir une preuve. Mais jusqu'où va ce projet? Se rend-il jusqu'à vouloir faire reconnaître par les élèves la nécessité mathématique des règles, puisque les élèves connaissent des propriétés des opérations? Pour mieux cerner la fonction de la validation, nous envisagerons dans cette section les limites et lacunes de la validation chez les stagiaires.

Nous montrerons quatre limites ou lacunes du projet de sens des stagiaires: a) des propriétés qui sont peu présentes et une argumentation qui est centrée sur la réponse; b) un sens parfois qui tient de l'arbitraire; c) une participation réduite des élèves; d) une absence de questionnement de validation.

#### a. Des propriétés qui sont peu présentes et une argumentation qui est centrée sur la réponse

Nous avons situé la validation dans une étape expérimentale qui caractérise le schéma des leçons de la grande majorité de stagiaires. Les manipulations, exécutées par les stagiaires ou les élèves à cette étape expérimentale, permettent d'énoncer des règles correctes parce qu'elles utilisent implicitement au moins les propriétés des opérations et des égalités. Nous nous interrogeons maintenant sur la place occupée par ces propriétés puisque ce sont elles qui valident les procédures de calcul ou de résolution dans le domaine algébrique. Nous chercherons à trouver des indices d'une volonté de faire reconnaître la nécessité mathématique des règles en analysant les illustrations, verbalisations et écritures symboliques des stagiaires, 1) dans les planifications et prestations portant sur la résolution d'équations, et 2) dans les planifications et prestations portant sur le calcul algébrique.

1. Résolution d'équations

La partie expérimentale des planifications et prestations portant sur la résolution d'équations, est organisée complètement pour illustrer les propriétés de l'égalité qui sont explicitement formulées, en rapport au contexte et de manière générale. Blanche, dans sa prestation, prend beaucoup de temps pour montrer aux élèves l'effet sur l'égalité d'un changement apporté à un membre de l'égalité. Alors la résolution des problèmes qui sont proposés aux élèves, repose sur l'assentiment général que si par exemple, on enlève une même quantité à deux quantités égales, les quantités restantes seront encore égales. Il y a un implicite toutefois, c'est que si l'on rajoute la même quantité alors l'on retrouve la quantité de départ. Cet aller-retour, les stagiaires ne le font pas. Mais ce n'est sans doute pas là que l'on peut soulever la question de l'équivalence des équations puisqu'il n'y a pas de pertinence à le faire. Comment percevoir la pertinence de la question si les élèves n'ont jamais rencontré d'équations qui ne sont pas équivalentes bien que les transformations préservent l'égalité (Cf. § 3.3). Toutefois, il nous semble que les stagiaires confondent équivalence des équations et équivalence des quantités. En effet, alors qu'ils nomment la méthode introduite "méthode des équations équivalentes", les stagiaires ne parlent d'équivalence que pour les quantités égales.

2. Calcul algébrique

Les règles du calcul algébrique tiennent aux propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité, entre autres). Nous pourrions même nous passer des nouvelles règles en se référant complètement à ces propriétés des opérations. Par exemple, la règle pour multiplier un monôme par une constante s'appuie sur l'associativité de la multiplication $[a\cdot(bx) = (a\cdot b)x]$, celle pour additionner deux monômes semblables $[ax+bx = (a+b)x]$ et celle pour multiplier un binôme par une constante [$(x+b)a = xa + ba$] sur la distributivité de la multiplication sur l'addition. Les élèves ont été préalablement familiarisés avec ces propriétés en première secondaire. Dans le manuel utilisé par tous les stagiaires de deuxième secondaire, elles sont rappelées au début du chapitre sur l'algèbre. Nous nous sommes demandé si les stagiaires faisaient le lien et s'ils cherchaient à faire reconnaître la nécessité mathématique des règles. Il nous semble que non dans la mesure où les propriétés sont peu présentes explicitement et où la règle nous semble fondée bien plus sur un constat effectué à partir de la réponse obtenue que sur les propriétés des opérations. Pour illustrer ce point, nous nous attarderons en i) sur les références explicites aux propriétés dans les planifications et prestations, puis en ii) sur les illustrations et le discours qui les accompagnent.

i) <u>Référence explicite aux propriétés</u>

Nous constatons que les propriétés des opérations sont peu présentes dans les planifications et si elles le sont davantage dans les prestations, leur utilisation apparaît impromptue. Certains mentionnent dans leurs planifications, l'utilisation des propriétés comme habileté à acquérir sans toutefois que l'on en trouve des échos dans la description de la leçon proprement dite. Le travail sur les propriétés ne semble pas faire l'objet d'une préparation précise dans les planifications de leçons sur le calcul algébrique.

Dans les planifications, la commutativité et l'associativité de l'addition ou de la multiplication sont pratiquement absentes. Dans les prestations, ses propriétés apparaissent quelques fois. Alain mentionne une fois, en passant, la commutativité de la multiplication. Cécile, lors d'une manipulation de jetons, dit "*on peut tout mêler*". Violette l'utilise de façon plus significative pour discriminer entre deux réponses différentes des élèves. À la question $3d^2 \times 3d^5$, les élèves avancent deux réponses, $3d^5$ et $9d^5$; Violette effectue alors une décomposition, $3 \times d \times d \times 3 \times d \times d \times d \times d \times d$, puis demande aux élèves "*Qu'est-ce que ça veut dire commutatif?*" et indique "*Je change les termes de place*".

Seule Blanche réfère explicitement à l'associativité dans sa planification de leçons. Demandant aux élèves de trouver le périmètre d'un triangle, elle envisage plusieurs solutions; "*les élèves,* dit-elle, *pourront trouver plusieurs manières d'additionner pour conclure que le résultat est le même pour tout le monde (principe de l'associativité).*" Plus loin, elle utilise les propriétés des opérations pour montrer la distributivité de la multiplication sur l'addition. Elle s'appuie alors sur le sens d'addition répétée de la multiplication.

<u>Extrait de Blanche, sec. 2: multiplication par une constante (planification)</u>

*"Ainsi, si l'addition répétée n'est pas survenue avec l'exemple précédent, les chances sont fort probables dans cette situation. Donc les élèves pourront affirmer que c'est répéter deux fois x-15.*

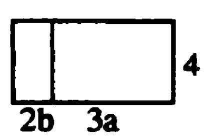
$$\begin{aligned} 2 \text{ fois } x-15 &= x - 15 + x - 15 \\ &= x + x - 15 - 15 \\ &= 2x - 30 \end{aligned}$$

*Ainsi, je ferai réfléchir les élèves sur le lien de distributivité qu'il est possible d'appliquer sur la multiplication d'une expression algébrique par une constante. En effet, je les ferai raisonner jusqu'à ce qu'ils découvrent que multiplier une expression algébrique par une constante revient à multiplier le coefficient de la variable et la constante par un certain facteur multiplicatif."*

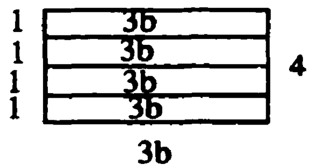
Presque tous les stagiaires se réfèrent à la distributivité de la multiplication sur l'addition. Seule Violette, en troisième secondaire se contente de donner la procédure: *"La multiplication d'un monôme par un polynôme, c'est encore plus facile que l'addition ou la soustraction parce que là tu multiplies le monôme par le premier terme, tu multiplies le monôme par le deuxième terme."* Si les stagiaires travaillent de façon plus explicite cette propriété dans les planifications qui portent sur la multiplication d'un polynôme par un monôme c'est sans doute parce qu'elle correspond directement à une des procédures ou règles à découvrir, mais nous verrons que la *découverte* de la règle ne se préoccupe pas toujours de faire reconnaître sa nécessité.

ii) <u>Arguments à partir des illustrations</u>

Nous porterons maintenant une attention particulière aux illustrations et aux verbalisations qui les accompagnent. Nous trouvons une utilisation intéressante des illustrations chez Alain, Blanche et Violette. Ceux-ci utilisent un contexte géométrique d'aire pour travailler la division comme opération inverse de la multiplication. À ce propos, Violette formule ce que nous pouvons comprendre comme un projet de validation qui est plus qu'un projet de vraisemblance: *"je peux donc ici faire davantage mijoter l'idée que diviser c'est chercher le facteur qui multiplie mon diviseur pour obtenir mon dividende et que cela est plus qu'un raisonnement de vérification de réponse."* L'illustration peut donc servir de support au raisonnement. Nous en trouvons un exemple avec Alain. Dans sa prestation, la distributivité de la multiplication sur l'addition est illustrée via des rectangles et leurs aires, et l'élève est amené à expliquer que $(3a+2b)\times 4 = 3a\times 4 + 2b\times 4$, d'où la procédure.



Cependant lorsqu'il s'agissait de multiplier un monôme par une constante, Alain n'a pas tenté d'illustrer l'associativité. Bien sûr, il utilise une décomposition géométrique, ci-dessous, qui illustre aussi une propriété de la multiplication. C'est un élève qui d'ailleurs avait préalablement suggéré la décomposition algébrique $4\times(3b) = 3b + 3b + 3b + 3b$.




Toutefois, cette décomposition n'entrera pas dans l'argumentation au moment d'énoncer la règle. Après plusieurs exemples, avec et sans illustrations, il conclut en mettant l'accent sur la réponse finale obtenue. L'argument alors utilisé pourrait se formuler comme ceci: pour obtenir 12b, j'ai fait $4\times3$, donc pour multiplier un monôme par une constante, il faut multiplier la constante par le coefficient du monôme. L'argumentation de décomposition a disparu. Ceci nous fait dire que la décomposition a bien plus comme objectif de trouver la réponse à $4\times(3b)$ que de montrer l'égalité $4\times(3b) = (4\times3)b$.

Nous retrouvons la même chose dans la planification de leçon de Cécile dont nous avons donné un extrait à la section précédente. Cécile utilise des jetons pour faire trouver la réponse à $(2x+3) + (5x+1)$. Cette réponse peut être obtenue en comptant les pièces du matériel. Cécile ne semble pas ici vouloir faire intervenir les propriétés des opérations dans l'argumentation. C'est à partir de plusieurs calculs et des opérations effectuées, écrites au tableau avec leur réponse, que Cécile fait trouver la règle aux élèves. La règle peut alors être trouvée en constatant que pour passer de l'expression de départ à la réponse, il faut additionner 2 et 5 puis 3 et 1. La réflexion peut se faire sur les expressions algébriques sans appel aux propriétés et le matériel n'a servi qu'à trouver la réponse. Dans sa planification de leçons sur la multiplication, dont nous donnons un extrait ci-dessous, c'est encore ce qu'elle semble faire. Elle demande de calculer le produit d'un monôme par un binôme à l'aide du matériel et de l'écrire symboliquement. C'est de là que la règle est déduite en constatant que l'on multiplie chacune des parties de l'expression par la constante.

<u>Extrait de Cécile, sec. 2: multiplication (planification)</u>
*Je demande de représenter, à l'aide de jetons et de carrés, l'expression (3x - 2). Je demande ensuite comment on pourrait avoir 4 fois cette expression. Les élèves diront sûrement que l'on reproduit 4 fois cet ensemble de jetons et carrés. Je leur demande de calculer le produit à l'aide des jetons et des carrés*

*et de l'écrire symboliquement. Après quelques exemples, ils remarqueront que l'on multiplie chacune des parties de l'expression par la constante.*

Dans sa planification améliorée, Frank explicite l'argumentation qui le mène à la distributivité de la multiplication sur l'addition et l'illustration ne lui sert qu'à trouver la réponse. La validation de la règle apparaît alors bien faible.

Dans sa planification, Frank insiste sur la distributivité, celle-ci tenant lieu de procédure; c'est ce que montre l'extrait suivant.

<u>Extrait de Frank, sec. 2: multiplication par une constante (planification de la leçon)</u>

*"Qu'est-ce que le produit? => multiplication*
*Donne-moi une somme de termes. (4x+6)*
*Maintenant une constante? 3*

*alors 3 · (4x+6)*
*Je leur dis pour faire cela, on doit appliquer la propriété de la distributivité. (...)*
*1ère étape, on fait des flèches donc*

*3 · (4x + 6),*

*ainsi 3 · 4x+ 3 · 6*
*12x+18 "*

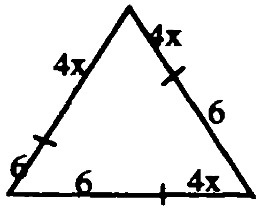
Avec cette planification, Frank ne formulait pas le projet de donner du sens aux règles, ni de les faire découvrir ou de les fonder, comme les autres stagiaires. Il donnait directement la règle qui était suivie d'exemples et d'exercices (figure 24). Dans sa planification améliorée, il opte cependant pour une autre option qui découle d'une nouvelle volonté de donner du sens à la distributivité. Or, ce changement ne contribue pas davantage à montrer la nécessité de la règle. Il demande aux élèves de calculer le périmètre d'un triangle équilatéral dont un côté mesure 4x+6 (extrait suivant).

<u>Extrait de Frank, sec. 2: multiplication par une constante (amélioration)</u>[54]

*"Quel est le périmètre d'un triangle équilatéral dont la mesure de un des côtés est 4 fois une certaine mesure augmentée de 6, soit (4x+6).*
*Je vais demander à un élève si on peut savoir la mesure des deux autres côtés de mon triangle équilatéral.*
***<u>Réponse attendue</u>:***
*C'est la même mesure car il y a trois côtés congrus.*
*Afin d'aider les élèves, je vais dessiner le triangle au tableau et chacun des côtés va être coupé en deux avec comme mesure 4x et 6:*

---

[54]Les écritures algébriques de même que le dessin sont tirées telles quelles de la planification de Frank. Les expressions 4x et 6 sont bien représentées par des longueurs différentes tel qu'illustré.




*Je vais leur demander de me trouver le périmètre. Étant donné que l'on a travaillé l'addition de termes semblables, ils vont me trouver le périmètre qui est 12 fois une certaine quantité augmenté de 18.*
*Ensuite, je vais leur demander s'il y a un moyen plus simple pour arriver à trouver notre périmètre rapidement si on regarde la mesure de 1 côté et le périmètre.*
*4x+6 <=> 12x+18, qu'est-ce que l'on remarque?*

***<u>Réponse attendue</u>:***
*12x est 3 fois plus grand que 4x et 18 est 3 fois plus grand que 6.*
*Ainsi, je vais leur dire que l'on a multiplié notre mesure de côté par 3*
*alors 3 * (4x+6) = 12x+18.*
*Par conséquent, on se retrouve à multiplier nos deux termes par notre 3. Je leur dis que ce que l'on vient de faire, c'est appliquer la propriété de la distributivité sans insister sur le mot distributivité. (...)*
*Par la suite, je peux leur dire de faire des flèches s'ils veulent s'aider afin de ne pas oublier de multiplier les deux termes contenant la parenthèse.*
*S: vous pouvez faire des flèches si vs voulez vs aider afin de ne pas oublier de multiplier les 2 termes contenant la parenthèse."*

Avec ce changement, Frank espère que les élèves "*vont vraiment voir qu'ils doivent multiplier par 3 les deux termes contenant la parenthèse. Par conséquent, ils dégageront du sens à la distributivité. De plus, lorsqu'ils s'engageront dans la résolution d'un tel problème, ils ne feront plus machinalement des flèches sans réfléchir et leurs opérations seront sensées.*"

Reprenons l'argumentation de Frank. On trouve le périmètre d'une première manière, en effectuant l'addition (4x+6) + (4x+6) + (4x+6) et en appliquant la procédure vue à un cours précédent (addition des termes semblables): le résultat est 12x+18. On sait qu'on aurait pu le trouver en multipliant (4x+6) par 3, ce qu'on ne sait pas encore faire. Donc 3(4x+6) = 12x + 18. Jusqu'ici, on peut dire que les deux expressions sont équivalentes puisqu'elles correspondent à deux manières de calculer le périmètre. Frank se dit alors que pour obtenir 12x, 4x a nécessairement été multiplié par 3, et que pour obtenir 18, il faut que 6 ait aussi été multiplié par 3, d'où la règle. Mais cet argument est faible. En effet, si nous pouvons penser que vraisemblablement 4x et 6 ont été multipliés par 3, nous ne savons rien des raisons qui pourraient nous faire affirmer que c'est nécessairement le cas. Frank a montré que 3 × (4x+6) était égal à 12x + 18 mais pas que 3 × (4x+6) égalait 3×4x + 3×6, égalités pour laquelle on pourrait trouver un équivalent dans l'illustration.

Frank utilise le contexte géométrique accessoirement, celui-ci ne sert pas à illustrer les propriétés mais permet de trouver un résultat qui permettra de déduire la règle, par comparaison. Ce comportement paraît assez répandu. Nous l'associons aussi à un projet de vraisemblance car l'accent est mis sur la réponse et non sur la démarche pour y arriver (Margolinas, 1989). Le projet comprend sans doute une part de pragmatisme comme dans la situation qui suit.

Cécile et Blanche proposent aux élèves un calcul de périmètre. Dans leur planification, elles prévoient "dérouler" le périmètre afin de l'évaluer. Le traitement peut laisser penser que les stagiaires vont illustrer les propriétés des opérations impliquées. Cécile présente une figure à sept côtés dont l'un mesure "n" centimètres. Le contour de la figure est formé de languettes de carton de manière à pouvoir décomposer la figure et représenter la longueur totale de tous les côtés sur une seule ligne. Tous les n centimètres présents dans chacun des côtés seront rassemblés, puis toutes les constantes. Cette illustration n'est cependant pas utilisée comme preuve mais a un rôle pragmatique comme le souligne Cécile: "*...de cette petite activité, il ressortira qu'il serait utile de les rassembler avant de les additionner pour être certaine de ne pas en oublier puisque la figure présentée aura plusieurs côtés.* "

Nous en venons à la conclusion, que la validation n'a pas pour fonction de montrer la nécessité mathématique des règles bien que certaines argumentations aient un potentiel de preuve. Le projet de sens ne va pas jusque là. La mise en évidence des propriétés n'apparaît pas l'objet d'une planification et leur utilisation n'apparaît pas systématique en classe. Les propriétés des opérations sur les nombres ne sont pas reportées sur les opérations sur les expressions algébriques. Le traitement des règles en est presque indépendant. Si les illustrations peuvent supporter un raisonnement qui valide la règle, comme lorsque Alain propose de multiplier un binôme par une constante, celles-ci semblent choisies surtout pour trouver la réponse. La nuance est subtile mais pourrait être fondamentale.

**b. Un sens parfois qui tient de l'arbitraire**

Quant à Bernadette, son traitement apparaît complètement arbitraire et pourtant elle formule, en introduction de ses planifications de leçons, l'intention explicite d'illustrer les fondements et de faire découvrir les règles par les élèves:

*"Le but de cette leçon est de faire découvrir et justifier les règles d'opérations sur les expressions algébriques. J'utiliserai une activité me permettant de mettre en évidence les règles des différentes opérations algébriques et d'illustrer le fondement logique de ces règles. (...) On veut que l'élève prenne conscience que les manipulations algébriques effectuées sont "légales", naturelles et logiques (raisonnement)."*

Comme Cécile, elle utilise des jetons de couleur. Au début de la leçon, elle donne les consignes d'utilisation du matériel qui suivent.

Extrait de Bernadette, sec. 2: opérations sur les expressions algébriques (planification)

*"1. Un jeton bleu représente un nombre positif.*
*2. Un jeton rouge représente un nombre négatif.*
*3. Un cube bleu représente une variable précédée d'un coefficient positif.*
*4. Un cube rouge représente une variable précédée d'un coefficient négatif.*
*5. Une corde représente la parenthèse.*
*6. Les opérateurs +/- sont utilisés seulement devant les parenthèses."*

Elle précise que *"Les élèves pourraient penser que le petit cube représente $n^3$"* et se propose alors d'intervenir en disant *"lorsqu'on joue au dé, on ne sait pas d'avance sur quel nombre le dé va s'arrêter. Le dé représente un nombre quelconque."* Elle donnera ensuite une première série de consignes concernant l'addition d'expressions algébriques:

*"1. Regroupe les jetons ensemble Un jeton bleu annule (neutralise) un jeton rouge et vice versa.*
*2. Regroupe les cubes ensemble. Un cube rouge annule (neutralise) un cube bleu et vice versa."*

Les deux dernières séries de consignes concernent les expressions avec parenthèses:

*"1. L'opérateur "+" placé devant la corde permet d'enlever cette corde sans changer les couleurs des cubes et des jetons.*
*2. L'opérateur "-" placé devant la corde exige de changer les couleurs avant d'enlever la corde (ex: un jeton bleu devient un jeton rouge et un cube rouge devient un cube bleu et vice versa.).*
*3. S'il n'y a pas d'opérateur devant la corde, c'est l'opérateur "+" qui est sous-entendu.*

*1. Un nombre devant une corde exige de représenter le contenu autant de fois que le nombre l'indique.*
*2. Pour la division, tout le contenu se partage également en autant de fois que le nombre l'indique."*

Chaque fois, elle soumet une série d'expressions avec opérations aux élèves et leur demande de les représenter et de faire le compte final. Elle leur demandera éventuellement d'expliquer comment ils ont fait. Les premiers calculs sont effectués à l'aide du matériel, par la suite d'autres calculs sont proposés sans matériel pour assurer le transfert: "*C'est le temps du transfert*". D'autres opérations sont traitées et des chaînes plus complexes sont ajoutées. Toujours, le travail s'effectue d'abord avec matériel en observant des consignes strictes et ensuite viennent les exercices de transfert. La planification améliorée de la leçon ajoute un traitement parallèle algébrique au travail sur le matériel sans doute parce que le transfert ne s'est pas effectué facilement en classe.

Non seulement, tout est dit, l'élève n'a pas d'initiative, mais l'ensemble donne une impression d'arbitraire. Si Bernadette voulait illustrer les fondements et montrer que les règles sont logiques, l'utilisation qu'elle a faite du matériel risque de produire l'effet inverse, puisqu'il n'y a aucun lien formulé entre les propriétés des nombres et les consignes à propos des jetons, des cubes et de la corde. Elle a même tenté de donner une pertinence à un choix arbitraire (le dé). Les deux domaines d'expérience, celui des expressions algébriques et celui de l'illustration, sont quasi indépendants. Il n'y a même pas de correspondance analogique puisque les règles de fonctionnement du matériel ne découlent pas des relations en jeu dans le type d'illustration choisi. L'utilisation du matériel provient de l'intention de donner du sens et de fonder les règles mais fait illusion au sens.

Par contraste, voyons le traitement de Cécile, qui utilise un déroulement proche de celui de Bernadette. Le traitement montre un rapport différent au matériel. Ceci est apparent surtout dans la deuxième version de la planification, planification repensée avant la prestation étant donné le matériel disponible à l'école (tuiles plutôt que jetons). Cécile insiste sur le rôle des jetons (tuiles), qui est de représenter les expressions algébriques, et lors de la présentation du matériel, "déduit" les règles du matériel des règles des nombres et des opérations, comme nous le montre l'extrait ci-dessous:

> <u>Extrait de Cécile, sec. 2: opérations sur les expressions algébriques (planification)</u>.
> "*Je ferai découvrir aux élèves les différentes tuiles algébriques: les unités, le x et le $x^2$. Ils découvriront par la suite la pertinence d'avoir des tuiles de couleur et des tuiles transparentes. J'insisterai (...) sur l'utilité de ces tuiles qui est de représenter des expressions algébriques. La notion d'opposé est ensuite ressortie puisque je demanderai aux élèves comment on qualifie 1 et -1 ou bien x et -x en montrant les tuiles correspondantes. Il y a donc une règle que l'on doit connaître: un carré rouge annule un carré transparent, un x rouge annule un x transparent et ainsi de suite pour les $x^2$. Je demande aux élèves comment je pourrais représenter 2 avec les tuiles algébriques et j'insisterai pour que différentes façons ressortent. Je ferai ensuite représenter le 0 de différentes façons.*"

En classe, nous avons observé un lien encore plus net entre le registre nombre et le registre matériel. La stagiaire présente le matériel comme étant construit par quelqu'un et fait participer les élèves au décodage du matériel en leur demandant ce que peut bien signifier chacun des objets (tuiles). Bien sûr ici le matériel utilisé a certaine ressemblance avec un matériel utilisé dans le passé par les élèves (blocs multibases) et permet donc des hypothèses sur sa signification, ce que les jetons de couleur de Bernadette ne permettaient pas. De plus, comme Cécile présente en introduction un problème à contexte de la vie courante, que l'on résoudra à l'aide du matériel, non seulement il est plus facile de conserver la présence des nombres mais le rôle du matériel, au service du problème, devient plus clair. Plus tard, dans la soustraction, elle s'appuiera sur le matériel pour illustrer que soustraire c'est additionner l'opposé et, encore ici, en partant de ce que les élèves connaissent sur les nombres et non du matériel comme le fait Bernadette.

Mais, même si le matériel illustre les nombres et qu'il n'est pas présenté comme représentant les nombres, Cécile ne fait pas référence (ou très peu) aux propriétés des opérations, conformément à sa planification. Toutefois, les nombres et les opérations étant présents une allusion aux propriétés est possible comme nous l'avons observé dans la prestation.

Somme toute, dans les planifications et prestations de leçons sur le calcul algébrique, l'argumentation qui mène à la règle ne semble pas articulée sur les propriétés des opérations bien que celles-ci ne soient pas complètement absentes des leçons. Chez Bernadette, le matériel étant indépendant des nombres et de leur propriétés, il n'y a certes pas de preuve malgré le projet de fonder les règles. Frank et Cécile utilisent des illustrations ou du matériel mais ne s'en servent vraisemblablement que pour trouver une réponse qui permettra de déduire la règle. L'argumentation d'Alain semble parfois s'articuler sur les propriétés et parfois non et alors l'accent est mis sur la réponse obtenue comme chez Frank et Cécile. Par ailleurs, nous pouvons penser que les manipulations de segments ou de surfaces chez Cécile et Blanche sont motivées bien plus par un souci d'efficacité que par un souci de preuve.

D'après notre analyse, nous pensons que les stagiaires assument que les propriétés sont connues des élèves, que l'objectif des stagiaires est d'arriver aux règles voulues et que cet objectif n'implique pas un nouveau travail sur les propriétés ni même une intention de validation à partir des propriétés. Les propriétés ont fait l'objet de leçons précédentes données par l'enseignant associé. Les leçons sur les opérations données par les stagiaires ne se situent pas dans le prolongement du travail préalablement fait, mais en parallèle, avec peut-être davantage un objectif d'efficacité que de rigueur, qui n'appelle pas le recours aux propriétés.

Nous dirons que la validation, que nous situons dans la partie expérimentale de la leçon et dans l'interaction entre l'illustration et le domaine algébrique, a comme fonction de donner du sens aux règles et relève d'un projet de vraisemblance et non de preuve. En référence à notre grille d'analyse présentée à la fin du chapitre sur la méthodologie, la validation a comme fonction d'expliquer, mais l'explication peut se limiter à établir un lien entre deux expressions à la manière de Frank. Toutefois, nous dirons que la validation a parfois un potentiel de preuve mais que ce potentiel de preuve est peu exploité par les stagiaires. Pour entreprendre une démarche de preuve dans ces leçons, il faudrait que les stagiaires rompent un moment avec leur objectif d'introduire à la règle, qu'ils la remettent en question et, peut-être, aussi qu'ils laissent encore plus de place à l'élève.

**c. Une participation réduite des élèves**

Nous avons regardé si les propriétés guidaient les interventions des stagiaires et si ceux-ci montraient la nécessité des règles. Nous avons conclu que le projet de donner du sens n'allait pas jusque là. Nous pensons également que les stagiaires n'ont pas le projet de faire construire ce sens par les élèves. Il semble bien qu'il y a correspondance entre le projet de faire participer les élèves associé au projet de sens et les schémas d'organisation que nous avons identifiés à la section précédente. C'est chez Frank et Violette, qui utilisent le premier schéma d'organisation (figure 24, §6.2.2.1) que nous trouvons les extraits les plus clairs du peu de participation des élèves. Mais même chez les autres stagiaires, il y a peu de participation significative des élèves. D'une part, nous trouvons, dans les planifications, des activités qui, conduisant à l'évidence, ne permettent pas un réel investissement de l'élève, dans le cas des manipulations de jetons, par exemple. D'autre part, dans les prestations de leçons, des stagiaires ont de la difficulté à laisser les élèves résoudre les problèmes par eux-mêmes. Par exemple, Blanche qui, dans sa planification, prévoit donner du temps aux élèves pour résoudre un problème, ne le fait pas lors de sa prestation. Alain qui questionne les élèves a tendance aussi à fournir les réponses.

Plusieurs explications sont possibles. Retenons en trois ici. Les stagiaires se sentent par contrat le devoir de montrer comment faire. Les stagiaires ne se sentent pas près à tenir compte sur-le-champ des diverses procédures possibles des élèves. Les stagiaires veulent guider les élèves vers la découverte le plus simplement possible.

Si le projet de donner du sens est maintenu nous pouvons espérer que l'expérience comblera les deux premières lacunes. La dernière est plus profonde opposant ce que nous percevons maintenant comme la différence entre faire découvrir, projet des stagiaires, et construire les connaissances.

**d. Une absence de questionnement de validation**

Enfin, nous ne retrouvons que rarement dans les planifications et prestations des stagiaires de moments où un énoncé est mis sur la table pour en discuter. Comme l'objectif est de présenter une règle, les situations présentées sont conçues pour mener directement à cette règle et appellent à l'évidence. Les résultats ni les procédures pour y arriver ne sont remis en doute.

Nous compléterons cette analyse des limites de la validation de deux autres cas; il s'agit des prestations d'Odette et Bernadette qui n'ont pas pour objectif d'introduire des règles: il s'agit de séances de correction d'exercices.

### 6.2.4 Complément d'analyse

En complément, nous analyserons les prestations de deux stagiaires, Odette et Bernadette, qui ont géré des séances de correction d'exercices sans en avoir planifié le déroulement. Les stagiaires prenaient la place de l'enseignant qui leur était associé durant le stage, de manière à s'intégrer graduellement à l'enseignement. Ces séances d'exercices suivaient des leçons planifiées et données par l'enseignant.

La prestation de Bernadette porte sur l'équivalence d'expressions algébriques; les élèves doivent se prononcer sur la validité d'un énoncé suivant la consigne du manuel (Carrousel mathématique 2, p. 178): "*Vrai ou faux?*" Au moment de ces exercices, les élèves viennent de revoir les propriétés des opérations. Nous proposons les extraits qui suivent en complément de notre analyse sur la place des propriétés des opérations comme argument de validation.

À tour de rôle, les élèves écrivent leur solution au tableau. Il semble que la consigne de l'enseignant ait été de donner des exemples puisque tous le font. Voyons les solutions de deux élèves. Le premier a répondu vrai à l'énoncé "*Pour tout nombre n, $3n-2n = n$*" et il a fait un exemple. La stagiaire reprend: "*On a remplacé n par 5 donc 3 fois 5, 15; moins 2 fois 5, 10; 15 moins 10, 5. Est-ce que ça = 5? Vrai. C'est bon.*" C'est la manière de faire habituelle des élèves et de la stagiaire. Le deuxième élève a aussi répondu vrai à l'énoncé "*Pour tout nombre t, $2t+3 = 3+2t$*" mais il n'a pas fait d'exemple. *La stagiaire intervient: "Oh! C'est pas complet, on n'a pas remplacé par un...*" Elle s'interrompt et poursuit: "*On pourrait dire que c'est vrai dès le départ. Pourquoi c'est vrai? Par quelle propriété?*" Les élèves reconnaissent la commutativité et elle confirme en précisant qu'il s'agit de la commutativité de l'addition. Elle complète ensuite la solution de l'élève: "*On peut remplacer par... $2+3 = 3+2$, $5=5$. Vrai.*"

Lorsque la stagiaire reprend la solution du premier élève, la conclusion vient après l'exemple et non avant; il semble donc que l'exemple serve d'argument de validation, pas seulement pour l'élève mais pour la stagiaire aussi. De plus, la stagiaire n'interroge pas l'élève sur la généralité du résultat en posant une question comme, par exemple, "*es-tu sûr que c'est vrai pour tout n?* Pour le deuxième élève, celui qui n'a pas donné d'exemple, elle annonce que sa solution est incomplète puis se ravise voyant qu'il est possible d'invoquer la commutativité, mais poursuit quand même en ajoutant un exemple. Elle conclut que c'est vrai! A-t-elle été prise au piège de sa propre incertitude ou d'une démarche imposée par l'enseignant régulier de la classe? Il se peut très bien que l'exemple utilisé comme argumentation de validation soit de pratique courante. Nous avons interrogé Cécile et Blanche[55] sur le comportement de Bernadette, Cécile a avoué que référer à la commutativité n'était pas très satisfaisant et que l'élève, de toute façon, avait dû faire un exemple lui aussi. Nous reviendrons sur la primauté des exemples pour valider dans la section portant sur les leçons du groupe 2.

Voici un autre exemple où la stagiaire d'elle-même utilise une propriété des opérations. Encore ici, c'est l'exemple qui prime sur la propriété pour valider. L'élève devait se prononcer sur l'énoncé suivant: "*Pour tout nombre c, $2c \cdot 3c = 6c$.*" Il a montré que $2c \cdot 3c$ était différent de $6c$ si on remplaçait c par 2; il a trouvé 24 et 12 ce qui infirmait l'énoncé. La stagiaire alors *fait la commutativité* et écrit $2c \times 3c = 2 \times 3 \times c \times c$. Puis elle dit: "*On va vérifier. On va remplacer par 2*" et elle trouve 24 ce qui semble confirmer l'énoncé pour la stagiaire.

Ces extraits nous laissent croire que les propriétés des opérations ont un statut de validation inférieur à l'utilisation d'exemples. Le guide d'enseignement accompagnant le manuel conseille pour ces exercices d'aller à la recherche des bêtes noires.

---

[55]Blanche et Cécile sont des étudiantes de quatrième année. Nous les avons vues après leur stage pour une discussion post-stage. À cette occasion nous leur avons demandé de répondre à quelques questions afin d'éclairer notre point de vue sur les leçons des stagiaires. Elles ont accepté mais sans se compromettre; ces entrevues n'ont donc pas été concluantes.

*"Dans la discussion voir à ce que les élèves généralisent à partir de plusieurs cas et leur demander de toujours chercher les bêtes noires; 0 en est une. On cherche l'exception qui infirmera l'énoncé. Si l'on n'en trouve pas, on conclut que l'énoncé est vrai. Cependant cette démarche ne constitue pas une preuve"* (Carrousel mathématique 2, guide d'enseignement, deuxième secondaire, tome 1, p. 542).

Ainsi même le manuel ne recourt pas aux propriétés pour valider et le traitement que fera le manuel du calcul algébrique (manipulations des expressions algébriques) ne s'appuiera pas non plus explicitement sur les propriétés des opérations. Dans le manuel, les propriétés des opérations ont été généralisées à partir d'exemples numériques, généralisation qui peut s'appuyer sur l'expérience des nombres et des opérations acquises par les élèves au cours des années scolaires antérieures. Il se peut que l'exercice ait pour objectif de rejouer à généraliser ces propriétés. Mais ce n'est pas ce que fait la stagiaire puisque la question de la généralité du résultat n'est soulevée que lorsque la vérification, par malheur, donne une égalité alors que l'énoncé est faux! Par ailleurs, la généralisation sur les propriétés ayant été faite pourquoi ne pas la récupérer dans l'exercice *"Vrai ou faux"*, d'autant plus que ces mêmes propriétés servent dans l'exercice du manuel qui le suit immédiatement: *"Peux-tu déduire la valeur manquante? Si oui, pourquoi? 1) Si $a+b=12$, alors $b+a$ est _. (...) Si $ab+a=72$, alors $(b+1)a=$__."* La correction de cet exercice fait également partie de la prestation de Bernadette et suit la correction de l'exercice *"Vrai ou faux"* dont nous avons donné précédemment des extraits.

Les planifications et prestations de Bernadette sont assez surprenantes, nous en avons vu un exemple à la section précédente et nous en avons un autre dans cette section. Bernadette n'a pas réussi le cours de didactique de l'algèbre qui précédait le stage et est donc une étudiante faible, mais son comportement peut être symptomatique d'une place ambiguë des propriétés en deuxième secondaire et d'une tendance à utiliser les exemples pour valider. Nous revenons sur ce dernier aspect avec l'analyse du groupe 2 de leçons.

Voyons maintenant la prestation d'Odette. La prestation de Bernadette se situait avant l'introduction au calcul algébrique; la prestation d'Odette se situe après. Odette corrige des exercices de manipulations des expressions algébriques. L'extrait que nous proposons illustre que la distributivité est une procédure à exécuter en réaction à l'aspect de l'expression (expression avec parenthèses) bien plus qu'aux opérations en jeu avec leurs propriétés.

Extrait d'Odette, sec. 2: correction d'exercices sur les opérations (prestation)

| Stagiaire | Élèves | Nos commentaires |
|---|---|---|
| *18m-(15m-14) +12. On a un moins devant la parenthèse, qu'est-ce qui arrive aux termes qui sont à l'intérieur, dans la parenthèses?* | *...change de signes...* | On change les signes. |
| *Maintenant on enlève la parenthèse. 18m-15m+14+12 Il change le signe ça devient +14* | *Pourquoi?* | |
| *On fait la distributivité, il y a un -1 devant. -1 × 15* | *-15m* | Multiplication par -1. |
| *-1 × -14* | *14* | |
| | *Pourquoi on enlève la parenthèse?* | |
| *Parce qu'on veut réduire, on veut simplifier l'expression. C'est le seul moyen qu'on a. Dans la parenthèse, on peut pas, les termes ne sont pas semblables. On va l'enlever comme ça on va pouvoir additionner. 18m - 15 m 14 + 12* | *3m 26* | |
| | Une élève: [inaudible] *...il faut enlever la parenthèse?* | |
| *Chaque fois qu'il y a une parenthèse avec* [elle montre le signe de soustraction, puis reprend] *chaque fois qu'il y a de la distributivité à faire, C'est de la multiplication en fait, je la fais toujours en premier. On multiplie -1 fois la parenthèse.* | | Soustraction convertie en multiplication par -1. |
| | La même élève: *Pourquoi on l'a pas fait 18m moins 15...* | |
| *Parce que c'est moins l'opération, 18m moins toute la parenthèse.* | | |

L'enjeu c'est d'opérer correctement sur les expressions. Les élèves interrogent la stagiaire pour comprendre comment faire. Il y a une consigne double dans cet extrait: changer les signes de l'expression dans la parenthèse lorsqu'il y a un moins devant et distribuer un -1. Il nous semble que c'est cette double consigne qui ennuie la dernière élève. En fait, il nous semble que les opérations et leurs propriétés ne sont pas clairement mises en évidence. Ceci appuie nos constatations relativement aux leçons d'autres stagiaires: la distributivité est davantage travaillée parce qu'elle correspond à une action sur les expressions. Ainsi, elle ne contribue pas à plus de sens mais ( peut-être!) à plus d'efficacité.

Par ailleurs, il semble que les élèves sont bien démunis devant toutes les variantes d'écriture et s'expliquent difficilement les actions à faire. Dans l'extrait qui suit, Odette invoque la commutativité en dernier recours presque à bout d'arguments.

Extrait d'Odette, sec. 2: correction d'exercices sur les opérations (prestation).

| Stagiaire | Élèves | |
|---|---|---|
| | *Si on avait eu* <br> *18m - (15m-14)×2?* <br> *C'est la même chose que si c'était en avant?* | |
| *Oui, que le 2 soit ici ou là, c'est la même chose.* Elle montre une place à gauche et à droite des parenthèses. | | Avant ou après c'est pareil. |
| *On fait la distributivité, il y a une parenthèse. Ça* [l'expression dans entre parenthèses], *ça devient un tout.* Elle encercle l'expression dans les parenthèses: *Deux fois tout ça.* <br><br> Elle écrit: *18m - 2 × (15m-14)* <br><br> *Si ça te dérange qu'il soit de l'autre côté, tu le mets avant.* <br> *2 × 4 c'est comme 4 × 2; C'est commutatif.* | *On met le moins aussi?* <br><br> [Inaudible.] <br><br> [Inaudible.] | C'est commutatif. |
| *-2 × 15m -2 × 14* <br> *18m-30m+28. Ça va?* <br> *-2 fois chacun des termes* <br> Elle encercle le -2 et fait des flèches: <br> -2 × (15m - 14) <br> *On prend avec son signe.* | | |
| | *C'est quoi × ?* | |

| | |
|---|---|
| La stagiaire change le × pour un point.<br>*Je vous conseillerais d'en faire d'autres.*<br>*C'est pas fini 18m-30m+28*<br>*-12m+28* | |

La séance de correction continue sur le même ton. La stagiaire répond aux questions l'une après l'autre en laissant paraître parfois un brin d'exaspération. Il faut dire que c'était la première fois qu'Odette était devant la classe et que le contenu des exercices n'a pas été l'objet de son enseignement. La stagiaire est placée dans une situation inconfortable qui peut lui faire perdre ses moyens.

L'ensemble de la séance de correction illustre comment chaque variation dans l'expression algébrique devient un nouveau problème; il montre également le peu de participation des élèves dans la résolution du problème. C'est comme si les élèves n'avaient pas les moyens de répondre à leurs questions ou que la stagiaire n'envisage pas qu'ils puissent en avoir les moyens. À l'élève qui demande si *c'est la même chose* si 2 est avant ou après le binôme, Odette aurait pu lui demander ce qu'il en pensait ou lui faire verbaliser les opérations à effectuer. Odette est peut-être piégée par un enseignement qui n'est pas le sien, mais il est quand même étonnant qu'Odette, se préoccupant, dans ses planifications de leçons, que les élèves puissent *"vérifier, par eux-mêmes, l'exactitude de leur raisonnement"* ne leur renvoie pas la parole. Mais il se pourrait que renvoyer la parole aux élèves soit un geste trop osé en début de stage!

Quoi qu'il en soit, cet extrait montre, nous semble-t-il, que sans les propriétés des opérations ou une illustration de ces propriétés, l'enseignant et les élèves sont amenés à traiter les cas un par un.

Nous nous étonnons du peu de moyens apparents des stagiaires d'autant plus que ceux-ci ont été habitués dans leurs cours de didactique à l'université à verbaliser les expressions algébriques en termes de quantités et d'opérations sur ces quantités (par exemple, *à une certaine quantité, on enève 2 fois...*). Mais bien que nous puissions nous en étonner, il faut dire que leur situation n'est pas facile et leurs interventions sont soumises à certaines contraintes qui les limitent, malgré des intentions de donner du sens et de faire participer les élèves.

### 6.2.5 Bilan et conclusion sur les leçons du groupe 1

Le premier groupe de leçons que nous avons analysées avaient comme objectif d'**introduire des règles de calcul ou de résolution d'équations**. Nous avons analysé la validation en considérant que les moyens mis en oeuvre par les stagiaires pour introduire ces règles visaient à les faire accepter. Selon les intentions formulées dans leurs planifications de leçons, la majorité des stagiaires ont le **projet de donner du sens** aux règles introduites. Le découpage des planifications et prestations de leçons en étapes nous a permis d'établir le **schéma type** de leurs planifications et prestations. Une expérience (à potentiel générique), réalisée sur des expressions ou des équations le plus souvent illustrées, conduit à la règle, des exercices suivent avec réutilisation parfois d'expériences semblables aux premières. Nous avons situé la validation dans l'étape expérimentale mais tout particulièrement dans le lien qu'entretiennent l'illustration et le domaine algébrique.

Certainement, l'**étape expérimentale** a pour fonction de donner du sens aux règles et nous pouvons **préciser ce sens** d'après l'analyse des activités d'enseignement prévues ou réalisées par les stagiaires. À un premier niveau, les illustrations permettent d'**associer des images aux opérations** (partager, répéter, juxtaposer, enlever...), **aux expressions algébriques** (longueur d'un segment, aire...) et **aux égalités** (équilibre, équivalence entre quantités, effets d'une modification, déséquilibre). À un autre niveau, il arrive qu'une **argumentation des élèves** sur les expressions algébriques et les équations soit rendue possible **dans le contexte d'un problème** (contexte d'aires, de balance...). Au sortir de l'activité, l'élève devrait pouvoir tout au moins avoir la conviction que les règles *découvertes* ont du sens, qu'elles ont **du bon** sens et qu'elles sont **viables**. Nous reconnaissons donc à l'étape expérimentale une fonction de validation qui serait de **montrer la vraisemblance des règles** (Margolinas, 1989).

La caractérisation du projet de donner du sens ou de recherche de vraisemblance nous oblige toutefois à constater que les manipulations sur du matériel peuvent faire illusion au sens et à la participation des élèves, en se coupant du domaine mathématique (c'est le cas chez Bernadette), et que l'argumentation qui mène aux règles du calcul algébrique peut se limiter à comparer l'expression de départ et la réponse finale, sans souci d'expliciter les propriétés ou les étapes qui mènent de l'une à l'autre (chez Bernadette, Cécile et Frank et aussi partiellement chez Alain). Nous remarquons donc une centration sur la réponse.

Certaines argumentations pourraient être considérées comme des preuves: des décompositions algébriques par exemple qui sont parfois accompagnées d'une illustration. Blanche et Violette utilisent des décompositions algébriques pour montrer la distributivité de la multiplication sur l'addition. Alain utilise des décompositions géométriques pour introduire une règle de multiplication d'un monôme par une constante. Toutefois, il ne nous semble pas que les stagiaires soient engagés dans le projet de montrer la nécessité des règles, pour plusieurs raisons. Les élèves ne sont pas interrogés sur la généralité de la règle. La règle n'est jamais remise en question et le procédé pour y arriver est à peine voire aucunement discuté. De plus il nous semble que, dans l'ensemble, les propriétés des opérations ne guident pas la planification de leçons sur les manipulations algébriques et n'orientent pas les interventions. Si les illustrations utilisées peuvent avoir une valeur générique, il ne semble pas que le choix des illustrations et des manipulations soit organisé en référence aux propriétés des opérations. L'illustration semble bien plus utilisée pour arriver à la réponse que pour expliciter les étapes ou les propriétés qui permettent de valider la règle. Par contre, pour ce qui est de la résolution d'équations, les planifications s'articulent complètement sur les propriétés de l'égalité bien que les stagiaires ne mettent pas en évidence la réciprocité des propriétés (si $a=b$ alors $a+c=b+c$ et inversement).

Il se peut que les élèves reconnaissent le caractère non contingent des situations de départ mais les stagiaires n'interviennent pas de manière à expliciter cet aspect. La validation a peut-être un potentiel de preuve, dans le sens où la nécessité du résultat peut apparaître à l'oeil averti, mais nous n'y reconnaissons pas un projet de preuve.

Nous résumons nos conclusions dans l'encart qui suit.

**Type d'activités:** introduire des règles de calcul ou de résolution d'équations.

**Projet:** donner du sens

**Place de la validation:** dans une étape expérimentale à potentiel générique.

**Arguments de validation à potentiel de preuve:** décomposition algébrique; décomposition géométrique; argumentation sur les équations dans le contexte d'un problème.

**Autres arguments de validation:** observation factuelle sur la forme des expressions (pour passer de... à, il a fallu que...) - centration sur la réponse.

**Fonctions: montrer la vraisemblance** des règles (donner un sens concret, montrer le lien entre les expressions intiales et finales, associer des images aux opérations, aux expressions algébriques et aux égalités, argumenter dans le contexte d'un problème...)

**Autres:** équivalence des équations confondues avec équivalence des quantités.

Les projets de donner du sens et de miser sur la compréhension des élèves sont aussi encouragés dans les cours de didactique, que les étudiants ont suivi avant leur stage, dans le programme d'études en mathématiques au secondaire et dans le manuel qu'ils utilisent. Quelques commentaires de superviseurs sur les planifications de leçons des stagiaires et les planifications améliorées des stagiaires laissent penser que le projet de donner du sens est aussi valorisé par certains superviseurs. Les améliorations de leçons, après prestations, ne présentent pas de modifications majeures, c'est pourquoi nous n'en avons pas discuté; toutefois, nous constatons que les changements apportés vont toujours dans le même sens. Frank passe d'une planification sans aucun souci de validation à l'utilisation de contexte avec des illustrations dans le but de donner du sens aux règles. Violette passe de problèmes artificiels sans pertinence à des problèmes de mesure où l'outil algébrique est plus approprié. Cécile ajoute un problème à contexte aux manipulations d'un matériel. Selon toute apparence, ces modifications sont faites sous les recommandations des superviseurs. Il n'est donc pas étonnant que les stagiaires aient adopté le projet de donner du sens. Cependant, les stagiaires n'ont pas compris que donner du sens et faire comprendre pouvaient vouloir dire aussi en appeler à la nécessité mathématique, ce qui ne veut pas dire qu'il faille faire un cours de vocabulaire sur les propriétés ou verser dans le formalisme algébrique.

Dans les cours de didactique, les opérations sur les expressions algébriques n'ont pas été abordées directement. Cependant, les propriétés ont été à la base de certaines activités où entrait une part de validation. Dans ces activités, les opérations n'étaient pas effectuées de manière justement à en appeler aux propriétés. Ce travail sur les propriétés n'a pas été récupéré, peut-être parce qu'il n'a pas été compris ou que les stagiaires n'en voient pas l'utilité ou encore qu'ils n'ont pas fait le transfert.

Soulignons en terminant que le projet de donner du sens au concept ne rejoint pas le projet de développer chez les élèves le sens du concept par des activités mathématiques dans lesquelles ces élèves seraient eux-mêmes engagés et appelés à faire fonctionner leurs connaissances et à aller plus loin. La participation des élèves reste limitée dans ces activités d'introduction malgré certaines tentatives de mettre les élèves en situation de résolution de problème (surtout dans le cas de la résolution d'équations). Le stagiaire trace le chemin pour découvrir la règle qui est au bout de ce chemin.

Dans les leçons du groupe 1, ce sont principalement les stagiaires qui mènent les élèves à la règle et c'est là leur objectif principal. Qu'arrivent-ils quand les élèves eux-mêmes découvrent la règle? À quel type de validation avons-nous affaire de la part des stagiaires? C'est ce que nous allons voir avec les leçons du groupe 2 dans la section 6.3.

Les leçons du groupe 1, qui viennent d'être analysées (introduction à des règles de calculs ou à des méthodes de résolution), se différencient globalement des leçons du groupe 2 que nous analyserons par un aspect fondamental. Les leçons du groupe 1 sont caractérisées par l'enseignement d'une notion et comprennent une part importante d'institutionnalisation et de consolidation (exercices). Ce n'est pas le cas des leçons du groupe 2 qui consistent en activités de généralisation dont le résultat n'est pas objet d'enseignement. Dans presque toutes les leçons du groupe 1, les élèves prennent en notes dans leur cahier les règles trouvées ou des exemples qui illustrent la méthode, ce qui est rarement le cas pour le deuxième groupe de leçons. Par ailleurs, dans les leçons du groupe 2, une place plus grande est accordée aux élèves dans la résolution d'un problème et la validation se situe après que la règle ait été énoncée et non avant comme dans le groupe 1. Ces différences influenceront-elles le type de validation utilisée?

## 6.3 Groupe 2: Activités de généralisation

Huit stagiaires ont produit des leçons dans lesquelles la tâche principale des élèves est de construire une expression algébrique. Les planifications ou prestations de ces stagiaires consistent en activités de généralisation qui visent à introduire ou à familiariser les élèves avec le symbolisme et les expressions algébriques. Les activités de généralisation sont complètement articulées autour d'un problème à résoudre où l'élève est mis dans la situation de construire une formule. Dans plusieurs cas, une période de validation des formules produites par les élèves est prévue dans la planification de leçons. Cette validation arrive donc après la règle (la formule) contrairement aux activités du groupe 1 où c'est l'étape qui menait à la règle qui constituait le lieu principal de validation de cette règle. Ce groupe de huit stagiaires constitue principalement notre deuxième groupe analysé (groupe 2). Nous nous intéresserons aux moyens utilisés ou favorisés par les stagiaires pour valider les règles ou formules produites par les élèves.

Deux autres stagiaires (Denis et Paul) ont produit des leçons apparentées à celles des huit premiers stagiaires mais portant sur des contenus différents. Les leçons de Paul visent la construction de l'équation d'une fonction linéaire et son enseignement en troisième secondaire. Le traitement qu'il fait de cette notion est comparable à celui fait pour les activités de généralisation des huit premiers stagiaires. Les leçons de Denis visent à travailler les relations de comparaison entre les grandeurs en préparation à la résolution de problèmes dits algébriques. Les leçons mènent à la production d'une expression algébrique et Denis a prévu chacune des étapes y menant; la tâche n'est pas laissée aux élèves. Nous utiliserons les leçons de ces deux stagiaires en complément d'analyse. L'analyse principale concernera les activités de généralisation des huit stagiaires dont nous avons préalablement parlé.

Dans les sections qui suivent, nous présenterons les intentions du programme, des manuels et de ces huit stagiaires (§6.3.1), ce qui nous permettra de situer leur projet personnel. Nous décrirons ensuite (§6.3.2), de manière globale, les activités d'apprentissage et le déroulement des leçons pour situer les moments de validation et amorcer l'analyse des fonctions de la validation. Nous avons retenu cinq stagiaires pour lesquels nous ferons l'analyse complète de leurs planifications et prestations de leçons de manière à déterminer plus finement les fonctions de la validation (§6.3.3). Puis, nous ferons quelques observations complémentaires à partir des leçons des deux autres stagiaires du groupe 2, mais aussi à partir de quelques leçons des huit premiers stagiaires touchant d'autres notions telles la comparaison d'expressions algébriques, le domaine d'une variable, la valeur numérique d'une expression algébrique et les suites (§6.3.4). En conclusion de l'analyse des leçons du groupe 2 (§6.3.5), nous ferons le bilan de nos résultats.

Pour réaliser l'analyse, nous disposons des planifications de leçons de dix stagiaires. Nous disposons aussi d'une prestation de leçons pour sept stagiaires. Le tableau VII, ci-dessous, résume les données recueillies ou disponibles. Nous indiquons entre parenthèses le nombre de leçons consécutives autour du thème traité.

| STAGIAIRE | STAGE[56] | NIVEAU | THÈME DES PLANIFICATIONS | THÈME DES PRESTATIONS |
|---|---|---|---|---|
| Alain | 1er | 2e sec. | Familiarisation avec les expressions algébriques (3) | Domaine d'une variable et valeur numérique d'une expression algébrique |
| Brigitte | 1er | 1ère sec. | Introduction aux suites et au symbolisme (3) | Activité de généralisation |
| Ginette | 1er | 1ère sec. | Introduction aux suites et au symbolisme (3) | Activité de généralisation |
| Marcel | 1er | 1ère sec. | Introduction aux suites et au symbolisme (3) | Activité de généralisation |
| Tim | 1er | 2e sec. | Familiarisation avec les expressions algébriques (3) | Domaine d'une variable et valeur numérique d'une expression algébrique (avec au début production d'une formule) |
| Blanche | 2e | 2e sec. | Familiarisation avec les expressions algébriques (6) | Prestation appartenant au groupe 1 de leçons (§6.2) |
| Cécile | 2e | 2e sec. | Familiarisation avec les expressions algébriques (6) | Prestation appartenant au groupe 1 de leçons (§6.2) |
| Lucette | 2e | 1ère sec. | Pas en algèbre | Activité de généralisation |
| En complément seulement: | | | | |
| Denis | 1er | 2e sec. | Résolution de problèmes (3) | Expression de relations de comparaison entre grandeurs (par exemple: 5 de plus que; 3 fois plus que) |
| Paul | 1er | 3e sec. | Introduction aux fonctions linéaires (3) | Non disponible |

**Tableau VII:** Thèmes des planifications et prestations des leçons du groupe 2

### 6.3.1 Les intentions des stagiaires et le contexte d'enseignement

Pour situer les intentions des stagiaires, nous procéderons en quatre étapes; nous présenterons a) les objectifs du programme, b) les intentions que formulent les stagiaires dans leurs planifications de leçons, c) les intentions du manuel utilisé par

[56] Il s'agit ici de stages en enseignement des mathématiques seulement.

plusieurs stagiaires d'après le guide d'enseignement qui accompagne ce manuel et d) les lignes directrices du cours de didactique de l'algèbre que tous ont suivi.

**a. Les objectifs du programme**

Nous situerons d'abord les objectifs des stagiaires exprimés dans leurs planifications de leçons par rapport aux objectifs du programme.

En première secondaire, le programme d'études a comme objectif général de "*favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre*". Entre autres, dans l'objectif général 1 (p. 23), ce programme précise que "*toutes les propriétés et règles qui peuvent se généraliser facilement devraient être des prétextes pour amener l'élève à utiliser le langage algébrique*". Certains objectifs intermédiaires sont identifiés dans ce but spécifique; citons, parmi d'autres, les objectifs suivants: *exprimer en ses propres mots la règle liant un nombre et son rang dans une suite, exprimer en langage symbolique la règle liant un nombre et son rang dans une suite; utiliser la règle (...) pour trouver soit le nombre occupant un certain rang dans la suite, soit le rang d'un nombre appartenant à la suite*" (id. p. 27).

C'est en deuxième secondaire que l'algèbre est officiellement introduite avec comme objectif général de "*favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes*" (Programme d'études, sec. 2, p. 23). Les leçons du groupe 2 que nous analyserons relèvent surtout de l'objectif terminal suivant: ***effectuer des transferts de représentations d'une situation donnée.*** Dans la présentation de cet objectif (Id. p. 24), le programme souligne que "*l'élève développera son sens de l'observation, son esprit critique et son habileté à synthétiser une situation. L'élève doit progressivement devenir apte à élaborer un raisonnement inductif ou déductif.*" Dans les manuels et dans les leçons des stagiaires, nous trouvons quelques occasions de travailler ces aspects, nous y accorderons une attention particulière. Les objectifs intermédiaires traduisent les habiletés que les stagiaires travaillent dans leurs leçons; retenons ceux qui sont le plus près des objectifs d'apprentissage traités par les stagiaires: *exprimer en ses propres mots ou par un dessin les relations qui existent entre les données d'un problème; décrire globalement une situation représentée par une table de valeurs; représenter une situation par une table de valeurs et traduire un énoncé de problèmesà l'aide d'une équation* (Id. p. 25).

Le contexte dans lequel s'effectuent les activités de généralisation des stagiaires peut influencer leur traitement: contexte de suites en préparation à l'algèbre, en 1$^{ère}$ secondaire, introduction à un langage en 2$^{e}$ secondaire. Les intentions générales, formulées par les stagiaires de 1$^{ère}$ secondaire, sont teintées de l'objectif général du programme d'études quant à l'introduction à l'algèbre et des objectifs intermédiaires du même programme concernant les suites. Les stagiaires se centrent parfois sur les premiers et parfois sur les seconds.

Dans des leçons sur les suites, en première secondaire, Ginette propose aux élèves une activité de généralisation comme première situation d'apprentissage. Dans ses planifications de leçons, elle formule clairement un objectif relié à l'introduction de l'algèbre.

> "*Intentions: Dans cette leçon, nous ferons une introduction du symbolisme et des conventions d'écriture en algèbre. Cette activité aidera les élèves à donner du sens aux lettres et aux formules. (...) Après ce cours, j'aimerais que les élèves commencent à voir la pertinence du passage à l'algèbre. Cette leçon aidera à éviter les conceptions...* [expressions non achevées, lettre objet, lettre qui représente une seule valeur]. *Ils développeront les habiletés et raisonnements suivants: construire des messages (...) pour ensuite les symboliser. Ils travailleront sur la signification de leurs messages, le sens des lettres, le sens de la formule*"

Nous verrons plus loin que dans ses planifications, le travail sur les suites s'articule sur cette première activité de généralisation. Brigitte adopte une approche semblable à celle de Ginette.

Marcel, aussi en première secondaire, présente également à ses élèves une activité de généralisation. Toutefois cette activité suit une leçon sur les suites numériques. Les objectifs de ce stagiaire sont formulés uniquement en termes de "suites":

> "*Les connaissances que l'on veut faire acquérir, les raisonnements à favoriser, les habiletés ou aptitudes à développer:*
> *- Comprendre le concept de suite;*
> *- Les élèves doivent être en mesure de généraliser la situation problème pour en déduire la règle qui lie le nombre et son rang dans une suite:*
> *-dans leurs propres mots*
> *-en langage mathématique.*
> *- Être capable d'utiliser la règle liant le terme et le rang pour trouver le terme si on leur donne le rang, ou le rang si on leur donne le terme.*
> *- Rendre les élèves plus habiles à repérer la régularité dans différentes situations. Ex.: - Des suites de nombres - Des suites de petits points - Des suites de cubes - Etc...*
> *- Faire accepter à l'élève qu'une lettre peut prendre deux valeurs différentes et que deux lettres différentes peuvent avoir la même valeur.*
> *- Les élèves doivent savoir et accepter que le signe "égal" indique une équivalence.*"

Nous pouvons nous demander si cette orientation aura une influence sur la validation, puisque le travail sur les suites numériques peut amplifier le recours aux exemples numériques comme argumentation de validation.

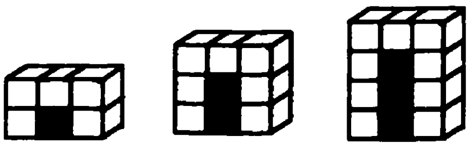
**b. Les intentions des stagiaires**

Comme pour le groupe 1, les stagiaires du groupe 2 se positionnent par rapport à l'enseignement de l'algèbre. Alain, aussi dans le groupe 1, affirme dans l'analyse du concept qui accompagne les planifications de leçons que *"La compréhension doit être basée sur la logique et le sens et non sur les règles descendues du ciel!* Dans son analyse du concept, Tim indique: *"Je ne veux pas enseigner une algèbre procédurale, mais je veux faire découvrir aux élèves une algèbre basée sur la compréhension et la logique où le bon sens devient important. (...) Il ne faut pas mettre l'emphase à manier des symboles sans signification à l'aide de règles apprises par coeur (...)"* Dans leurs planifications de leçons, Ginette dit vouloir *"donner du sens aux lettres et aux formules"*, Marcel lui veut *faire comprendre le concept de suite"*, Cécile et Blanche, aussi dans le groupe 1, parlent de sens et de pertinence.

Notons que les formules produites par les élèves ne sont pas objet d'enseignement comme c'était le cas des règles dans le groupe 1. Les formules produites par les élèves de 1ère secondaire pourraient servir à introduire la règle permettant de trouver le terme général d'une suite arithmétique et, dans ce cas, l'activité de généralisation servirait d'étape expérimentale qui mène à cette règle, comme pour les leçons du groupe 1. Nous avons peu d'informations dans les planifications de leçons à ce sujet. Pour les leçons du groupe 2, nous avons voulu porter notre attention sur la validation des formules produites par les élèves plutôt que la validation d'un modèle éventuellement introduit. Si le projet de faire comprendre ces formules peut tenir, il n'a pas la même portée que pour les leçons du groupe 1. Ici, nous nous intéressons surtout à la manière dont les stagiaires s'y prennent pour valider ou faire valider les formules des élèves. Ainsi, comme des stagiaires annoncent aux élèves ou au lecteur, dans leurs prestations et planifications, une étape de *validation* ou de *vérification* des formules, nous avons voulu savoir quelles étaient les intentions des stagiaires tout particulièrement pour ces vérifications et validations. Nous n'avons trouvé qu'un commentaire qui éclaire sur la fonction de la validation prévue. Dans les planifications, Alain mentionne qu'il sera important de faire des classifications et de *valider chacune des méthodes*. Lors de la description de la leçon, il précise:" *il s'agira de valider leurs procédures pour être certain qu'elles fonctionnent pour tous les cas.*" En introduction à ses planifications, nous retrouvons également les recommandations du programme d'études à l'effet d'amener les élèves à *développer le sens critique* et à *élaborer un raisonnement inductif et déductif.*

**c. Les intentions du manuel**

Les stagiaires de deuxième secondaire utilisent tous le même manuel, *Carrousel mathématiques 2.* Nous avons déjà présenté dans la section 6.2.1, les intentions des auteurs du guide d'enseignement, relativement à l'algèbre. Nous y avons noté un projet de présenter une *algèbre de compréhension*, par l'intermédiaire d'activités *concrètes* et *globalisantes*, qui misent sur *le bon sens ou sur la logique de la chose, et non sur des règles dictées et répétées.* Ainsi, le guide d'enseignement souligne l'importance de travailler des situations comme celle-ci: on doit construire des tours à l'aide de cubes blancs et de cubes noirs comme le montre l'illustration ci-dessous:



Le guide commente:

> *"Il est important que l'enseignement donne l'occasion aux élèves d'explorer des situations dans lesquelles des cas déterminés sont analysés et généralisés. Cette démarche est importante dans le processus de transition du concret à la conceptualisation de la mathématique symbolique. Il importe donc de fournir un contexte dans lequel la manipulation des symboles devient une activité signifiante et réfléchie..." (Carrousel Mathématique 2, Guide d'enseignement, deuxième secondaire/* Tome 1, p. 549).

Nous retrouvons encore le projet de donner du sens qui concerne ici le symbolisme. Quant à un projet qui pourrait éclairer sur les étapes de *vérification* des stagiaires, le guide encourage d'une part la recherche de *bêtes noires* qui invalident un énoncé et, d'autre part, la considération de tous les cas possibles.

En première secondaire, les stagiaires utilisent différents documents produits dans les écoles; mais encore, *Carrousel* semble le manuel de référence. Dans le guide d'enseignement qui accompagne ce manuel, nous retrouvons les objectifs suivants:

> *"Cet itinéraire sur les suites doit être considéré comme une activité de préparation à l'algèbre. Il s'agit fondamentalement de faire vivre aux élèves une activité au cours de laquelle l'élève aura la chance d'approfondir sa compréhension des concepts de suite, de tableau de variation de rang, de règle, etc. Il s'agit également de faire mettre en pratique des processus de généralisation à partir de situations concrètes telles que des suites d'allumettes,*

*de points, de cubes, etc. La démarche a pour but de donner la chance de* ***voir*** *(observer pour percevoir), de* ***dire*** *(pour former les concepts), de* ***symboliser*** *(généraliser) et d'****appliquer****."*

Il n'y a pas de projet de validation de formulé. Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous avons fait l'analyse des sections des manuels de première secondaire portant sur les suites. Nous avons conclu que dans les manuels les plus utilisés dans les écoles, dont *Carrousel*, l'accent est mis bien plus sur la construction de tables de valeurs, le recours à un modèle connu (ax+b) pour trouver le terme général de la suite et l'utilisation des formules qu'à la construction des modèles ou des formules.

**d. Les lignes directrices du cours de didactique de l'algèbre**

Dans le cours de didactique de l'algèbre que tous les stagiaires ont suivi, des situations de généralisation, comme on en trouve dans le manuel ou dans les leçons des stagiaires, sont utilisées. Globalement, l'objectif est d'abord de donner du sens et de la pertinence aux expressions algébriques en plaçant les élèves dans une situation où ils auront eux-mêmes à produire des formules. C'est l'objectif que plusieurs stagiaires reprennent. Dans le cours, un scénario de leçons est envisagé où les formules produites sont discutées et validées dans le contexte du problème à partir d'une illustration qui joue le rôle d'exemple générique. De plus, on y envisage de comparer les messages et d'expliquer leur équivalence en s'appuyant sur la figure. Les stagiaires se sont inspirés fortement de ce qui a été fait dans le cours de didactique.

### 6.3.2 Lieux de validation

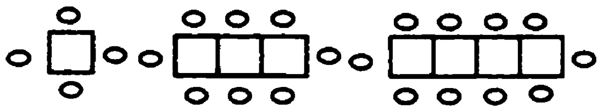
Nous analysons maintenant les planifications et prestations de leçons des huit stagiaires qui ont utilisé une activité de généralisation conduisant à la production d'une ou de plusieurs formules par les élèves. Nous présenterons d'abord (a) des exemples des problèmes de départ utilisés par les stagiaires, suivis (b et c) des schémas d'organisation de l'activité de généralisation et des planifications dans leur ensemble. Comme pour le groupe 1, nous avons découpé les planifications et prestations en étapes de manière à schématiser l'organisation des activités dans le temps. Pour les leçons du groupe 2, nous ferons deux types de schémas: un premier schéma montrant l'organisation de l'activité de généralisation, elle-même (b) et un deuxième type de schémas montrant comment cette activité s'articule avec les autres activités de l'ensemble des leçons (c).

Le schéma d'organisation de l'activité (b) sert à situer les endroits dans l'activité qui sont davantage porteurs de validation. C'est par l'analyse des activités d'enseignement et des relations entre les parties du schéma que nous préciserons la fonction de la validation et ce à la section suivante (§6.3.3). Le schéma d'organisation des planifications (c) nous servira à mieux cerner le rôle de l'activité de généralisation dans l'ensemble des leçons.

**a. Les problèmes de départ**

L'activité de généralisation consiste à faire construire aux élèves une expression algébrique qui rend compte d'une régularité ou des relations entre les grandeurs. Le problème de Ginette est représentatif de la majorité des problèmes présentés dans ces leçons. Nous l'appellerons le problème des Tables. Quatre autres stagiaires utilisent ce problème dans une formulation plus ou moins semblable.

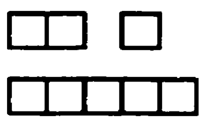
*"François doit préparer des tables dans le restaurant. Il cherche un moyen pour trouver rapidement, pour n'importe quelle quantité de tables juxtaposées, le nombre de personnes qu'il pourra asseoir autour d'une table."*



**Ginette, sec. 1:** le problème des Tables (planification et prestation).

Dans les problèmes, nous retrouvons différents autres patterns autour desquels sont construites des histoires. La tâche à réaliser consiste à trouver une manière de compter rapidement. Le problème de l'Hôtel qui suit en est un autre exemple.

*"Jean ...est ingénieur. Avec son équipe, il doit terminer l'étage d'un hôtel. Sachant que toutes les chambres sont identiques et juxtaposées et que les travailleurs construisent une chambre par jour, écris une formule nous permettant de savoir combien de murs ils ont élevés. Il y a 4 murs par chambre. Le message [57]doit être valable pour chaque jour.*



**Tim, sec. 2:** problème de l'Hôtel (planification et prestation)

[57]Plusieurs stagiaires utilisent messages au lieu de formules, à la suite du cours de didactique de l'algèbre. Il s'agit d'envoyer un message à quelqu'un exprimant comment faire pour calculer.

L'énoncé des problèmes est parfois teinté du contexte d'enseignement (ici les suites) comme l'indiquent les parties que nous avons soulignées dans l'exemple suivant:

> *"Mon oncle Guy est propriétaire d'un restaurant. Il cherche une façon plus efficace et rapide de compter le nombre de chaises autour d'un agencement de tables. Sa méthode habituelle consiste à les compter une par une. Les tables sont toujours disposées en lignes droites et collées les unes aux autres. Elles ne forment jamais de "L" ou de "T".*
> *Tu dois aider mon oncle en lui donnant une méthode pour compter le nombre de chaises qu'il y a si on connaît le nombre de tables. Cette méthode doit être formulée de façon claire et précise. De plus, le message ne doit pas être trop long pour ne pas mélanger mon oncle.*
>
> *"Voici un dessin qui représente la situation.*
> *<u>Exprime en tes propres mots la règle liant un nombre (nombre de chaises) et son rang (nombre de tables) dans cette suite.</u>*
> *Combien de chaises y aura-t-il autour d'un agencement de 39 tables?*
> *<u>Exprime en langage symbolique la règle que tu as énoncée plus haut.</u>*
> *Calcule combien il y aura de chaises autour d'un agencement de 92 tables.*

**Marcel, sec. 1:** le <u>problème des Tables</u> (prestation et amélioration).

Lors des prestations, la présentation du problème se fait avec plus ou moins d'efficacité selon les stagiaires, mais certaines caractéristiques sont constantes. Pour aider les élèves, les stagiaires conseillent d'utiliser des exemples numériques. Ils utilisent dans leur discours plusieurs nombres et recourent à quelques grands nombres vraisemblablement pour obliger les élèves à s'éloigner d'une procédure de comptage. Pour ces problèmes, tous les stagiaires proposent des dessins ou une représentation matérielle; par exemple, Lucette utilise des cure-dents pour construire une frise de triangles.

En première secondaire, certains stagiaires conseillent d'observer la régularité et signalent aux élèves qu'il s'agit d'une suite (Lucette, Marcel); mais si les élèves utilisent cet indice, celui-ci n'apparaît pas dans l'argumentation qu'ils font pour expliquer leur formule.

Brigitte, quant à elle, prépare les élèves à la résolution du <u>problème des Tables</u>, en résolvant avec eux un problème plus simple:

> *"Hier je suis allée au magasin Léon. Vous connaissez le magasin Léon? (...) Je voulais acheter des chaises pour chez-moi. Chaque chaise coûtait 15$. Mon auto est petite alors j'ai demandé si le magasin livrait... Combien ça coûte pour livrer? Ils m'ont répondu que la livraison était de 20$, peu importe le nombre de*

| |
|---|
| *chaises que j'achetais. (...) Comment je fais pour savoir combien je vais payer si j'achète un certain nombre de chaises?"* |

**Brigitte, sec. 1: le problème de Léon (planification)**

Lors des prestations, nous voyons que les stagiaires prennent généralement beaucoup de temps à expliquer. Bien qu'ils aient décidé d'utiliser cette situation en classe, ils semblent sous-estimer les élèves. Ils ont peut-être également peur de perdre le contrôle, d'échouer, comme le mentionne Brigitte dans la planification améliorée: *"Je pensais, au début, éliminer l'activité des tables et des cure-dents pour mon groupe de 34 élèves, pensant que je ne pourrais les contrôler."*

Les stagiaires ont peur de perdre le contrôle pour diverses raisons: ils en sont à leur première expérience de gestion de groupe: les stagiaires éprouvent souvent des problèmes de discipline (on l'observe en particulier chez Marcel, Lucette, Ginette); les élèves ne sont pas habitués de travailler sans qu'on leur donne au départ une méthode à suivre et, enfin, cette leçon est évaluée par un observateur de l'université. Comme nous le voyons dans l'extrait qui suit, Ginette va jusqu'à donner presque la réponse, vraisemblablement parce qu'elle manque de confiance en elle-même et envers les élèves.

Extrait de Ginette, sec. 1: présentation du problème des Tables (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| La stagiaire distribue une feuille. C'est bruyant. Elle donne un signal en fermant et ouvrant l'interrupteur des lumières. | |
| *Vous vous taisez. Je vais vous expliquer, sinon vous allez rien comprendre. Si vous comprenez* (inaudible). | |
| Le problème est écrit sur transparent. Elle lit le problème et pose la question: *C'est quoi des tables juxtaposées?* | E: [inaudible] |
| *...au début il y a une table avec 4 personnes si on en colle 2 tables, on peut en asseoir combien?* | E: *8*<br>E: *6*<br>Es: *6* |
| *et ainsi de suite. C'est ça des tables juxtaposées, c'est-à-dire qu'on en colle plusieurs.* | E: *Ça veut dire une table c'est pas juxtaposée.* |

Exemples

| | | |
|---|---|---|
| *Vous devez trouver un message... Le message symbolisé, on n'y touche pas. Un message en mots... comme si vous écriviez une lettre... rapidement si on a 50 tables... S'il y en a qui pensent avoir trouvé, vous venez me le dire.*<br><br>*pas juste pour 50 tables.* | E: [inaudible]<br><br>Les élèves travaillent. | grand nombre |
| Elle interrompt le travail ce qui semble ne pas faire l'affaire de certains. | | |
| *Il y en a qui comprennent pas alors je réexplique une autre fois.* Elle reprend le problème... *S'il colle 2 tables, combien...*<br><br>*Mais s'il en colle 15, 20 ...il faut trouver une technique comme 2 fois le nombre de tables et na, na, na. Tu trouves une technique rapide pour qu'il soit capable de trouver, en fonction du nombre de tables, combien il peut asseoir de personnes Vous comprenez là. Vous écrivez en mots, comme une lettre.* [Inaudible.] | E: *6*<br><br>Les élèves travaillent. | Elle se justifie, donne presque la réponse. |

Les problèmes sont intéressants pour plusieurs raisons. Pour le problème des Tables par exemple, comme l'élève doit trouver un moyen qui fonctionne pour n'importe quel nombre de tables, il peut être amené à s'expliquer sur la généralité du moyen trouvé. De plus, des formules fausses pourront à l'occasion être produites et il faudra alors les rejeter. Dans les leçons, nous identifions clairement des moments de validation que le schéma d'organisation de l'activité de généralisation permet de situer.

### b. Schéma d'organisation de l'activité de généralisation

Le schéma d'organisation de l'activité de généralisation concerne uniquement cette activité, dans les planifications et dans les prestations. C'est un schéma de base qui caractérise l'ensemble des activités des huit stagiaires. Il est présenté ci-dessous (figure 28).

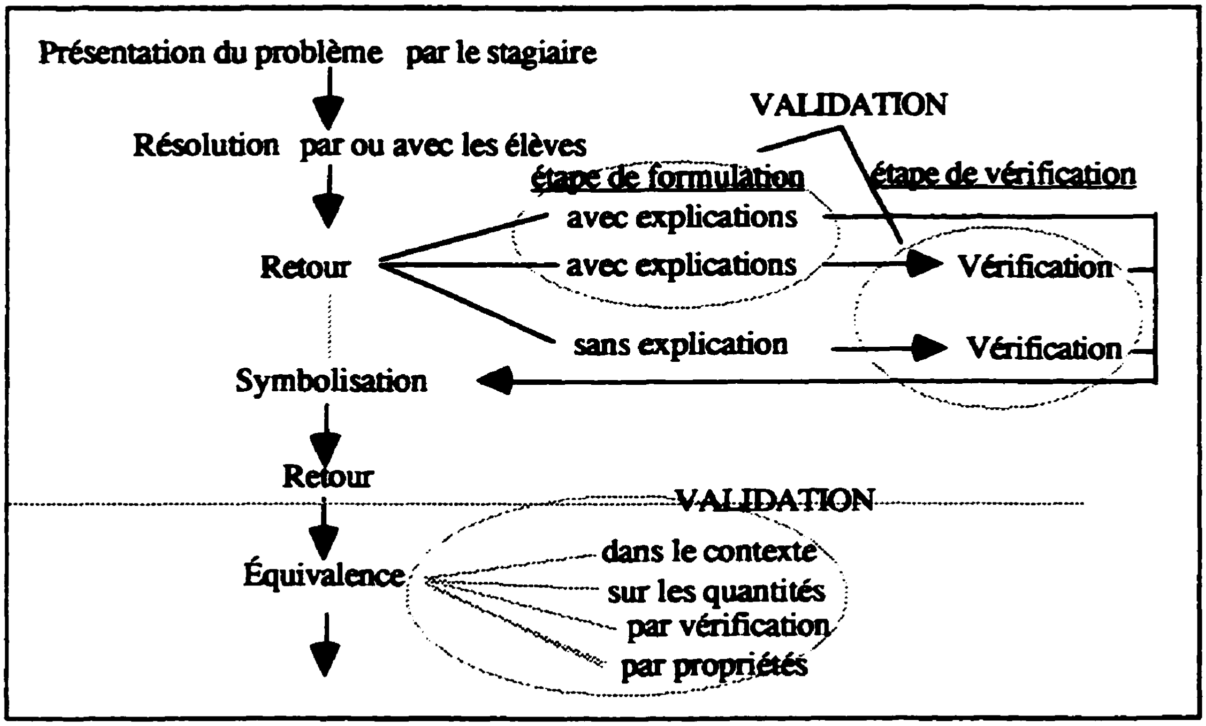



**Figure 28** : Groupe 2, schéma d'organisation de l'activité de généralisation

Le schéma de base se résume comme suit: le problème est présenté aux élèves par le stagiaire et les élèves le résolvent en équipe, sauf dans le cas de Tim qui gère une résolution en grand groupe (toute la classe). Les formules sont d'abord exprimées en mots (messages). Une fois le problème résolu par les élèves, les stagiaires reviennent sur les formules produites. Celles-ci sont ensuite symbolisées. Cette symbolisation peut se faire plus ou moins en même temps que la production des formules en mots lorsque les élèves sont familiers avec les symboles algébriques. L'équivalence des formules n'est pas traitée dans tous les cas. Notons que l'activité de généralisation couvre généralement au moins une période complète.

Dans ce schéma, nous identifions trois lieux de validation: 1) lors de la formulation des messages, lorsque les élèves donnent leurs formules et les expliquent; 2) après la formulation, lors d'une étape subséquente appelée *validation* ou *vérification*; et 3) lors de la discussion sur l'équivalence des formules. Dans le deuxième cas, la validation est explicite, c'est-à-dire annoncée comme telle dans les planifications et lors des prestations. Dans le premier cas, elle est implicite. Dans le troisième, elle est parfois implicite et parfois explicite. À chacun de ces trois lieux de validation correspondent des arguments de validation différents.

1. Étapes de formulation: validation implicite en référence au contexte

Pour tous les stagiaires, la période de résolution est suivie d'un retour sur les formules, mais cette période de retour ne se déroule pas toujours de la même façon. Certains stagiaires ont prévu faire expliquer les formules par les élèves et les expliquent parfois à leur tour. D'autres ne sollicitent pas les élèves dans ce sens, mais les élèves ne se contentent pas de donner leurs formules, ils les expliquent spontanément.

Dans les planification et prestation de Ginette[58] et dans les prestations de Lucette et Marcel, la période de formulation est accompagnée de l'explication par les élèves de leurs formules. Les élèves expliquent comment ils ont construit leur formule en se référant au contexte (tables, triangles ou autres); dans la prestation de Marcel, un élève dit: "*nombre de tables fois 2 parce que 2 tables de chaque côté plus 2 parce que tout le temps une de chaque côté.*"

Parfois ce sont les stagiaires qui expliquent. Lors de sa prestation, Ginette explique: "*Si on met 4 personnes par table, à chaque fois qu'on rajoute une nouvelle table, on enlève 2 places. Vous comprenez? Donc tu mets 4 personnes par table moins 2 à chaque table ajoutée.*"

Ces explications dans le contexte s'appuient sur les propriétés générales de la situation et, dans ce sens, pourraient constituer une preuve de la validité de la formule. Il n'est pas sûr toutefois que les stagiaires y reconnaissent la possibilité d'une preuve ni même lui accordent un statut de validation. Il s'agit donc d'un lieu de validation implicite.

Notons qu'ici, nous n'avons pas noté de différences dans les comportements des élèves selon que les consignes étaient formulées avec une connotation "suite" ou non. Il semble que les élèves aient résolu le problème dans le contexte sans chercher à faire de tables de valeurs et à raisonner sur l'écart constant entre deux termes.

2. Vérification ou validation après l'étape de formulation: validation explicite surtout à l'aide d'exemples

Après la formulation des messages, dans leurs planifications ou prestations, Alain, Brigitte, Lucette, Marcel et Tim annoncent une *vérification* ou *validation* des formules. Puisque ces *vérifications* sont annoncées, nous qualifions la validation d'explicite. Leur fonction est à première vue de vérifier si les messages sont bons ou

[58]Nous donnons en exemple les cas les plus clairs. En effet, certaines planifications sont moins explicites que d'autres.

s'ils *fonctionnent*. Dans tous les cas, sauf dans la planification d'Alain, cette étape de vérification donne lieu à des vérifications sur des exemples.

i) Validation par vérification de la réponse

Dans les prestations de Marcel et Tim la vérification consiste à comparer la réponse obtenue à l'aide de la formule avec la réponse obtenue autrement. Par exemple, pour le problème de l'Hôtel présenté en (a) consistant à déterminer le nombre de murs montés après un certain nombre de jours, un élève trouve la formule 3n+1; Tim dit alors: *"On va regarder si ça fonctionne. La première journée il y en a 4. 3×1+1, 4. La deuxième, il y en a 7. 3×2+1, 7."* Tim regarde sur le dessin et constate (de visu) combien de murs il y a. Ensuite, il effectue le calcul pour vérifier si le calcul donne bien la bonne réponse.

ii) Validation par application de la formule

Dans les planifications de Marcel et dans la prestation de Brigitte, des exemples sont également utilisés mais leur portée est différente. Les exemples ont davantage une valeur générique comme le montre l'extrait suivant de la planification de Marcel.

> M: *Vérifions maintenant si le premier message fonctionne. Mathieu est-ce que ça marche pour une table.*
> E: *Oui, parce qu'on a 2 fois le nombre de tables donc 2×1, ça donne 2. Puis on additionne 2, ça donne 2+2=4.*
> M: *C'est bien! Maintenant, si on a 4 tables?*
> E: *J'ai 4 tables avec 2 chaises pour chacune d'elles, ça me donne 8, j'additionne les 2 chaises aux extrémités, ça me donne 10.*
> M: *Si j'ai 25 tables, combien vais-je avoir de chaises? Oui Jean-Marc!*
> E: *J'en ai 52! J'ai 2 chaises pour chaque table plus une à chaque bout ce qui me donne 52.*

Dans le premier cas, celui de Tim, il ne s'agissait que de vérifier si on obtenait bien la bonne réponse. Dans le deuxième cas, celui de Marcel, les exemples s'appuient sur les propriétés généralisables de la situation et l'accent n'est pas sur la réponse mais sur le moyen d'y arriver. On ne vérifie pas la même chose dans les deux cas. Nous élaborerons sur cet aspect dans la section 6.3.3.

iii) Validation en s'appuyant sur les propriétés de la figure

Dans sa planification, lors du retour sur les formules, Alain prévoit une étape d'éclaircissement des formules suivie d'une étape de validation qui repose sur les propriétés du contexte.

*"Je prends les réponses d'élèves, je discute avec eux pour rendre plus clair leur énoncé et qu'ainsi tout le monde comprenne bien ce qu'ils veulent bien dire. Ensuite, il s'agira de valider leurs procédures pour être certain qu'elles fonctionnent pour tous les cas (un carré aura toujours quatre côtés congrus!)."*

Alain utilise un problème semblable à celui des fenêtres carrées (question 3 de l'entrevue de la pré-expérimentation, chapitre 4). Alain est le seul à préciser dans ses commentaires sur quoi s'appuiera la validation. Ici il utilise les propriétés de la figure (un carré aura quatre côtés congrus).

3. Justification de l'équivalence des formules: recours à divers arguments

Dans leurs planifications, Brigitte, Ginette et Marcel prévoient discuter avec les élèves de l'équivalence des différentes formules produites. À ce moment, trois types d'arguments sont utilisés: la validation s'appuie ou bien sur le sens des opérations, ou bien sur les propriétés des opérations, ou bien sur le contexte.

i) Validation qui s'appuie sur le sens des opérations

À propos du problème des Tables, Brigitte explicite dans sa planification le passage de la formule $4+2\times(n-1)$ à la formule $(n+1)\times2$ en décomposant la première en $2+2+2\times(n-1)$ pour faire voir que le nombre de 2 reste le même. La justification de Brigitte s'appuie sur le sens des opérations pour constater qu'on a dénombré le même nombre de personnes, dans les deux cas:

*"Je prends l'exemple des formules: $4+2\times(nt-1)$ et $(nt+1)\times2$*
*Est-ce que je peux dire que 4 c'est $2+2$? Affirmatif. Donc je vais écrire la formule comme $(2+2)+2\times(nt-1)$.*
*Je leur fais voir que c'est autant de fois 2 que la formule $(nt+1)\times2$ et donc que l'on peut dire qu'utiliser l'une ou l'autre c'est pareil."*

ii) Validation qui s'appuie sur les propriétés des opérations

Dans sa planification, Ginette dit explicitement vouloir utiliser les propriétés des opérations.

*"Je montre l'équivalence des messages symboliques en utilisant une bonne verbalisation. De plus, je justifie cette équivalence en utilisant les propriétés des opérations car ceci leur fera un petit rappel."*

iii) Validation qui s'appuie sur le contexte

Aussi à propos du problème des Tables, dans sa planification et dans sa prestation, Marcel montre l'équivalence des formules 2n + 2 et 2(n+1) en s'appuyant sur la manière dont le dénombrement a été effectué dans le contexte:

> *"Les deux associent deux chaises à chaque table. La seule différence est que l'on ne compte pas les deux chaises situées aux extrémités de la même façon. Dans un cas on les additionne après avoir compté les chaises de chaque côté du regroupement de tables. Dans l'autre, on les compte comme étant une autre table."*

Cet extrait est tiré de sa planification.

Dans une de ses planifications, Cécile aussi parle d'équivalence. L'explication ou la vérification qu'elle envisage est toutefois fort différente des justifications des trois autres.

iv) Vérification par la réponse

Cécile prévoit montrer l'équivalence des formules en les remplaçant par une valeur.

> *"Si j'ai le temps, j'aimerais faire ressortir 2 expressions algébriques différentes et travailler l'équivalence avec les élèves en remplaçant la variable par une même valeur. Je désignerai l'équivalence par le signe d'égalité entre les deux expressions pour amorcer l'équivalence entre deux quantités (très utile pour la résolution d'équations)."*

Nous retrouvons ce type de vérification aussi dans une des prestations de Bernadette analysée à la section 6.2.4, et lors d'activités de comparaison d'expressions algébriques dans les planification et prestation d'Alain, que nous analyserons en 6.3.4.

Nous notons que les justifications sont diverses. Celles de Brigitte, Marcel et Ginette expliquent le passage d'une formule à une autre équivalente. Celles de Cécile et Bernadette consistent à constater une même réponse lorsque chacune des formules est appliquée à un même nombre.

Dans le groupe de leçons que nous analysons ici, plusieurs stagiaires recourent, à un moment ou l'autre, à des exemples particuliers, sans valeur générique, pour *vérifier* une formule ou justifier un énoncé. Ces vérifications ne sont toutefois pas toutes semblables. Certaines sont inacceptables pour vérifier la généralité d'une formule ou d'un énoncé, d'autres pourraient avoir une valeur générique. Nous pouvons penser que pour les stagiaires quelques exemples suffisent et qu'ils manifestent alors une conception inadéquate déjà répertoriée dans la littérature. Nous avons préféré nous interroger sur d'autres fonctions possibles de ces vérifications: comment servent-elles l'activité de généralisation et quel rôle joue-t-elle dans le déroulement de la leçon. Notre analyse révèle des différences selon les stagiaires qui nécessite que nous présentions des analyses de cas complètes que nous réservons pour la section 6.3.3. Avant, voyons le schéma d'organisation des planifications dans leur ensemble.

**c. Schémas d'organisation de l'ensemble des planifications.**

Le schéma d'organisation de l'ensemble des planifications situe l'activité de généralisation dans la séquence d'activités qui ont fait l'objet d'une planification par les stagiaires. Nous illustrerons cette organisation par deux exemples en première secondaire et un exemple en deuxième secondaire.

Les deux premiers schémas (figures 29 et 30, qui suivent) donnent le déroulement prévu par Marcel et Ginette, pour trois leçons consécutives en première secondaire. Bien que les deux stagiaires introduisent tous les deux les suites numériques, nous constatons un déroulement différent déterminé sans doute par les deux orientations différentes qui apparaissent dans le projet des stagiaires (§6.3.1): préparation à l'algèbre chez Ginette et enseignement des suites chez Marcel.

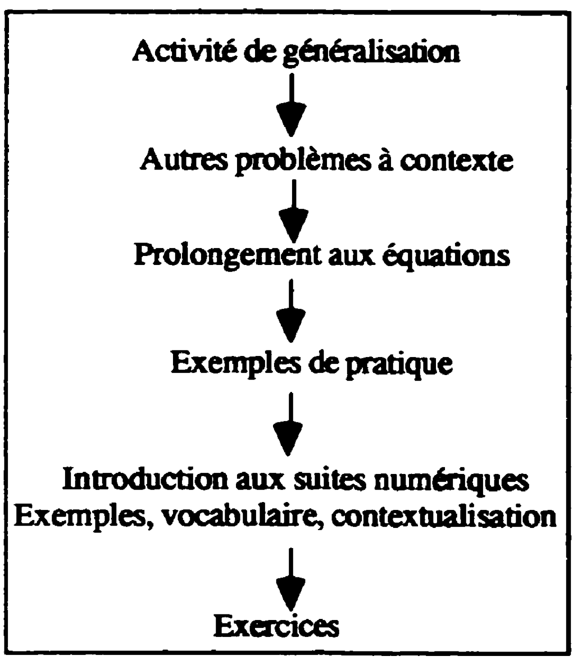



Figure 29: Schéma de Ginette, orientation "préparation à l'algèbre"

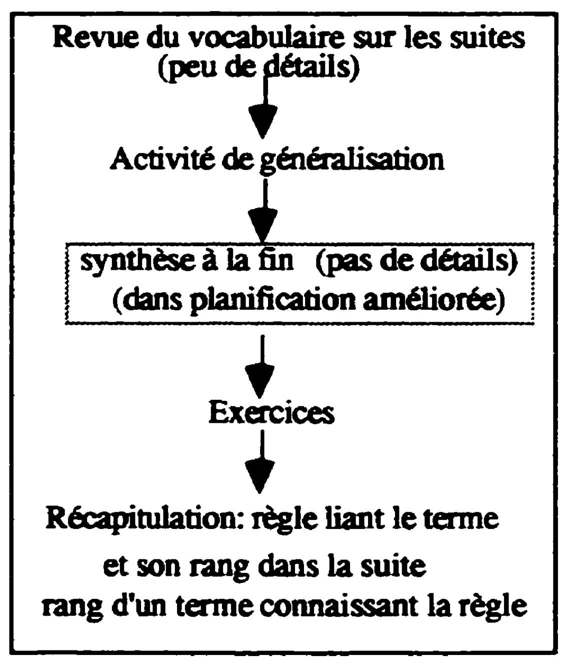



Figure 30: Schéma de Marcel. orientation "enseignement des suites".

Lorsque Marcel présente aux élèves l'activité de généralisation avec le <u>problème des Tables</u>, il a déjà introduit un vocabulaire "suites" (rang, terme, écart) et les élèves se sont exercés à découvrir la régularité (écart constant entre les termes) dans la suite qui est généralement une suite arithmétique. Dans sa prestation, la formulation des consignes du problème de l'activité de généralisation emprunte un vocabulaire propre aux suites numériques comme nous l'avons vu en (a). Chez Marcel, l'activité de généralisation telle que réalisée (contextualisée avec illustration) apparaît isolée et finalement mal intégrée. La fonction de cette activité semble être de préparer les élèves à la recherche du terme général d'une suite numérique. Cependant si c'est le cas, l'articulation n'est pas planifiée. Dans la planification rien n'est précisé quant à la manière dont sera récupérée l'activité de généralisation. C'est comme si le stagiaire avait importé du cours de didactique une leçon sans l'intégrer au reste du travail. Dans la planification améliorée, la synthèse a peut-être ce rôle; le stagiaire précise seulement qu'il fera un retour sur les notions vues dans le cours. Nous pouvons penser que ces notions concernent les suites arithmétiques.

Ginette, elle, démarre ses leçons directement avec une activité de généralisation telle que décrite en (a) et (b). Celle-ci servira à donner du sens au travail sur les suites qui sera fait subséquemment. Ses explications serviront à recontextualiser les suites numériques. Pour la suite 5, 7, 9, 11, ..., elle pourra dire *"Chaque semaine, je vous donne 2$. En regardant la suite, on constate que la première semaine, vous avez 5$"*. Dans des exercices, différentes suites numériques devront être décrites de manière semblable par les élèves.

En deuxième secondaire, les activités de généralisation telle celle décrite en (a) et (b) sont utilisées au début de l'enseignement de l'algèbre, avant le calcul algébrique, dans le manuel utilisé et dans les planifications des stagiaires, en particulier dans celles de Tim dont nous donnons le schéma d'organisation ci-après (figure 31). L'activité de départ et d'autres semblables seront récupérées pour introduire par exemple, le vocabulaire algébrique, le domaine d'une variable, la valeur numérique d'une expression algébrique. De façon plus globale, dans les planifications de Tim, Blanche et Cécile, l'activité est la première de plusieurs autres permettant de travailler à traduire algébriquement les relations d'un problème et à donner du sens et de la pertinence aux expressions algébriques via différents contextes où l'élève doit construire et utiliser des expressions algébriques.

Activité de généralisation

↓

Vocabulaire algébrique (à noter) + Exercices (Vocabulaire et traduction)

↓

Calcul mental

↓

Divers problèmes de traduction et de généralisation + exercices

↓

Priorité des opérations (à noter) et calcul mental

↓

Domaine d'une variable à partir d'un problème semblable à celui de la 1ère activité de généralisation

↓

Valeur numérique d'une expression + exercices

↓

Exercices de comparaison d'expressions

**Figure 31: Schéma de Tim, orientation "enseignement de l'algèbre"**

En première secondaire, il se peut que l'objectif de l'activité de généralisation soit d'introduire la règle pour trouver le terme général d'une suite arithmétique comme le laissent supposer les planifications d'Alain. Cependant, ses planifications et prestations de leçons ne sont pas claires à ce sujet. Nous nous sommes plutôt concentrée sur la validation des formules des élèves. En deuxième secondaire, il est clair que tel n'est pas le but. Les activités de généralisation servent à introduire l'algèbre avec ses conventions d'écriture, son vocabulaire et différentes autres notions telle le domaine d'une variable. Il se peut que le contexte dans lequel est présentée l'activité de généralisation et les autres activités que nous analysons (équivalence et comparaison d'expressions algébriques) orientent les interventions du stagiaire. Nous en tiendrons donc compte dans l'analyse.

Dans la prochaine section, nous ferons l'analyse des fonctions de la validation à partir des planifications et prestations les plus explicites. Nous ferons des études de cas complètes pour cinq stagiaires parce qu'elles nous apparaissent nécessaires pour révéler les fonctions de la validation.

### 6.3.3 Fonctions de la validation

À la section précédente, nous avons identifié trois lieux de validation dans les planifications et prestations de leçons: a) lors de la formulation des messages produits par les élèves; b) après cette formulation et c) lors de la discussion sur l'équivalence des formules. La validation qui a lieu lors de l'étape de formulation est implicite et a pour fonction de **faire comprendre** comment sont construites les formules. La validation qui a lieu après l'étape de formulation des messages est explicite, c'est-à-dire qu'elle est identifiée comme telle dans les planifications. Cette validation semble avoir comme fonction de **vérifier si les formules** ***fonctionnent;*** toutefois l'analyse révèle qu'entre les stagiaires, il y a des différences significatives qui permettent de préciser cette fonction. La validation qui a lieu lors de la discussion sur l'équivalence des formules est parfois implicite, parfois non, et la fonction de cette validation est la plupart du temps de **faire comprendre** l'équivalence. Nous reprendrons maintenant chacun des lieux de validation pour mettre en évidence les fonctions dont nous venons de parler ou en déterminer de nouvelles. Nous présenterons cinq analyses de cas complètes en considérant à la fois les planifications et prestations des leçons comportant une activité de généralisation telle que décrite à la section 6.3.2.

#### 6.3.3.1. Fonction de la validation lors de la mise en commun des formules: les cas de Ginette et de Brigitte

##### a. Le cas de Ginette

Ginette est la seule a n'avoir pas ajouté à l'étape de formulation des messages une étape de validation. Les deux semblent se faire en même temps. Dans ses planifications, une fois les messages produits, elle *"demande à certains groupes de venir expliquer leur message à toute la classe."* Lors de la prestation, les messages sont récupérés au fur et à mesure qu'ils sont produits. Généralement, un élève explique de sa place et elle reprend pour la classe. Dans la planification et dans la prestation, son objectif semble bien de faire comprendre et de partager cette compréhension.

*Fonction de la validation: faire comprendre et partager cette compréhension*

L'intention de Ginette est de*"donner un sens aux lettres et aux formules."* Pour ce faire, elle fait expliquer et elle explique les formules. Dans sa prestation, Ginette utilise souvent la question *"comprenez-vous?"* Elle veut que les élèves comprennent les formules pour que le symbolisme qui sera introduit prenne un sens. La période de la formulation des messages est l'occasion de partager cette compréhension, comme le montre l'extrait présenté ci-dessous. C'est d'ailleurs le contrat qu'elle installe puisqu'un élève à qui elle demande une explication, précise qu'il n'a pas compris ce que l'élève précédent a dit.

Extrait de Ginette, sec. 1: retour sur les formules, problème des Tables (prestation)
(Dans tous les extraits de prestation, nous utiliserons E lorsque parle un élève, Es lorsque plusieurs élèves parlent en même temps et E avec un indice lorsqu'un élève spécifique est identifié.)

| | Stagiaire | Élèves | |
|---|---|---|---|
| (1) | *Moi j'en ai une: si on met 4 personnes par table, qu'est-ce qui se passe quand on colle 2 tables ensemble?*<br><br>*On enlève 2 personnes. Si on met 4 personnes par table, à chaque fois qu'on rajoute une nouvelle table, on enlève 2 places. Vous comprenez? Donc tu mets 4 personnes par table moins 2 à chaque table ajoutée. Vérifiez si ça marche.* | Es: (inaudible)<br><br>E: Oui<br>Bruits. | |
| | *Est-ce que vous avez compris ce que je vous ai expliqué? Qui dit oui? Ben viens...*<br><br>*OK Il va vous expliquer. Il faut que tout le monde comprenne. On écoute.* (À l'élève) Avant on va vérifier... (pas clair) *Quelqu'un a compris? Les 4 personnes moins*<br><br>*Il a dit on met 2 personnes par table plus 2 aux extrémités. On a déjà trouvé celui-là.* | (Un élève va devant la classe.)<br><br>E4: (inaudible)<br><br>E5: Je n'ai pas compris ce qu'il a dit. | Contrat: que tous comprennent |
| (2) | *Tu veux l'expliquer. Expliquer ce que j'ai expliqué. Toi, vas-y expliquer 4 personnes par tables moins...* [Intervention disciplinaire.] *Vas-y expliquer.* | E5: *Quand tu rajoutes une table, ça fait 6 places donc t'as enlevé 2 places donc si t'as 3 tables ça va donner.* | Elle fait réexpliquer la formule. |
| (3) | La stagiaire interrompt: *Ce qu'il essaie d'expliquer, quand on a une table, 4 personnes peuvent s'asseoir. Si tu colles 2 tables ensemble, ici* (sur dessin) *on a perdu 2 places. À chaque fois qu'on colle une table on perd 2 places.* | | Elle explique encore. |

| (4) | | |
|---|---|---|
| | *Tout le monde comprend? Qui comprend pas? Tu comprends pas? Regarde, tu mets 4 personnes par table chaque fois que, et tu enlèves 2 personnes par table ajoutée. Regarde* (elle dessine), *imaginons que t'as 3 tables, tu mets 4 personnes par table, ça fait 12 personnes si elles n'avaient pas été collées, mais vu qu'elles sont collées, on en met combien?*<br>*12 moins 2 fois 2, on a collé 2 tables donc moins 4 places. C'est clair... Ça va!*<br><br>*On peut l'écrire ça: 4 personnes par table moins 2 personnes par table ajoutée. Vous comprenez ici?* | E: *Ah!*<br><br>Es: *Oui* (Inaudible.) |

Cet extrait rapporte ce qui se passe lorsque trois formules ont été trouvées et expliquées par les élèves, au moment où la stagiaire propose une quatrième formule.

Au début (1), Ginette commence par expliquer son raisonnement au groupe sur un dessin. Cette explication est générale. Puis, elle donne aux élèves un temps pour vérifier ou pour s'approprier l'explication puisqu'elle demande de réexpliquer ce qu'elle-même a expliqué. Un élève amorce une explication (2) sur un cas particulier. Cette explication est interrompue par Ginette qui reprend alors l'explication générale (3). Devant l'incompréhension d'une élève, Ginette reprend encore l'explication puis passe à un exemple sur lequel elle effectue cette fois un calcul (4). Jusque-là, le message n'était pas traduit complètement en calcul. Le message compris, elle le fait prendre en notes.

*Particularisation de l'explication pour faire comprendre*

Dans le passage de l'explication générale à l'explication sur un cas particulier, pour faire comprendre à l'élève, le raisonnement n'a pas changé. La compréhension attendue ici est bien une **compréhension des fondements** de la formule d'après le contexte. La stagiaire utilise une **particularisation de l'explication générale** dans le cas du retour pour trois formules sur quatre; cette intervention est donc assez caractéristique des interventions de la stagiaire. Voici un autre extrait illustrant ce propos.

Extrait de Ginette, sec. 1: retour sur les formules, problème des Tables (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| *Il a un exemple, il en a trouvé un.*<br>*Écoutez.* | E1: *Avec une table tu as 4 personnes, tu ajoutes une table, tu ajoutes 2 personnes.* |
| *Ce qu'il dit, tu mets 4 personnes sur la première table et à chaque fois que tu ajoutes une table, tu mets 2 personnes par table que tu ajoutes. Donc c'est 4 personnes plus 2 fois le nombre de tables en plus.*<br>*Imaginons que t'as 5 tables.* | E: *12* |
| *Une table tu mets 4 personnes et sur les 4 autres que tu colles tu mets 2 personnes donc tu mets 4 plus 2 fois le nombre de tables que tu ajoutes.*<br>*Trouvez-en d'autres, il y en a d'autres.* | E: *J'ai trouvé Madame.* |

Elle explique sur un exemple.

L'explication à partir d'un exemple, que nous avons appelée "particularisation de l'explication générale", est différente d'exemples particuliers qui ne seraient que le constat d'une bonne réponse.

L'exemple concrétise l'explication générale et, dans ce sens, facilite la compréhension de l'élève quant aux fondements de la formule. L'exemple peut alors prendre une valeur générique chez l'élève bien que la stagiaire ne semble pas s'être préoccupée de cet aspect. En effet, la stagiaire ne soulève pas de questions telles *"est-ce toujours le cas?"*

*Rendre l'explication opérationnelle pour faire comprendre*

L'exemple permet aussi de passer au calcul, comme nous l'avons souligné à l'étape 4 du premier extrait. Il y a vraisemblablement un saut entre *"Si on met 4 personnes par table, à chaque fois qu'on rajoute une nouvelle table, on enlève 2 places"* et la traduction en *"12 moins 2 fois 2, on a collé 2 tables donc moins 4 places"* dans le cas particulier de 3 tables. L'explication, pas encore opérationnelle pour l'élève, peut le devenir via l'exemple. Le raisonnement sur un exemple permet de passer facilement à la traduction en opérations: il ne s'agit plus alors de valider la formule dans le sens de montrer que c'est vrai, mais de traduire en opérations une explication.

Dans le cas de Ginette, les exemples particuliers qui sont utilisés ne valident pas en soi, mais aident à la compréhension des fondements ou des calculs à faire. Quant aux explications générales, il est difficile de dire si elles ont un statut de validation chez Ginette bien que quelques indices nous laissent croire que oui. Quelquefois l'acceptation des formules est en jeu. Par exemple, lorsqu'elle propose le quatrième message (premier extrait donné précédemment), elle demande aux élèves de *vérifier*. À une autre occasion, alors qu'un élève a donné sa formule sous forme de procédure de calcul sans l'expliquer, elle lui demande *pourquoi*. À une autre occasion encore, elle demande l'approbation des élèves - *c'est bon, hein!* Cependant ces commentaires prennent peu de place dans l'ensemble et ne paraissent pas relever d'une intention précise de la stagiaire.

*Fonction de la validation: Faire progresser les élèves en même temps*

Par l'analyse des interactions entre le groupe et la stagiaire, nous constatons que l'interlocuteur principal de la stagiaire est le groupe; en effet, la formulation par un individu (élève ou stagiaire) est toujours suivie d'un renvoi au groupe. Cependant, les moments de dissension, quand un élève ne comprend pas, sont toujours traités individuellement avec l'élève. Jamais de discussion n'est entreprise en groupe. En classe, la stagiaire prend le contrôle des explications, elle interrompt même les élèves en cours d'explication. En agissant ainsi, la stagiaire détourne d'une certaine manière l'explication d'une fonction de validation liée à la résolution du problème par les élèves. L'explication peut alors être vue davantage comme liée à la progression de l'ensemble des élèves (il faut que tous suivent, que tous soient au même point) qu'au service de l'activité mathématique de résolution du problème (s'assurer que la formule est toujours vraie). Bien sûr, d'autres considérations entrent en ligne de compte comme le manque d'expérience de la stagiaire. En effet, Ginette a fait face à une forte indiscipline qui peut expliquer qu'elle n'ait pu gérer comme elle le voulait l'activité de classe; indiscipline qui s'est manifestée dès le début. Elle souligne d'ailleurs dans ses planifications améliorées qu'il est important qu'elle laisse le temps aux élèves d'aller au bout de leurs explications.

L'activité de classe est complexe et différents projets sont menés en même temps plus ou moins consciemment. Considérant les explications données ou sollicitées par la stagiaire comme des arguments validant les formules, notre analyse nous permet de distinguer trois fonctions de la validation. D'abord les explications ont une fonction par rapport aux formules en jeu: leur donner du sens ou en **faire comprendre les fondements**. Puisque les explications font comprendre les fondements de la formule, nous dirons qu'elles ont un potentiel de preuve même s'il n'est pas clair que la stagiaire leur reconnaisse ce statut. Deux niveaux d'explications sont utilisés; les explications générales rejoignent les expériences mentales et, les explications particulières rejoignent l'exemple générique des niveaux de preuve de Balacheff (1989). Deuxièmement, ces explications, potentiellement preuve, visent aussi à ce que **tous** comprennent. Le passage de l'explication générale à l'explication particulière, de même que le passage de l'explication particulière au calcul particulier, peuvent être vus comme une tentative de ramener à un niveau plus pragmatique l'explication générale, de manière à **aider l'élève**. L'intervention de Ginette est résumée dans le schéma ci-dessous.

| Explication générale ⟶ Explication particulière ⟶ Calcul particulier |
|---|

Notons toutefois ici que les deux passages ne sont pas du même ordre. Nous associons le premier à un changement de niveau de preuve qui cible les fondements. Tandis que le passage de l'explication particulière au calcul particulier permet de rendre l'explication opérationnelle.

Troisièmement, l'explication assure **la progression de tous en même temps**. Cette fonction n'est toutefois pas à détacher des autres et les passages identifiés plus haut peuvent être vus comme des compromis pour faire accepter les formules.

En bref, l'explication, potentiellement preuve, a pour fonction de faire comprendre les fondements de la formule, de les faire comprendre par tous en particularisant et en rendant l'explication opérationnelle au besoin. Elle a aussi une fonction d'aide qui, entre autres, permet au groupe de progresser.

**b. Le cas de Brigitte**

Brigitte soumet aux élèves le problème des Tables. L'explication lors de la formulation des messages semble ici aussi, avoir comme fonction de faire comprendre les fondements de la formule et de les faire comprendre par tous les élèves comme c'était aussi le cas chez Ginette.

*Fonction de la validation: faire comprendre*

Lors de la prestation, les élèves vont au tableau présenter leur solution. Nous présentons ci-dessous un extrait de la prestation de Brigitte qui reprend le déroulement en classe lorsque le premier élève est au tableau.

Extrait de Brigitte, sec. 1: retour sur les formules, problème des Tables (prestation)

| | Stagiaire | Élèves | |
|---|---|---|---|
| (1) | *Tu nous expliques en même temps ce que tu fais (...).*<br>*Ça c'est pour 1000 tables. Est-ce que ça marche tout le temps? Avec 500, avec 300 tables.* | Un premier élève (E1) écrit: *1000×2+2=2002* | Elle tente de faire passer l'élève au cas général. |
| | | Es: *Oui* | |
| | À E1: *OK, ici si tu mets 500, 300, 200 ça marche tout le temps?* | | |
| | | E: *Non* | |
| | À E1: *Au lieu d'écrire 1000 ici, tu pourrais mettre quoi? C'est quoi que tu multiplies par 2?* | E: *tables*<br>E: *le nombre de tables* | |
| | *Est-ce que tu pourrais écrire, au lieu d'écrire 1000 ou 500 tables, le nombre de tables? Écris-le, comme ça on aura pour n'importe quel nombre de tables.* | E1:*Oui* | |
| (2) | | E: *Comment il fait pour trouver 2002?* | |
| | *Il l'a calculé lui avec 1000 tables.*<br>À E1: *Après ça qu'est-ce que tu fais avec le nombre de tables? Tu l'écris.*<br>*Après ça qu'est-ce que tu fais?* | E1: *multiplie par 2*<br>E1: *plus 2* | |
| | | E2: *Ça n'a pas de sens!* | Un élève conteste |
| | À E2: *Pourquoi ça n'a pas de sens?* | E2: *Le nombre de tables c'est quoi?* | |
| | À E2: *Lui il a mis avec 1000 tables, mais ça pourrait être quoi?* | E: *150*<br>E: *200* | |
| | *Ça pourrait être 150, 200. C'est ça que je veux, pour n'importe quel nombre de tables.* | E2: *Le monsieur, combien de tables, combien de chaises il va trouver?* | |
| | *Combien de chaises il va trouver avec ça?* | | |
| (3) | À E1: *Pourquoi tu as mis le nombre de tables fois 2?* | E: *Pour trouver le nombre de chaises.*<br>E: *Parce que chaque table ça prend 2 chaises* | Elle fait expliquer en demandant pourquoi. |
| | *Parce que chaque table il a mis 2 chaises.*<br>À E2: *Regarde ce qu'il a fait, lui il a dit je mets 1 chaise ici et 1 chaise ici. Une chaise ici et 1 chaise ici. Donc il a mis combien de chaises par tables?* | Es: *2* | |
| | *Puis il a dit il faut une autre chaise ici et une autre là. Donc il a ajouté* | Es: *2 chaises.* | |

Un élève écrit au tableau le calcul qu'il a effectué pour trouver le nombre de chaises qu'on peut placer autour de 1000 tables. Brigitte essaie avec difficulté de l'amener à écrire une formule générale (1). Elle pose bien la question *"est-ce toujours vrai"* mais sans aller plus loin. Elle ne demande pas pourquoi, ce qui pourrait amener les élèves à passer à la forme générale, le cas particulier pouvant alors devenir générique. Ce n'est que lorsqu'un autre élève (E2) dit que ça n'a pas de sens (2) qu'elle demande à l'élève (E1) qui a produit le message de l'expliquer (3).

L'explication consiste à faire comprendre à l'élève 2 comment la formule a été construite et ainsi à lui donner du sens puisqu'il n'en voit pas.

*Fonction de la validation: partager la compréhension*

Les élèves étant devant la classe lorsqu'ils présentent leur formule, ils deviennent des interlocuteurs possibles. Tout le groupe est impliqué alors dans la résolution du problème. Lorsque l'élève 2 (E2) remet en question la formule trouvée, elle retourne la question à l'élève 1 (E1) lui demandant pourquoi il a effectué telle ou telle opération. Ainsi, elle s'assure de la compréhension de l'élève 2 mais aussi de toute la classe et de l'élève 1 qui ne s'était pas encore expliqué sur sa propre formule. Elle établit alors le *consensus*. Dans la planification de Brigitte, l'étape de formulation semble avoir comme objectif d'établir un *consensus*. En effet, cette partie est appelée *"Reprise des messages. Consensus."* Alors, comme chez Ginette, l'étape de retour semble avoir une fonction de partage: on met en commun ce qui a été trouvé et on explique aux autres.

Ces explications semblent toutefois ne pas suffire à valider les formules. Dans sa planification, Brigitte prévoit une étape subséquente de validation. Elle écrit suite à une formule fausse anticipée: *"Ici, l'élève enlève une chaise au lieu de deux entre les tables. C'est une formule erronée. C'est après avoir repris toutes les formules que l'on va les valider."* Dans la planification, la formulation des messages semble consacrée strictement à l'énoncé des formules (ou des messages) sans plus. La stagiaire demande *"qu'avez-vous à envoyer à Marcel?"* Les explications demandées lors de la prestation n'appartiennent pas à la planification. La période de formulation des messages permettrait de prendre connaissance des formules mais pas de les valider, comme si, dans un premier temps, la stagiaire voulait recevoir également toutes les formules justes ou fausses et les explications associées.

Dans la planification, la *validation* semble se faire après la symbolisation des formules par les élèves et lors de la prestation, directement après que les élèves ont donné leur formule, la partie de la symbolisation ayant été supprimée faute de temps.

Nous reportons la discussion de cette validation au point suivant, consacré au deuxième lieu de validation.

### 6.3.3.2 Fonction de la validation lors de l'étape de vérification

Ginette est la seule à ne pas avoir fait suivre la formulation des messages d'une période de vérification. Dans les autres cas, c'est comme si les stagiaires prévoyaient d'abord récupérer toutes les formules produites pour ensuite en discuter. La formulation des messages est suivie alors d'une période de *validation* ou de *vérification*. Cette étape peut se faire immédiatement après la formulation en mots ou après la symbolisation. Ainsi, l'étape de formulation pour ces stagiaires n'est pas le lieu privilégié ni prémédité de la validation. Dans les sections qui suivent, nous ferons l'analyse des planifications et prestations respectivement de Tim, Marcel, Brigitte et Lucette. Pour ces stagiaires, nous avons affaire à deux types de validation des formules justes lors de l'étape qui suit celle de formulation, nous les appellerons: a) validation par vérification de la réponse et b) validation par application de la formule. Lors de leurs prestations, Marcel et Tim utilisent le premier type de validation (a) alors que Marcel (dans sa planification) et Brigitte utilisent le deuxième type (b). Quant à Lucette puisque la période de vérification consiste entièrement à rejeter ou améliorer des formules fausses, nous traiterons de son cas à la fin en c) sous le titre "période d'invalidation".

**a. Validation par vérification de la réponse:** les cas de Tim et Marcel

1. Le cas de Tim

*Fonction de la validation: retenir les formules qui fonctionnent*

Le problème des Tables est aussi utilisé par Tim dans une de ses planifications. Il prévoit discuter des formules avec les élèves pour ne **retenir que celles qui fonctionnent**:"*Par la suite, nous allons analyser les messages. Nous garderons ceux qui fonctionnent dans tous les cas.*" Il ne donne toutefois aucun indice sur la façon dont il s'y prendra et nous n'avons pas d'enregistrement de cette leçon (prestation). Cependant, nous avons la prestation d'une leçon subséquente dans laquelle Tim demande aussi de construire une formule. Encore ici, il ne mentionne rien en rapport avec la validation de la formule; comme le problème est simple et que les élèves ont travaillé des situations semblables avant, il n'envisageait aucune difficulté.

Lors de la prestation, dont nous présentons un extrait ci-dessous, Tim présente le problème de l'Hôtel (§6.3.2a): il s'agit de déterminer le nombre de murs montés après un certain nombre de jours, les chambres de l'hôtel s'enfilant les unes à la suite des autres et étant de forme carrée. L'extrait commence une fois la lecture du problème faite. Comme les autres stagiaires, lors de la présentation du problème (1), Tim utilise des exemples numériques et un grand nombre (15) pour faire saisir les enjeux du problème. Pour aider, il donne l'indice du mur conjoint qu'il ne faut pas compter 2 fois. Les élèves n'ont pas de temps significatif pour une résolution individuelle.

Extrait de Tim, sec. 2: <u>problème de l'Hôtel</u> (prestation)

| Stagiaire | Élèves | |
|---|---|---|
| (1) Présentation du problème. | | |
| *Après la première journée, il y a combien de murs dans la chambre?*<br>*( ) Le deuxième jour, il a fait une chambre de plus... Il en fait pas plus d'une par jour. Ce qu'on remarque c'est qu'il y a 4 murs la première journée,*<br> | *4* | Il donne une piste |
| *7 la deuxième, pourquoi pas 8? Parce que'il y a un mur qui est commun aux deux (il montre le mur commun ) ils sont collés ensemble*<br>*Il peut pas faire plus de 20 chambres. Ça veut dire, qu'il va travailler 20 jours, après son contrat est fini*<br>*Est-ce qu'il y a une façon de trouver rapidement, après 15 jours, combien de murs il va élever.* | *7* | |
| (2) Résolution du problème. | | |
| *Vincent?*<br>*Qu'est-ce qui est fois 3+1*<br>*On cherche en terme de journée (...) On veut savoir, admettons, après 15 journées combien de murs ils ont construits (...)*<br>*fois 3 le nombre de journée* | Vincent: *fois 3+1*<br>Vincent: *nombre de pièces fois 3...plus 1 mur*<br>E: *fois 3 journées, plus 1* | Un élève trouve la formule. |
| *On va l'écrire et je vais expliquer ce qu'il a trouvé mais avant: le nombre de jours y aurait-il une façon de l'écrire*<br>*x c'est le nombre de jours (...)3 fois ce nombre de jour qui est x plus 1* | E: *x* | Il reporte l'explication |

Un élève a trouvé immédiatement la formule (2). Une fois la formule trouvée, Tim ne demande pas à l'élève d'expliquer sa formule et ne l'explique pas lui-même, non plus, tout de suite. Il dit qu'il expliquera après avoir symbolisé. Après avoir symbolisé la formule, il vérifie *si ça fonctionne*, comme le montre la suite du protocole (3). Puis, il applique la formule trouvée (4) pour connaître le nombre de murs montés à la fin du contrat, soit après 20 jours.

Extrait de Tim, sec. 2: <u>problème de l'Hôtel</u> (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| (3) Vérification. | |
| *On va regarder si ça fonctionne. La première journée il y en a 4. 3×1+1, 4. La deuxième il y en a 7. 3×2+1, 7.* Il effectue des calculs après avoir constaté sur le dessin (il regarde le dessin) combien de murs il y a.<br>*Parfait moi aussi je l'avais trouvé celle-là.*<br><br>*C'est ça qu'il a trouvé comme formule.*<br>*La première journée il remplace n par 1, 3 fois 1 plus 1, ça fait 4. La première journée, 4 murs. On va regarder s'il obtient bien 7 murs pour la deuxième journée. Tu comprends?*<br>*3 fois 2, 6, plus 1, 7.*<br><br>*Il a réussi à trouver la formule qui permet de trouver le nombre de murs pour chaque jour. (...)* | (inaudible)<br><br>(...) |
| (4) Application | |
| *J'ai trouvé 4 ou 5 messages. C'est pas le but aujourd'hui. Donc si je dis après 20 jours combien de murs il va en avoir construit à la fin de son contrat?*<br><br>*20×3+1 = 61, ça marche?* | 61 |

Vérification locale et comparaison avec ce qui a été trouvé avant.

Après, Tim passe à l'introduction de la notion de "domaine d'une variable". Alors quelle est l'explication qu'il a annoncée? La seule explication serait la vérification effectuée pour montrer que la formule permet de trouver 7 comme on l'avait compté au début.

*Vérifier que la formule donne la bonne réponse / répondre à la tâche demandée*

La vérification semble avoir comme fonction de montrer que la formule permet bien de trouver ce qu'on voulait trouver. Lors de cette vérification, il revient à la tâche demandée: "*Il a réussi à trouver la formule qui permet de trouver le nombre de murs pour chaque jour*". Selon nous, l'explication aurait dû montrer sur le cas particulier, la structure ou la régularité de la situation: il y a 3 murs qui sont montés par jour, plus un mur à ajouter pour la première journée où 4 murs ont été montés. Or la vérification sur dessin ne consiste qu'à comparer la réponse obtenue avec la formule à celle obtenue en regardant sur le dessin, réponse déjà trouvée avant la formulation du message. Bien sûr le dessin lui-même peut avoir une valeur générique si l'on voit les propriétés générales dans le dessin particulier et il y a une certaine évidence mais Tim n'explicite pas ces propriétés. La vérification de Tim n'est pas particulièrement éclairante même si elle peut convaincre que les opérations effectuées par l'élève pour une ou deux chambres permettent bien de trouver le bon nombre de murs.

*Fonction de la validation: conclure pour passer à autre chose*

Par ailleurs, cette vérification permet de conclure vite, la construction de la formule n'étant pas l'objectif de la leçon.

Le projet de Tim, dans ses planifications de leçons, est de miser sur la compréhension: *"...je ne veux pas enseigner une algèbre procédurale, mais je veux faire découvrir aux élèves une algèbre basée sur la compréhension et la logique où le bon sens devient important. Ils pourront ainsi acquérir plusieurs habiletés et découvrir l'efficacité de cet outil."* Il ne semble pas que ce projet concerne l'étape de vérification des formules. Passons au cas de Marcel. Lui aussi, dans sa prestation, utilise une validation par vérification de la réponse, dans sa prestation.

2. Le cas de la prestation de Marcel

Nous analyserons maintenant la prestation de Marcel; nous reviendrons ensuite sur sa planification lorsque nous traiterons de la validation par application de la formule, au point b.

Marcel présente, lui aussi, le problème des Tables aux élèves. Les élèves doivent trouver une formule permettant de calculer combien de personnes on peut asseoir autour de n'importe quel agencement de tables enfilées les unes à la suite des autres sachant que quatre personnes peuvent s'asseoir autour d'une table isolée. Après une période de travail en équipe, le stagiaire demande à un porte-parole de chaque équipe de donner le message trouvé. L'extrait de la prestation qui suit rapporte l'étape de formulation des messages et montre que celle-ci est un lieu de validation par les élèves.

Extrait de Marcel, sec. 2: retour sur les formules, problème des Tables (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|

Échange élève 1 (E1) et stagiaire

| | |
|---|---|
| *...Dis-moi ce que tu as comme message? En mots.*<br><br>*Non, non, il faut que ce soit général, ça c'est un cas particulier* | E1: *T'as 39 tables, là tu multiplies*<br><br>E1: *nombre de tables fois 2 parce que 2 tables de chaque côté +2 parce que tout le temps 1 de chaque côté* |
| *Comment tu écrirais ça avec des symboles?*<br><br>*m fois 2*<br><br>+ 2. | E: *m fois 2*<br><br>E: *ça égale 2m* |

L'élève justifie.

Échange élève 2 et stagiaire

| | |
|---|---|
| *...autre chose?*<br><br>*Il y a 4 personnes par table*<br><br>*Est -ce que 3 tables il y a 9 personnes? Fais un dessin.* | E2: *1 table, 3 personnes*<br><br>E2: *Ouais! mais 2 tables il y en a 6* |

Échange élève 3 et stagiaire

| | |
|---|---|
| *Équipe #2*<br><br>*Comment vous l'avez trouvé que ça donnait 80? Est-ce que vous avez compté?*<br><br>*Combien de tables à chaque bout?*<br><br>*2 tables. Ce que tu dis, c'est que t'enlèves les 2 tables du bout. Peux-tu mettre ça dans un cas plus général? Si je dis m c'est mon nombre de tables.*<br><br>*Les 2 à chaque bout qu'est-ce que tu fais?*<br><br>*Quand tu ôtes?*<br><br>*m-2. Qu'est-ce que tu fais avec ça?*<br><br>*Ensuite qu'est-ce que tu fais? Avec les 2 tables que tu as enlevées?*<br><br>+6. | E3: 80<br><br>E3: *Une table à chaque bout de 3*<br>*39-3*<br><br>E3: 2<br><br>E3: *m fois*<br><br>E3: *Je les ôte pour commencer.*<br><br>E3: *moins*<br><br>E3: *fois 2*<br><br>E3: *On additionne ...le nombre de chaises qui va avoir... 6 chaises* |

Échange élève 4 et stagiaire

| | | |
|---|---|---|
| *Oui St...*<br><br>*m c'est quoi*<br><br>*m c'est quoi? ton nombre de tables?*<br><br>*x c'est quoi*<br><br>*Le nombre de chaises est-ce que tu sais combien il y en a?* | E4: *J'ai fait m fois x moins 2*<br><br>E4: 39<br><br>E4: oui<br><br>E4: *le nombre de chaises... +2 ...*<br><br>E4: *Ils disent qu'il y en a 4* | |
| *As-tu fait un dessin?*<br><br>*39 c'est quoi?* | E4: *Si on prend l'exemple de 3 tables, il y en a 1 à chaque bout, il y en a une à chaque table d'un côté et d'l'autre bord avec. T'imagines qu'il y en a 39 comme ça*<br><br>E4: *Le nombre de tables* | L'élève 4 utilise un exemple générique et une expérience mentale. |
| *en mots, 39, c'est ton nombre de tables.*<br><br>*en mots...ton nombre de tables* | E4: *C'est ça 39 fois 2 plus 2*<br><br>E4: *fois 2 plus 2* | |

Nous voyons que les élèves expliquent leur façon de faire dans le contexte à partir du dessin. Cette façon de faire n'est pas encore complètement mise en formule et l'explication se fait sur le cas particulier de 39, qu'ils avaient à calculer, mais leur explication a une valeur générique. On le voit bien chez l'élève 4 qui parle à partir d'un exemple de trois tables et qui change tout à coup pour 39 tables.

Mais tout se passe comme si les explications des élèves n'étaient pas suffisantes ou ne pouvaient pas être utilisées pour valider les formules puisqu'une fois les formules expliquées par les élèves, le stagiaire ajoute une étape de vérification sur des cas particuliers comme le montre la suite du protocole.

Extrait de Marcel, sec. 2: retour sur les formules, problème des Tables (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| **Vérification des deux formules pour 1 table** | |
| *On a un problème. On vérifie si ça fonctionne.* (il montre sur le dessin)<br>*On a 1 table. Ici ça vaut* $1\times2+2=4$. *J'ai bien 4 personnes. Ça fonctionne.* | [Les élèves calculent avec lui) |

| | |
|---|---|
| *Celle-ci (1-2) × 2 + 6*<br><br>*Donc ça fonctionne aussi.* | [Les élèves calculent avec lui.] Ça fait 4, ça fonctionne aussi |

Vérification des deux formules pour 3 tables

| | |
|---|---|
| *J'ai 3 tables, ici* ( il dessine 3 tables.) *Est-ce que ça fonctionne?* | E: 3 tables ça fait 8 personnes<br>E5: *n fois 2* |
| *n vaut quoi*<br><br>*Ça fait combien?* | E5: *n nombre de tables 3×2*<br><br>*E: 3 fois 2, 6, plus 2, 8*<br>*E: 9* |
| *Où est la 9e*<br><br>(il compte) *(...)* | E: *Tu fais +1* |
| *Celle-là fonctionne.*<br>*Est-ce que celle-là fonctionne?*<br><br>*On a obtenu 8 ici.*<br>(Il montre le dessin de 3 tables au tableau).<br>*Ça fonctionne aussi. Avec ça, ça marche mais avec ce que t'as obtenu* (E2), *3 par tables ça fonctionne pas.* | E: [Calcul] *Oui* |

Le stagiaire compare les réponses.

Conclusion

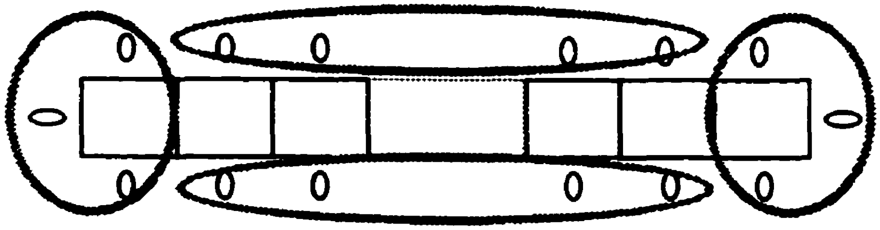
| | |
|---|---|
| *Celle-là ici, pour celle là ici* ( il pointe avec des flèches), *fonctionne.* | |

Question de l'équivalence

| | |
|---|---|
| *Ces deux là fonctionnent. Est-ce que ça veut dire la même chose?* | |

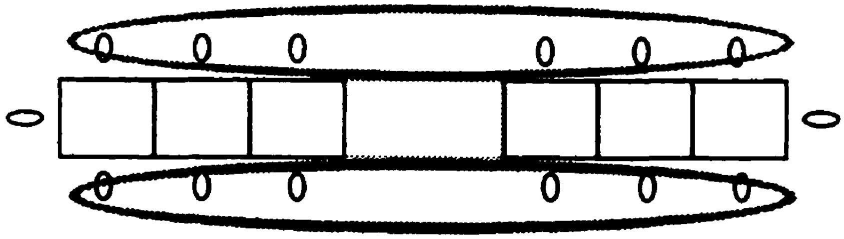
Lors de la période de vérification, c'est le stagiaire qui mène le travail de vérification, les élèves ne sont pas appelés à y participer sauf pour calculer avec le stagiaire. Nous reconnaissons ici une vérification sans valeur générique parce que la régularité n'est pas mise en évidence par le stagiaire. Alors que les élèves utilisaient une explication générale, à partir d'un exemple générique ou d'une expérience mentale, Marcel compare des réponses; il fait calculer le nombre de personnes à partir de la formule qu'il compare avec le nombre obtenu en regardant sur le dessin.

Comme dans le cas de Tim, la validation se fait en regardant sur le dessin. Bien sûr, il est facile de "voir" sur le dessin la procédure de comptage rapide. Prenons le <u>problème des Tables</u> de Marcel. La procédure du troisième élève peut se représenter comme ceci:



( nombre de tables − 2 ) × 2 + 3 × 2

Celle du quatrième élève comme ceci:



nombre de tables × 2 + 2

Ce qui caractérise l'intervention explicite de Marcel, comme celle de Tim, ce n'est pas de montrer l'organisation qui permet de faire le calcul rapide, mais c'est la vérification que la réponse obtenue est juste. (Marcel reviendra sur l'organisation des calculs lorsqu'il traitera de l'équivalence.) Quelle peut-être la fonction de la vérification effectuée par Marcel?

*Fonction de la validation: rassembler autour d'une même tâche pour disposer des formules collectivement*

Jusqu'à cette étape, le retour sur les formules s'est fait par échanges entre le stagiaire et un élève à la fois; même s'il y avait quelques interventions d'autres élèves, l'intention n'était vraisemblablement pas de faire participer les autres élèves. **La période de vérification ramène tous les élèves à la même tâche accomplie collectivement.** Ce qui était jusque là la production de l'élève est maintenant propriété de toute la classe, c'est-à-dire de l'ensemble des élèves et du stagiaire. Cette fonction apparaît tout particulièrement dans la prestation de Marcel.

*Fonction de la validation: vérifier si la formule donne la bonne réponse pour déterminer les formules à retenir*

La tâche consistera ici à discriminer les fausses formules des bonnes pour ne retenir que celles qui sont justes puisque la conclusion consiste aussi à dire celles qui "fonctionnent". La vérification a alors certainement la fonction de **déterminer** les **formules à retenir.**

*Fonction de la validation: conclure pour passer à autre chose*

Sur un autre plan, dans l'ensemble de la leçon, l'étape de vérification sert à conclure la résolution du problème et à introduire la discussion sur l'équivalence des formules. Ceci est vrai lors de la prestation et dans la planification. Nous en discutons maintenant, notre analyse se faisant en relation avec ce qui précède. L'extrait de prestation qui suit reprend cette étape.

Extrait de Marcel, sec. 2: retour sur les formules, <u>problème des Tables</u> (prestation)

| | Stagiaire | Élèves | |
|---|---|---|---|
| Équivalence. | | | |
| (1) | *Ces deux là fonctionnent, est-ce que ça veut dire la même chose?*<br><br>*Pourquoi?* | E: *Oui*<br><br>E: *parce que ça donne la même réponse.* | On se rabat sur la réponse. |
| (2) | *le +6 c'est quoi* [dans $(n-2)\times2+6$]<br><br>*J'ai une table j'ai 2 personnes, une autre table, j'ai 2 autres personnes... il faut que j'ajoute 2 personnes, il y a 1 personne à chaque bout, c'est pour ça qu'on ajoute le +2...*<br>*n, c'est ton nombre de tables, une variable...* | E: *Les 2 tables... les 3 chaises de chaque bout.*<br>E6: *C'est vrai, c'est pas pareil!* [Cet élève semble avoir remarqué quelque chose.]<br><br>E6: *oui mais c'est* $n\times2+2$ *c'est elle qui est meilleure parce qu'elle est moins compliquée* | Le stagiaire cherche à expliquer dans le contexte. |
| (3) | *L'autre aussi fonctionne*<br>*les tables dans le milieu ont chacune deux chaises, je prends la table à ce bout-là et la table à ce bout-là, il y a 2 personnes par tables...*<br><br>*Mon oncle Guy veut que le monde soit confortable.*<br>*Les deux sont bonnes. La 1ère est plus compliquée mais les 2 fonctionnent.* | E: *Là je comprends tout mais c'est twit, pourquoi tu mets 2 chaises au bout.* | Les élèves cherchent autre chose. |

Cette étape nous apparaît problématique. En effet, une fois que les formules ont été vérifiées, le stagiaire semble vouloir ramener les élèves au contexte et tenter de montrer l'équivalence en expliquant comment chacune des formules a été construite (2). Or, les élèves ont déjà expliqué comment ils ont fait et comme le stagiaire vient de montrer que les formules fonctionnent en mettant l'accent sur la réponse plutôt que sur la régularité, l'élève se rabat sur la réponse comme nous le constatons en (1). Après, les élèves semblent avoir détourné la question du stagiaire de son objectif: un élève cherche à différencier les formules d'après leur simplicité (2), un autre s'interroge sur la pertinence de la situation (3).

Ainsi, la place de la vérification nous apparaît en conflit avec les autres étapes du déroulement de la leçon niant les justifications des élèves et rendant inefficace la tentative de montrer l'équivalence des deux procédures dans le contexte. Le schéma qui suit (figure 32) résume notre analyse.

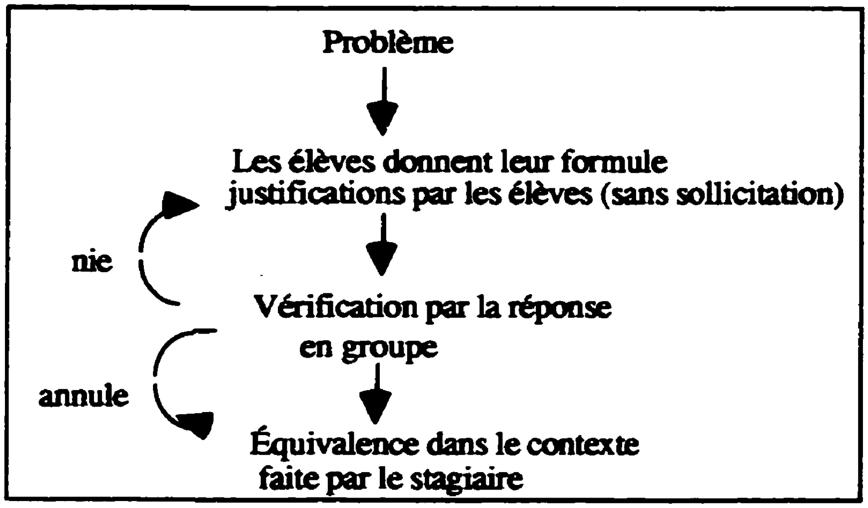



**Figure 32:** schéma de la prestation de Marcel

Nous avons pensé que l'étape de vérification, identifiée comme problématique, était un moyen de recentrer les élèves après une activité difficile à gérer, voire anarchique, et qu'elle était improvisée, en réaction à ce qui se passait en classe. Or, nous la retrouvons aussi dans la planification. L'articulation avec les autres activités de la leçon apparaît toutefois différente. Nous analyserons celle-ci maintenant, sous le point b, puisque la vérification, dans la planification de Marcel, consiste à appliquer la formule.

**b. Validation par application de la formule:** les cas de Marcel et de Brigitte

1. Le cas de la planification de Marcel

Nous résumons la planification de Marcel par le schéma qui suit (figure 33):

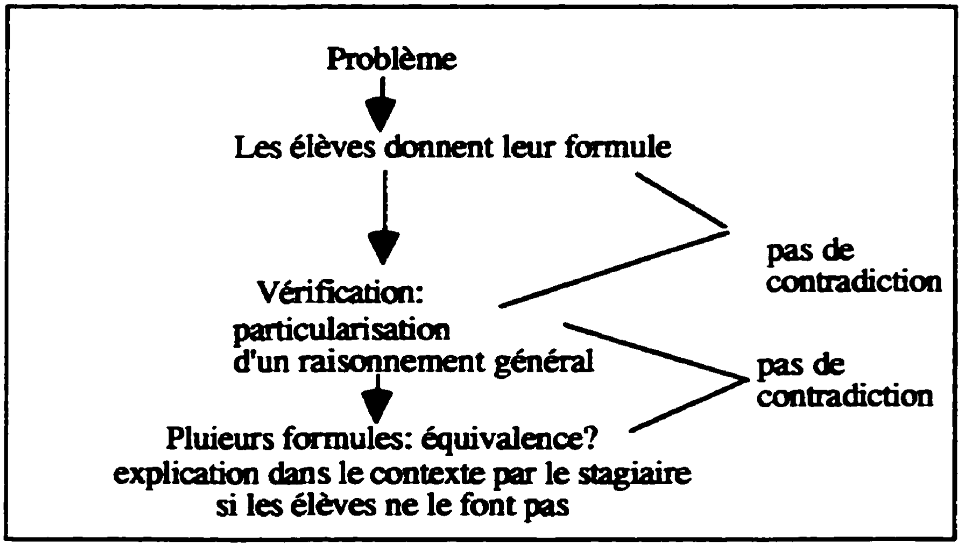



**Figure 33:** schéma de la planification de Marcel

Le lecteur pourra noter des différences dans les schémas des figures 32 et 33: dans la planification, la période de vérification est devenue une particularisation du raisonnement général plutôt qu'une vérification de la réponse et nous n'avons noté aucun conflit entre les parties du déroulement. Nous nous expliquons. D'abord dans la première partie de la planification, dont nous reproduisons ici un extrait, au moment où les élèves doivent donner les formules, nous n'avons noté aucun indice (ni questions, ni réponses anticipées des élèves) pouvant laisser croire que le stagiaire envisage une justification par les élèves des formules trouvées.

Extrait de Marcel, sec. 1: retour sur les messages (planification)
*"M: Équipe no 2, quel message avez-vous obtenu?*
*E: On a 2 fois le nombre de tables + 2 chaises*
*M: Est-ce qu'il y a une équipe qui a obtenu un message différent?*
*E: Oui, on a obtenu 2 fois plus de chaises que (le nombre de tables + 1)*
*(J'écris tous les messages au tableau; s'il n'y a qu'un seul message, je vais leur en proposer un autre comme étant ce que moi j'ai obtenu.)"*

Nous constatons donc que cette étape ne consiste qu'à exposer strictement les formules. Nous notons la même chose dans la planification de Brigitte. Une fois les formules écrites au tableau, elles deviennent disponibles pour que le stagiaire puisse les traiter ou les travailler avec le groupe. C'est alors qu'est introduite la vérification. Il n'est pas dit dans la planification quelle sera la fonction de la période de vérification mais nous pensons que puisque les élèves donnent individuellement leur formule, la période de vérification qui concerne tous les messages au tableau, sert forcément à rassembler les élèves et à passer à une solution collective comme dans la prestation (que ce soit intentionnel ou non).

Mais la vérification dans la planification est très différente de celle lors de la prestation.

*Fonctions de la validation: vérifier l'applicabilité de la formule et renforcer la généralisation*

Dans la planification, à l'étape de vérification (extrait ci-dessous), l'analyse montre que la vérification ne se fait pas par comparaison de la réponse obtenue par la formule avec une réponse constatée ou calculée autrement, alors que c'était le cas lors de la prestation.

<u>Extrait de Marcel, sec. 1: retour sur les messages, suite (planification)</u>
*"M: Vérifions maintenant si le premier message fonctionne. Mathieu est-ce que ça marche pour une table?*
*E: Oui, parce qu'on a 2 fois le nombre de tables donc 2x1, ça donne 2. Puis on additionne 2, ça donne 2+2=4.*
*M: C'est bien! Maintenant, si on a 4 tables?*
*E: J'ai 4 tables avec 2 chaises pour chacune d'elles, ça me donne 8, j'additionne les 2 chaises aux extrémités, ça me donne 10.*
*M: Si j'ai 25 tables, combien vais-je avoir de chaises? Oui Jean-Marc!*
*E: J'en ai 52! J'ai 2 chaises pour chaque table plus une à chaque bout ce qui me donne 52.*
*(Je procède de la même manière pour les autres messages.)"*

La réponse anticipée de l'élève explicite sur quoi repose la formule et n'est pas qu'une vérification locale. En fait "*vérifier si le message fonctionne*", ne consiste pas ici à vérifier si la réponse est bonne. Les propriétés générales du contexte sont reprises pour chaque cas particulier. Vérifier si ça fonctionne pourrait alors consister à vérifier que le raisonnement s'applique sur chaque cas particulier. Nous rejoignons ici les commentaires de Martin et Harel (1989) sur la preuve particulière qui rejouerait la preuve générale sur un cas particulier. La répétition des exemples donnerait la conviction que la formule est toujours applicable et renforcerait la compréhension de la formule générale. Lors de la prestation, ce sont les élèves qui en quelque sorte ont réalisé cette *vérification* prévue dans la planification.

*Fonction de la validation: passer à autre chose*

La vérification a consisté à appliquer le raisonnement général sur des cas particuliers, il n'y a donc plus de conflit avec l'étape suivante qui traite de l'équivalence. L'étape de vérification montre les opérations à effectuer, et l'étape qui suit interroge sur comment ces procédures différentes peuvent être équivalentes. Marcel explique ainsi l'équivalence entre deux formules:

> <u>Extrait de Marcel, sec. 1: discussion sur l'équivalence (planification)</u>
> *"M: On semble avoir un problème car on a 2 (ou plusieurs) façons de compter le nombre de chaises. Est-ce que les 2 messages sont équivalents? Y a-t-il quelqu'un qui peut nous expliquer pourquoi on obtient ça?*
> *(J'espère qu'il y en aura un qui aura une idée même si elle est fausse. Je pourrai ensuite l'utiliser pour expliquer ce qui se passe. S'il n'y en a pas, je ferai la suggestion que j'attribue à l'élève.)*
> *E: Si on regarde les messages, on voit que les 2 associent 2 chaises à chaque table. La seule différence est qu'on ne compte pas les 2 chaises situées aux extrémités, de la même façon. Dans un cas, on les additionne après avoir compté les chaises de chaque côté du regroupement de tables. Dans l'autre, on les compte comme étant une autre table.*
> *(Que ce soit moi ou l'élève qui donne cette explication, je l'accompagne de gestes sur le dessin au tableau. Je reprends ces explications plusieurs fois en changeant de vocabulaire pour que le plus d'élèves possibles comprennent car c'est une notion essentielle à la compréhension de l'algèbre.)*

La période de vérification sert donc à poser la question de l'équivalence: "*on semble avoir un problème car on a deux (ou plusieurs) façons différentes de compter...*"

*Fonction de la validation: faire comprendre l'équivalence.*

Lorsque le stagiaire montre l'équivalence des formules malgré la différence des procédures utilisées pour "compter rapidement" les personnes, il fait appel à la compréhension des élèves puisqu'il réfère à la signification des formules dans le contexte du problème. Comme nous l'avons vu, cette partie manque son objectif lors de la prestation, même si le stagiaire reste fidèle à sa planification. En fait, justement fidèle à celle-ci, le stagiaire n'a pas pu s'adapter à ce qui se passait en classe et a glissé vers une validation locale. Il avait prévu trois étapes: la formulation des messages, leur vérification et l'explication dans le contexte de l'équivalence des formules. Les formules étaient vérifiées grâce à l'application sur différents cas particuliers en reprenant les caractéristiques générales de la situation. Or, les élèves ont d'eux-mêmes justifié leurs calculs et messages. La période de vérification prévue ne pouvait que reprendre les justifications des élèves ou être supprimée. En voulant maintenir l'étape de vérification (peut-être pour amener la question de l'équivalence) tout en ne réutilisant pas les raisonnements des élèves, le stagiaire a glissé vers une vérification des réponses uniquement. Dans la planification améliorée de la leçon, il ne fait aucun commentaire sur cette période de vérification comme s'il n'avait pas constaté de différence. Nous pensons que l'enseignant risque facilement de faire ce glissement s'il n'a pas réfléchi sur la validation en mathématiques et si des intentions explicites relativement à la validation n'ont pas été formulées.

Dans la planification de leçon, comme lors de la prestation, le découpage de la période de retour en deux étapes a nui à la validation. Ce découpage en deux temps (peut-être pratique dans la planification pour la gestion des connaissances) peut expliquer le fait que le stagiaire n'ait pas récupéré les raisonnements des élèves et qu'il soit passé à l'étape de vérification alors que la vérification était déjà, pris dans l'obligation qu'il se fait de suivre sa planification de leçon.

2. Le cas de Brigitte

Précédemment, nous avons fait l'analyse de l'étape de formulation dans les leçons de Brigitte (§ 6.3.3.1); nous poursuivons maintenant avec son cas, avec l'étape de validation. La validation qui s'effectue alors s'apparente à celle qui apparaît dans la planification de Marcel.

Dans la planification de Brigitte, les étapes de formulation et de validation sont séparées. L'étape de validation semble se faire après la symbolisation des formules bien qu'elle ne soit pas clairement circonscrite. Voici un extrait de la planification.

> Extrait de Brigitte, sec. 1: retour sur les formules symbolisées, problème des Tables (planification)
> *"f) Messages symboliques:*
> *Moi:*[59] *Première équipe, quel est votre message raccourci? Pouvez-vous nous l'expliquer? Comment y êtes-vous arrivés?*
> *Élève #1: C'est 2 × nt + 2 chaises. Il explique: on place 2 chaises par table et ensuite on ajoute deux autres chaises pour les deux extrémités.*
> *Moi: Donc si j'ai 4 tables, combien de chaises j'aurai?*
> *Élève #1: J'aurai 10 chaises.*
> *Moi: Donc si j'ai 5 tables, combien de chaises j'aurai?*
> *Élève #1: J'aurai 12 chaises.*
> *Moi: Donc ça marche tout le temps. Bien."*

Elle ajoute:

[59]C'est la stagiaire qui parle.

> *"Je répète ce scénario pour chaque équipe. Pour la formule erronée, je fais voir à l'élève son erreur par l'application d'un cas. Et de là, il en déduira que ce sont deux chaises que l'on retire entre deux tables.*
>
> *Au fur et à mesure que l'on reprend une formule, je fais ressortir l'importance de la priorité des opérations. (...)."*

*Fonctions de la validation: vérifier de l'applicabilité de la formule et renforcer la généralisation*

Pour les formules justes anticipées à l'étape de formulation, dans sa planification (extrait qui précède), Brigitte prévoit d'abord une explication générale de la formule suivie de son application à différents cas particuliers, sans vérification des réponses. Les calculs répétés ont à notre avis deux fonctions. D'abord, il ne s'agirait pas tant de s'assurer de la justesse des formules mais de leur applicabilité, c'est-à-dire de la **possibilité de produire une réponse particulière à partir de la formule générale**. Par ailleurs, la répétition des calculs particuliers contribue à **renforcer la compréhension de la formule générale**. La conclusion que *"ça marche tout le temps"*, viendrait donc de la conviction que le même calcul peut se répéter quels que soient les nombres choisis et ce, en conjonction avec l'explication générale de la formule.

| Explication générale → | Calculs particuliers → sans vérification de la réponse | "Ça marche" tout le temps |
|---|---|---|

*Fonctions de la validation: invalider*

C'est à cette étape que Brigitte compte revenir sur la formule fausse. Pour cette formule, elle prévoit l'appliquer sur un cas particulier. Nous ne savons toutefois pas comment elle conclura que la formule est fausse ce qui aurait été révélateur de la fonction de cette partie. Nous pouvons seulement constater qu'elle n'insiste pas sur le fait que la réponse obtenue sera fausse, mais sur le fait qu'on doit enlever 2 chaises au lieu d'une, ce qui était proposé par la formule fausse.

Lors de la prestation, le déroulement est légèrement différent puisque Brigitte a renoncé à faire symboliser les formules, par manque de temps, mentionne-t-elle dans sa planification améliorée. De plus, une seule formule a été produite par les élèves et elle est juste; elle n'a donc pas à invalider une formule. Toutefois, pour la prestation, nos conclusions sont les mêmes: l'étape de validation sert à convaincre de l'applicabilité de la formule et à renforcer la compréhension de la formule générale. Dans l'extrait de la prestation qui suit, nous sommes à la fin de l'étape de formulation: un dernier élève est interpellé par la stagiaire pour donner sa formule.

Extrait de Brigitte, sec. 1: retour sur les formules, problème des Tables (prestation)

| | Stagiaire | Élèves |
|---|---|---|
| (1) | *Tu veux expliquer comment vous avez fait. Juste avec un nombre de tables, n'importe quel.*<br><br>*Est-ce que j'ai demandé pour 200?*<br><br>*Je vous ai dit 150 tables, 200, 300, n'importe quel nombre de tables. Vous avez trouvé la même chose. Tout le monde a trouvé la même chose.*<br><br>*Est-ce que ça marche?* | E4: *Nous on a pris 200 tables*<br><br>E: *Non*<br><br>E: *Donc c'est bon.*<br><br>E: *Ouais* |
| (2) | *Si j'ai 3 tables, combien de chaises je mets autour de trois tables?*<br><br>*Ça donne*<br><br>*Moi si je fais 2 plus 2 d'abord, j'ai fait 3 fois 4, 12...*<br><br>*Où?* | E:*3x2+2*<br><br>E:*8*<br><br>E: *Il faut mettre une parenthèse.*<br><br>E: *3 fois 2* |
| | *Si j'ai 4 tables combien de chaises je vais mettre*<br><br>*Combien de chaises pour 4 tables?*<br>*Où je mets la parenthèse?* | E: *4*<br>E: *Non*<br><br>E: *4x2+2*<br>E: Toujours le premier |
| | *Si j'ai 5 tables combien de chaises je vais mettre autour de 5 tables*<br><br>*Ça vous donne*<br><br>*Ici ça donnait quoi Nadine?* | E: *5x2+2*<br><br>E:*12*<br><br>E: *10*<br>E: *Ça augmente de 2* |

Elle applique la formule.

Notons que le fait que tous ont trouvé la même chose fait conclure aux élèves que la réponse est bonne (1). La stagiaire ne relève pas cette affirmation, mais elle pose la question "*Est-ce que ça marche?*" se satisfaisant d'un "*ouais!*" comme réponse, à moins que ce qui suit (2) ne serve à répondre à la question puisque, dans la planification, la conclusion "*Donc ça marche tout le temps*" vient après l'application de la formule à différents cas particuliers comme elle le fait ici en (2). Les schémas ci-dessous montrent les différences entre la planification et la prestation.

| les élèves utilisent un cas particulier | → | le stagiaire force l'écriture générale et fait expliquer | → | Ça marche? | → | application de la formule |
|---|---|---|---|---|---|---|

Prestation de Brigitte, retour sur les formules.

| mise en commun des formules | → | explication générale | → | application de la formule | → | ça marche toujours. |
|---|---|---|---|---|---|---|

Planification de Brigitte, retour sur les formules.

Lors de la prestation, la question "*Est-ce que ça marche?*" suivie de l'application à différents cas particuliers montre que la formule s'applique et alors, conjointement avec l'explication qui a précédé, peut renforcer la compréhension de la formule générale d'autant plus que dans la prestation, la procédure de calcul (toujours la même) est présente.

*Fonctions de la validation: revenir sur la tâche et passer à autre chose*

De plus, la résolution du problème est terminée quand on a trouvé une *manière de faire* qui permet au concierge (protagoniste du problème des Tables de Brigitte) de *savoir rapidement combien de personnes il peut asseoir autour de n'importe quel agencement de tables.* La question "*Est-ce que ça marche?*" renvoie peut-être à cette tâche et à l'application que pourra en faire le concierge, comme nous l'avons vu dans la prestation de Tim.

Ainsi, le problème étant résolu, la stagiaire passe à autre chose: "*Qu'est-ce qui se passe si je vous dis il a mis 14 chaises?*" Il s'agit d'un autre problème à résoudre.

*Fonctions de la validation: rassembler autour d'une même tâche pour faire progresser le groupe*

Une autre fonction peut être associée à l'étape post-formulation, étape qui contient une part de *validation*, selon la stagiaire elle-même. Cette étape menée par la stagiaire permet de rassembler tous les élèves dans une tâche commune qui assure que tous sont au même point et que tous avancent ensemble, avant d'entreprendre autre chose. Lors de la prestation, il nous semblait que la stagiaire voulait forcer la généralisation en faisant effectuer des calculs sur différents cas particuliers. Ceux qui alors n'avaient pas saisi la structure générale du calcul pouvaient le faire.

En bref, après avoir expliqué la formule, celle-ci est appliquée à divers cas particuliers, ce qui peut avoir pour effet de renforcer la compréhension de la formule générale qui peut être appliquée à tous les cas possibles, semblablement à Marcel dans sa planification. C'est comme s'il y avait un mouvement d'induction après coup, une fois la formule construite; ce mouvement participe à la validation de la formule dans la mesure justement où il renforce la conviction que la formule permet de produire toutes les réponses voulues. Nous identifions donc une double fonction à cette étape de validation: convaincre de l'applicabilité (générale) de la formule et aider à la compréhension de la formule générale. De plus, l'application de la formule peut consister en un retour sur la tâche de départ et l'étape où prend place la validation peut permettre de s'assurer d'une certaine progression des connaissances de tous en même temps.

c. **Invalidation**: le cas de la prestation de Lucette

Dans la prestation de Lucette, nous observons aussi une dissociation des tâches de formulation et de validation comme dans la planification de Marcel et de Brigitte et de manière encore plus évidente.

Lucette propose aux élèves un problème de frise: des triangles sont construits à l'aide de cure-dents et il faut déterminer le nombre de cure-dents nécessaires pour construire une frise comme ci-dessous, peu importe le nombre de triangles.

Le problème est précédé d'un exercice consistant à identifier la régularité dans des suites de lettres, de nombres ou de formes. L'activité de la frise de triangles est présentée dans le prolongement de cet exercice. Cette fois cependant, les élèves devront construire une formule. À la fin, la stagiaire reviendra sur les suites pour conclure.

Dans la présentation du problème, comme les autres, elle utilise un grand nombre pour faire saisir la consigne. Immédiatement après, elle donne comme indice qu'il s'agit d'une suite. Puis, elle présente des frises de cure-dents à 1, 3 et à 4 triangles: "*Si t'as besoin d'un triangle, t'as besoin de combien de cure-dents? 3 triangles?...*" Elle compte le nombre de cure-dents nécessaires et fait réaliser aux élèves que le nombre de cure-dents augmente de deux lorsqu'on passe d'une frise à l'autre. Comme d'autres (Ginette en particulier), elle a de la difficulté à faire confiance aux élèves malgré ce qu'elle en dit. Lorsque les élèves travaillent, elle laisse comme support la représentation suivante, projetée sur le mur:

Les extraits de la prestation qui suivent rapportent l'étape de formulation des messages par les élèves. Cette étape est d'abord annoncée comme une correction. Puis, Lucette demande aux élèves de donner leur message. La stagiaire manipule les cures-dents au rétroprojecteur en même temps que les élèves donnent leur formule. Les deux premiers élèves (E1 et E2) expliquent comment ils pensent et Lucette reprend ce qu'ils disent. Ces deux élèves ont produit une formule erronée. Toutefois, lorsque d'autres élèves veulent intervenir, Lucette reporte à plus tard la vérification des formules. Ainsi, elle peut recevoir toutes les formules, justes ou fausses. Le troisième élève (E3) a produit une bonne formule, mais il ne donne que les opérations à effectuer (fois 2 + 1) et lorsque la stagiaire veut lui faire préciser à quoi sont appliquées ces opérations, l'élève se trompe disant qu'il faut multiplier par 2 le <u>nombre de cure-dents</u> alors qu'il aurait fallu dire <u>nombre de triangles</u>. La stagiaire tente d'éclaircir ce point mais sans succès.

Extrait de Lucette, sec. 1: retour sur les formules, problème des Triangles (prestation)

| **Stagiaire** | **Élèves** | |
|---|---|---|
| *Si vous voulez parler, on va corriger.* | | |
| Échange élève 1 avec stagiaire | | |
| *Vous levez la main ceux qui ont trouvé un message en mots.* [Intervention disciplinaire] | E1: *Pour faire un triangle, ça prend 2 cure-dents...* [inaudible] | |
| *Je vais essayer de reprendre son idée dans mes mots. Pour le 1er triangle on prend, 3 cure-dents.*[60]<br>Elle écrit: *Pour le 1er triangle on prend, 2 cure-dents. Tout le monde prend ça en notes... Pour le triangle suivant, donc le 2e ici, étant donné qu'il y en a un cure-dent en commun aux 2 triangles, on en compte seulement 2. (...) C'est ça?*<br>Elle écrit: *...et 2 cure-dents pour tous les autres.* | E1: *2 cure-dents* | Elle reprend ce que l'élève dit. |

[60]Elle dit 3, mais écrit 2 comme l'a dit l'élève.

| | | |
|---|---|---|
| *As-tu un autre message? Ou est-ce que c'est bien expliqué ton message?* | E1: *Oui*<br>Plusieurs élèves lèvent la main.<br>E: *Il y a 2 cure-dents...* | Les élèves réagissent. |
| *... Avant on va sortir les messages après on les vérifie.* | | Elle reporte à la fin la vérification. |

Échange élève 2 et stagiaire

| | | |
|---|---|---|
| | E2: *Pour faire un triangle il y a 3 cure-dents, si on veut avoir un grand nombre par exemple 7 triangles, on fait 7 triangles fois 3 cure-dents parce qu'il y a 3 cure-dents dans chaque triangle.* | L'élève justifie. |
| *Chaque triangle est composé de 3 cure-dents.*<br>Elle a construit un triangle.<br>*SVP. On rit des autres mais pas...*<br>*Si tu en as 7, tu fais fois 3.*<br>*En d'autres mots, on multiplie*<br>*on multiplie le nombre de triangles par 3.*<br>*C'est ça ton message?* | Rires<br><br>E2: *Oui*<br>E2: [inaudible] | |
| La stagiaire répète et écrit ce que l'élève dit. | E2: *Non, on multiplie le nombre de cure-dents par le nombre de triangles* | Elle répète ce que dit l'élève. |

Échange élève 3, stagiaire et classe.

| | | |
|---|---|---|
| *Quoi fois 2 plus 1? (...)*<br>*Qu'est-ce qu'on multiplie par 2?*<br>*On fait cure-dents fois 2 plus 1*<br><br>*Ça revient à dire t'en as 3 au début, comme l'autre t'en a 1 de commun, ça fait 2 plus 2 plus 2 plus 2* | E3: *les bâtonnets*<br>E3: *Le premier on en a 3 donc on ajoute 1 parce qu'on en a pris 2.* [Pas clair.] | L'élève justifie. |
| *Qu'est-ce qu'on multiplie par 2, le nombre de triangles ou le nombre de cure-dents*<br>*Qui a dit triangles? Explique ton idée.* | E: *...le nombre de cure-dents...* [pas clair] | Elle demande d'expliquer. |

La première étape constitue une étape de formulation et d'explications par les élèves de leur formule. Ces explications ne sont toutefois pas discutées. Lorsque des élèves réagissent à une formule erronée, Lucette reporte à plus tard leur vérification: "*Avant on va sortir les messages après on les vérifie*". Toutefois, cette vérification ne sera jamais l'occasion de revenir sur les explications des élèves comme nous le montre la suite du protocole ci-après. Durant l'étape de vérification, Lucette manipule les cure-dents pour construire des frises.

Extrait de Lucette, sec. 1: retour sur les formules, problème des Triangles (prestation)

| Stagiaire | Élèves | |
|---|---|---|
| **Vérification de la première formule.** | | |
| *Rapidement nous allons voir les messages*<br>*On prend 2 cure-dents pour le premier*<br>*et 2 pour tous les autres. Est-ce que c'est bien? ...*<br><br>*J'en prends seulement 2* <br>*J'en prends 2 ensuite 2 autres pour le 2e ensuite 2 autres pour le 3e.*<br><br>*Est-ce que ça va?* <br><br>*Rejeté*<br>*Vous attendez avant de serrer vos choses.* | Es: *Non* | Exemple pour rejeter. |
| **Vérification de la deuxième formule.** | | |
| *2e. On multiplie le nombre de cure-dents par le nombre de triangles. Qui m'avait... Tu peux me l'expliquer.*<br><br>*Quel est le nombre de cure-dents?*<br>*On prend le nombre de cure-dents, 5*<br>*On voit sur un exemple que c'est pas bon. Désolé. Rejeté.* | E2: Avec 2 triangles il y en a 6, non il y en a 5!<br><br>E2: Ici 5<br>E2: *Ah! non c'est pas bon!* | Elle demande d'expliquer<br><br>Exemple pour rejeter. |
| **Vérification de la troisième formule.** | | |
| *Le dernier, allez vous sauver mon orgueil! Fois 2 plus 1. Qui peut me l'expliquer?*<br>*Si 2 triangles Combien de cure-dents?*<br>*Qui peut l'aider?* | E: 2<br>E: *On compte les couples de 2 ; il y en a 2; 2 fois 2 cure-dents+1* | Elle demande d'expliquer.<br><br>L'élève voit la régularité |
| *Le 1er 2 c'est un nombre de quoi? Est-ce que c'est le nombre de cure-dents? Si on fait nombre de cure-dents, 5, fois 2 plus 1, 11*<br><br>*C'est bien! Au début, vous connaissez le nombre de triangles, on vous demandait le nombre de cure-dents. On écrit quoi comme message.* | E: *nombre de triangles* | |
| *Qu'est-ce qui est très important ici: les triangles sont toujours placés de la même façon. (...)* | E: *Si on plaçait les triangles de l'autre façon* | |
| *Le message. Prenez en notes. On fait le nombre de triangles multiplié par 2 + 1. Il faut quand même l'écrire, c'est un message qui est bon.* | | Le bon message à noter. |
| [Menace de retenue. Cloche sonnée. Elle passe quand même à la conclusion.] | | |

*Fonctions de la validation: invalider les formules et les clarifier.*

L'étape de vérification sert à invalider ou à clarifier les formules. Pour réfuter une formule erronée, Lucette vérifie qu'elle ne fonctionne pas à partir d'un exemple tout en construisant la frise. Toutefois, elle ne semble pas avoir l'intention de montrer pourquoi ça ne fonctionne pas. Bien que pour la première formule (2 cure-dents pour chaque triangle), la construction montre qu'il manque un cure-dents, elle ne relève pas cet aspect. Bien sûr, en le montrant, elle court-circuiterait la vérification de la dernière formule (2 cure-dents pour chaque triangle + 1). Mais clairement les contre-exemples ne semblent pas avoir pour objectif de faire comprendre mais seulement de déterminer si c'est bon ou non. Nous le voyons pour la première formule mais surtout pour la deuxième: *on multiplie le nombre de cure-dents par le nombre de triangles*. Ce message cache un raisonnement proportionnel à contrecarrer. En effet, selon l'explication même de l'élève, et malgré la formule qu'il exprime, celle-ci aurait dû se lire "*trois fois le nombre de triangles*". Or, Lucette donne un contre-exemple qui montre que le nombre de cure-dents d'une frise multiplié par le nombre de triangles ne donnent pas le nombre de cure-dents sans revenir sur le raisonnement à la source de la formule (on multiplie par 3 parce qu'il y a 3 cure-dents par triangles). Pour la dernière formule *(fois 2 + 1)*, la bonne, un élève exprime bien la régularité. Il reste alors à la stagiaire à régler une ambiguïté: est-ce le nombre de triangles ou le nombre de cure-dents qu'il faut multiplier par 2? L'intervention de la stagiaire consistera à clarifier ce point.

Lucette ne montre pas ce qui ne va pas dans la formule, elle rejette ou clarifie à l'aide d'un exemple; ceci ne satisfait toutefois pas tous les élèves. L'étape de conclusion, que nous reprenons maintenant, est éclairante sur ce point.

Extrait de Lucette, sec. 1: conclusion, problème des Triangles (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| *À quoi ça nous sert de multiplier par 2 plus1* | E: *dans un triangle il y a trois cure-dents, si on fait juste fois 2 il va manquer une partie.*<br>*Il faut ajouter le 1* |
| *À quoi ça nous sert ce message? Forcez-vous. À calculer quoi?*<br>*Le nombre de triangles oui mais chacun des termes de la suite.*<br>[Les élèves se lèvent.] | E: le nombre de triangles |

Stagiaire/ élève, 2 longueurs d'onde différentes.

L'étape de conclusion montre que la stagiaire et l'élève sont sur deux longueurs d'ondes différentes: leur projet est différent. Alors que Lucette veut lier l'activité réalisée au travail sur les suites qui faisaient l'objet de la première partie de la leçon, un élève poursuit une argumentation sur la nécessité d'ajouter un cure-dent si on compte deux cure-dents par triangle. En fait, Lucette n'a jamais été jusque là lors de la vérification des formules. C'est comme si l'élève fermait la discussion en montrant pourquoi il fallait qu'il en soit ainsi. D'une certaine manière, l'élève comble les lacunes de l'argumentation, comme si la stagiaire n'avait pas fait son travail correctement.

*Fonction de la validation: corriger (bon/pas bon)*

L'étape de vérification des formules, (bonnes ou pas bonnes), ne dépasse guère une simple correction. Les étapes de formulation et de vérification apparaissent semblables à celles que nous avons souvent observées dans les prestations lors de la correction d'un exercice ou d'un devoir: les élèves donnent leur réponse, les expliquent éventuellement, et l'enseignant confirme ou rejette, par autorité avec au plus, un calcul montrant que c'est bon ou un contre-exemple montrant que c'est faux. Le contre-exemple ne sert pas à la construction du savoir, ou n'éclaire pas sur la formule. Non plus, nous semble-t-il, les raisonnements des élèves ne sont utilisés par la stagiaire pour comprendre ou statuer sur un énoncé.

Pour les élèves, l'enjeu de cette leçon semble la résolution du problème donc la production de formules justes. En effet, ils justifient, de manière maladroite, partielle et parfois erronée, mais ils expliquent comment ils ont raisonné pour obtenir leur formule. De plus, ils veulent intervenir lorsqu'un message faux est produit. À la fin, même dans la conclusion de la leçon, un élève argumente sur la construction de la formule. Quant à Lucette, elle freine les élèves dans leur désir d'intervenir sur les formules des autres. L'étape de formulation n'est pas le moment de se prononcer sur les formules. C'est l'étape de vérification qui a cette fonction. De plus, si Lucette demande des explications, celles-ci ne semblent pas viser le partage d'une compréhension des fondements de la formule.

La prestation de Lucette met en évidence des contraintes de gestion des activités dans la classe: 1) si elle entreprend une discussion dès le départ, les élèves ne pourront pas tous exposer leur production; 2) si le contre-exemple est utilisé pour faire comprendre, rien ne sert de vérifier les autres formules. Ces contraintes font qu'au bout du compte l'étape de validation ne sert à rien de plus qu'à corriger, voire à invalider ou clarifier certaines formules. Nous avons observé un phénomène semblable chez Marcel qui dissocie lui aussi la formulation de la validation. Lors de la prestation de Marcel toutefois, les élèves ont produit des formules justes et ont expliqué leur formule. En ajoutant une période de validation, Marcel ne pouvait rien faire d'autre que de se rabattre sur une vérification permettant de constater que l'on obtient la bonne réponse.

Un autre aspect que nous constatons chez plusieurs stagiaires paraît important. Dans l'étape de vérification chez Lucette, c'est uniquement la justesse de la formule produite qui est en jeu. En aucun cas, même dans l'étape de formulation, les explications de comment les formules ont été produites ne sont discutées. Ainsi la vérification n'est pas l'occasion de discuter des arguments. Dans ce cas, puisque les explications ne sont pas partie prenante dans le "processus de validation", celles qui sont adéquates comme celles qui ne le sont pas sont reçues également. En fait, probablement que Lucette ne considère pas les explications comme des arguments pouvant servir à valider les formules, d'autant plus que lors de sa prestation celles-ci sont le plus souvent fausses. Mais Marcel non plus ne semblait pas reconnaître les explications justes des élèves comme des arguments potentiels de validation. Comment considérer des arguments qui sont parfois justes mais aussi mal articulés et parfois faux? Pour le faire, il faudrait accepter que des arguments de validation soient discutables et qu'ils peuvent se construire collectivement. En fait, si les explications ne sont pas considérées comme ayant un potentiel de validation, il ne reste que les calculs pour distinguer les formules justes des fausses. La vérification de Lucette est semblable aux vérifications par la réponse (point 1) observée dans les prestations de Marcel et Tim.

#### 6.3.3.3 Fonction de la validation lors de la discussion sur l'équivalence des formules

L'activité de généralisation comprend quelquefois une étape qui porte sur l'équivalence des formules produites. Nous identifions deux fonctions à la validation qui a lieu alors.

*Fonction de la validation: Faire comprendre*

Nous avons déjà indiqué dans la section 6.3.2 les arguments utilisés par Ginette, Brigitte et Marcel. Ginette veut utiliser *une bonne verbalisation* et justifier *en utilisant les propriétés;* Brigitte s'appuient sur le sens des opérations et leurs propriétés et Marcel, sur la manière dont le dénombrement a été fait en restant très près du contexte. Nous associons à ces justifications la fonction de faire comprendre pourquoi ces formules en apparence différentes sont équivalentes. Dans le cas de Ginette, la justification par les propriétés pourrait aussi avoir une fonction de vérification.

*Fonctions de la validation: vérifier, montrer l'équivalence et introduire la notion*

Cécile semble montrer l'équivalence en remplaçant les deux expressions algébriques par une même valeur. Les élèves viennent de résoudre le problème des Tables et ont donc eux-mêmes produit des formules. L'équivalence de ces formules est introduite par la stagiaire via des réponses égales et non en s'interrogeant sur les raisons qui font que les deux formules sont égales. C'est pourquoi nous l'associons à une vérification par la réponse qui aurait pour fonction bien plus de montrer l'égalité, d'introduire l'idée, que de la prouver ou de la faire comprendre.

Cécile a également produit des leçons sur le calcul algébrique, leçons qui appartiennent au groupe 1. Pour ces leçons, il nous semblait que l'argumentation qui menait à la règle reposait, comme ici, sur la réponse obtenue avec le matériel plutôt que sur les propriétés qui y mènent. Notons que Cécile associe l'équivalence des expressions aux égalités conditionnelles des équations[61]: *"je désignerais l'équivalence par le signe d'égalité entre les deux expressions pour amorcer l'équivalence entre deux quantités (très utile pour la résolution d'équations)"*. Cette constatation soulève des questions qui mériteraient d'être étudiées. Quel est le sens de la lettre dans les identités? Se pourrait-il que la conception de la lettre, uniquement vue comme inconnue, perturbe la validation générale des formules et de leur équivalence.

Dans la section 6.3.4, nous poursuivrons notre réflexion sur les vérifications par la réponse par l'analyse d'une activité de comparaison d'Alain et un retour sur le cas de Bernadette (groupe 1).

### 6.3.4 Compléments d'analyse

Nous présentons maintenant deux analyses complémentaires. La première (6.3.4.1) complète celle sur les situations d'équivalence présentée à la section 6.3.3. Elle traite a) d'une activité où il faut déterminer si une égalité est vraie ou fausse; b) d'une activité de comparaison d'expressions algébriques et c) des leçons sur le *domaine de la variable* et la *valeur numérique d'une expression algébrique*. La deuxième analyse

[61]Ce, malgré que dans le cours de didactique de l'algèbre suivi par cette stagiaire, la différence entre expression algébrique, équation comme égalité conditionnelle et identité aient été discuté.

(6.3.4.2) complète celle sur l'activité de généralisation elle-même, présentée à la section 6.3.3. Elle traite a) de quelques autres planifications qui ont pour objectifs d'amener les élèves à la construction d'une expression algébrique, notamment celles de Denis et de Paul et, b) des leçons qui portent spécifiquement sur les suites numériques.

### 6.3.4.1. Analyse complémentaire sur l'équivalence et la comparaison d'expressions algébriques

#### a. Égalité vraie ou fausse

Les arguments utilisés au moment de la discussion sur l'équivalence des formules, dans le prolongement des activités de généralisation, s'appuyaient sur le contexte dans un cas, sur le sens et les propriétés des opérations, dans deux cas et sur la réponse obtenue par calcul dans un autre cas. L'exemple que nous présentons maintenant est un autre exemple de vérification par la réponse. Il s'agit de la prestation de Bernadette qui appartient au groupe 1; nous l'avons analysée la dans la section 6.2.4. À ce moment-là, Bernadette gérait la séance de correction d'un devoir donné par l'enseignant associé. Nous avons noté que l'exemple numérique avec comparaison des réponses était privilégié et même qu'il prévalait sur les propriétés des opérations. L'extrait rapporté maintenant peut laisser croire à l'élève qu'un exemple suffit. Les élèves devaient se prononcer sur la vérité (vrai ou faux) d'un énoncé.

Extrait de Bernadette, sec. 2: correction d'un devoir (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| *C'est vrai. Mais on dit bien "pour tout nombre". Ici on a un exemple où c'est vrai. Est-ce qu'il n'y aurait pas un autre exemple où ce serait faux?*<br><br>*...Non, c'est faux*<br>*Quelle aurait dû être la vraie réponse pour s+s?* | E1: *On a* $s + s = s^2$.<br>$2+2 \quad 2x2$<br>$4 = 4$<br><br>E: *Si on remplace s par 6...*<br>$12 = 36$<br><br>E: $2s$ |
| *On va vérifier.* $2x6=12 \quad 12 = 12$ *donc c'est vrai* | |

*Fonction de la validation: invalider plus que valider*

Nous voyons dans cet extrait, que du même coup, la stagiaire insiste sur le "pour tout nombre" lorsque l'énoncé n'est pas toujours vrai *($s + s = s^2$)* et utilise un seul cas pour répondre à la question, lorsqu'un énoncé est vrai *($s + s = 2s$)*. L'exemple et le contre-exemple sont utilisés exactement de la même façon: on produit un "pour-exemple" comme on produit un "contre-exemple". Il ne s'agit pas tant d'argumenter pour montrer que l'énoncé est juste mais d'illustrer ce qu'on sait déjà être vrai.

Bien sûr, les consignes pour l'exécution des exercices par les élèves et la correction de ceux-ci par la stagiaire ont pu être données par l'enseignant-associé. Toutefois, la stagiaire maintient cette même vérification dans ses propres planifications lorsqu'elle présente les opérations sur expressions algébriques: *"Un moyen de vérifier si notre réponse est bonne serait de remplacer la variable par un nombre (ex: x=2) dans l'énoncé de départ et dans l'énoncé final."* (planification sur les opérations sur les expressions algébriques, groupe 1). Cette vérification ne permet pas de valider l'équivalence, elle peut tout au plus permettre un certain contrôle de l'action; elle peut nous donner une indication comme quoi il y a de bonnes chances que les opérations soient bien exécutées. Mais Bernadette ne précise rien à cet effet. De plus, elle n'est pas la seule à utiliser une telle vérification.

**b. Comparaison d'expressions algébriques**

Tim, Blanche et Alain donnent aux élèves des tâches de comparaison d'expressions algébriques. Pour Tim et Alain, ces tâches sont tirées du manuel (*Carrousel, Mathématiques II*, p. 189). Nous en trouvons un exemple dans l'extrait de la planification d'Alain donné plus loin. Tim ne nous fournit pas d'information sur la façon dont il s'y prendra pour comparer les expressions. Blanche utilise la droite numérique pour comparer des expressions algébriques. Nous trouvons de ces exercices dans le manuel; par exemple, sachant que "x" est positif, il faut situer approximativement x/2 sur la droite numérique.

> <u>Extrait de Blanche, sec. 2: comparaison d'expressions algébrique (planification)</u>
> ***"Je chercherai à montrer à l'élève, à partir d'une représentation visuelle, comment on peut situer les expressions algébriques l'une par rapport à l'autre sans connaître réellement la valeur numérique de chacune. De plus, la droite numérique permettra d'accorder une signification particulière à la variable quant à son domaine. L'élève devra, à l'aide de la droite numérique, être en mesure de se donner une représentation générale des expressions algébriques."***

Quant à Alain, ses planification et prestation révèlent deux comportements différents. Rappelons que pour l'activité de généralisation, Alain distinguait *clarification* et *validation*, cette dernière reposant sur les propriétés de la figure. Pour la tâche de comparaison d'expressions algébriques présentes dans une planification subséquente, son objectif est particulièrement de *développer* chez les élèves *l'esprit* *critique*, conformément aux objectifs du programme d'études. Toutefois, malgré ses intentions, nous retrouvons encore ici un recours à la réponse pour montrer quelle est l'expression la plus grande. Il est possible que les calculs n'aient pour fonction que d'illustrer (et non de valider), mais la marge est parfois mince comme nous allons le voir.

*Illustrer ou valider?*

Dans sa planification, Alain anticipe chez les élèves des explications qui ne reposent pas uniquement sur un calcul particulier.

> <u>Extrait d'Alain, sec. 2: comparaison d'expressions algébriques (planification).</u>
> *"Quelle expression algébrique représente généralement la plus grande valeur si n est un entier positif:*
> *1) n+2 ou n-2?*
> *Élève: n+2 parce qu'une même valeur se trouve ici à être augmentée tandis que pour l'autre l'expression est diminuée.*
> *(...) 4) n /2 ou n-2?*
> *Élève: Pour n=1, 2 et 3, la valeur de n/2 est plus grande alors que pour n=4 les expressions sont égales. Ensuite n-2 est plus grand car au lieu de diminuer de moitié, nous enlevons uniquement 2."*

Lors de la prestation, l'explication (s'il s'agit d'une explication) s'appuie complètement sur les réponses obtenues par calculs, comme le montre l'extrait ci-dessous.

Extrait d'Alain, sec. 2: comparaison d'expressions algébriques (prestation)

| **Stagiaire** | **Élèves** |
|---|---|
| *2n ou n/2?*<br>*Excellent. Un exemple?* | *2n*<br>*Si n vaut 4 ça fait 8 pi l'autre 2.* |
| *D'autres choses à dire? Parfait.*<br>*n/2 ou n-2?*<br><br>*Pourquoi tu dis ça dépend, donne des exemples...*<br><br>*Si on a la valeur 4, les expressions sont égales. Il doit y avoir des exemples pour lesquels c'est pas égal? Quelqu'un peut aider?*<br><br>*Quelle valeur est la plus grande?*<br>*Si on prend les valeurs 1, 2, 3 ça va être n/2 qui va être plus grand, 4 ça va être égal, plus grand ça va être*<br><br>*n-2 sauf pour les valeurs où n=0, 1, 2, 3, 4* | *Ça dépend.*<br><br>*E: Mettons que j'ai 4 ça fait 2*<br><br>*Mettons que j'ai 1, n-2 > n/2*<br><br>*E: Qu'est-ce qu'on marque?* |

Il demande des exemples.

Les élèves ne savent pas quoi écrire.

Nous constatons que dans le cas d'une réponse toujours vraie, Alain utilise un exemple alors que dans le cas où "ça dépend", il demande de produire des exemples pour chacune des possibilités; c'est le même comportement que celui de Bernadette. La planification d'Alain diffère légèrement de sa prestation et montre un glissement comme c'était le cas pour Marcel. Mais déjà dans les consignes du devoir prévu pour la leçon, détaillées dans la planification, Alain demande à l'élève *un exemple pour signifier son choix.* Alain ne demande pas de justifier ou d'expliquer, il demande seulement de *signifier son choix.* Il peut ne vouloir ces exemples qu'à titre illustratif et ne pas avoir d'intention de validation, mais parfois la différence n'est pas grande, comme le montre cet autre extrait, tiré de sa prestation.

Extrait d'Alain, sec. 2: comparaison d'expressions algébriques (prestation)

| Stagiaire | Élèves |
|---|---|
| *Quelle expression prend la plus grande valeur si n est un entier positif, n+2 ou n-2?* | *n+2* |
| *Peux-tu donner un exemple de ceci?* | *3+2* |
| *3 tu l'as pris pour remplacer n. Si n=3, n+2 va donner 3+2 qui donne 5. Pour l'autre expression n-2 = 1 donc n+2 > n-2.* | |

Il demande un exemple

Il conclut de l'exemple.

L'utilisation des cas particuliers dans ces tâches de comparaison d'expressions algébriques, équivalentes ou non, pourrait s'expliquer par des facteurs qui n'ont rien à voir avec la tâche demandée comme l'obligation qu'ils se font d'effectuer les exercices du manuel, la difficulté des stagiaires à lier ces exercices avec les autres activités et les erreurs répétées des élèves dans des tâches de calculs. En cherchant à identifier la fonction des vérifications dans les tâches de comparaison par rapport à l'ensemble de la leçon, elle nous est apparue déterminée par le contenu présenté juste avant la tâche de comparaison: le domaine d'une variable et la valeur numérique d'une expression algébrique. Nous faisons maintenant l'analyse de ces leçons connexes aux activités de généralisation.

#### c. Domaine d'une variable et valeurs numériques d'une expression algébrique

Nous avons noté l'utilisation de vérifications par la réponse à plusieurs occasions. Nous avons noté ces vérifications entre autres au moment où on demande aux élèves de comparer des expressions algébriques (point 2) ou de se prononcer sur l'égalité entre deux expressions (point 1). Pour ces occasions en particulier, nous avons trouvé des éléments d'explication dans des leçons ou parties de leçons connexes, celles sur le domaine d'une variable et la valeur numérique d'une expression algébrique. Nous sommes arrivée à la conclusion que l'introduction de la notion de domaine, avec l'ensemble des valeurs possibles, légitimait en quelque sorte le recours aux calculs particuliers. Nous disposons de quatre planifications qui portent sur la notion de domaine et sur celle de valeur numérique d'une expression algébrique qui en découle. Deux de ces leçons planifiées sont enregistrées (prestations), celles de Tim et celle d'Alain.

D'abord, le traitement de ces notions nous est apparu étrange. Tim prend la peine de distinguer un domaine pré-déterminé d'un domaine fixé arbitrairement par celui qui calcule; le domaine peut alors se résumer à une seule valeur, celle qui intéresse celui qui résout le problème comme il l'indique dans sa planification:

> Extrait de Tim, sec. 2: domaine d'une variable et valeur numérique d'une expression algébrique (planification)
> *"Je veux leur faire voir que le domaine d'une variable, aussi appelé ensemble de référence, est un ensemble de nombres tels que N et Z ou un ensemble de nombres que l'on fixe soi-même. J'expliquerai l'affirmation "que l'on fixe soi-même" en écrivant une expression algébrique et en montrant que l'on peut se donner un domaine quelconque pour obtenir seulement l'information désirée.*
> *Exemple: Une formule pour changer la température °C en °F*
> *F=9/5C+32.*
> *Je veux savoir la température de l'eau de ma piscine en °F si elle est de 25 °C.*
> *Je me fixe un domaine car je veux seulement la température en °F correspondant à la valeur en °C."*

Sa façon de voir est certes réductrice, voire fausse. Le domaine est fixé arbitrairement et n'a rien à voir avec le domaine de validité ou de variabilité de la fonction. Alain quant à lui semble vouloir absolument distinguer le travail que l'on réalise dans un contexte donné du travail que l'on réalise sans contexte de la vie courante. Dans sa planification, bien qu'utilisant une formule construite lors d'une activité de généralisation semblable à celles décrites précédemment, il dit ne pas vouloir référer au contexte. Alors, sans ce contexte, la variable pourra prendre *n'importe quelle valeur* puisque *c'est une variable*. C'est tout au moins l'argument qu'il comptait utiliser. Lors de la prestation, Alain reprend la même formule mais la situe cette fois dans le contexte du problème qui a été travaillé à la leçon précédente. Il fait effectuer quelques calculs pour finalement dire que dorénavant ils ne travailleront plus dans un contexte et que la lettre pourra prendre n'importe quelle valeur. D'où la définition du domaine: *les valeurs que peut prendre la variable.* Comme il n'y a pas de liens entre la partie des calculs dans le contexte du problème et la partie portant sur la notion de domaine d'une variable et que le superviseur[62] lui a signalé ce fait, Alain produit une planification améliorée dans laquelle il distingue le travail dans un contexte à domaine restreint et le travail hors-contexte à domaine illimité! Dans sa planification améliorée, il signale qu'il veut "*leur montrer les restrictions d'un objet concret et du contexte*", par opposition aux expressions présentées sans le contexte du monde réel. Immédiatement avant l'extrait de la planification améliorée qui suit, Alain vient de montrer que "c", qui représente le nombre de carreaux sur le côté d'une fenêtre carrée, ne peut prendre de valeurs négatives ou décimales. Il veut maintenant montrer que sans contexte, la lettre pourra prendre n'importe quelle valeur.

> <u>Extrait d'Alain, sec. 2: domaine d'une variable et valeur numérique (planification améliorée)</u>.
> *"Moi: Si je prends l'expression suivante 2a+3 sans contexte, quelles valeurs peut prendre la variable a?*
> *Élève: elle ne peut prendre que des valeurs entières et positives*
> *Moi: Est-ce que a représente quelque chose de concret?*
> *Élève: Non ce n'est qu'une variable donc elle peut prendre n'importe quelle valeur.*
> *Nous allons faire les exemples suivants: si a=-3, la réponse sera 3; si a=1/2 la réponse est 4; si a=0,75 la réponse est 4,5.*
> *Moi: Quelles constatations pouvons-nous faire au sujet des valeurs que peut prendre une variable?*
> *Élève: Si on travaille avec une situation et bien la variable ne pourra pas prendre n'importe quelles valeurs, tandis que sans contexte elle pourra prendre n'importe quelles valeurs."*

Il est toutefois obligé d'ajouter:

> *"Moi: Maintenant, il est sûr que je ne vais jamais vous demander la valeur d'une expression pour chacune des valeurs que pourrait prendre une variable. Nous allons nous limiter à certaines valeurs et ces valeurs représentent le domaine de la variable."*

Les deux stagiaires, Tim et Alain, semblent donc sentir le besoin de préciser que l'on peut donner ou se fixer un domaine limité et ce, sans doute, en prévision des exercices qui suivront qui consistent à trouver la valeur numérique d'expressions algébriques à partir d'un domaine donné comportant quelques valeurs numériques.

Pour les deux stagiaires, la suite de la leçon consiste à donner une méthode systématique de calcul et de présentation de ces calculs. Cette méthode est la même pour les deux stagiaires:

---

[62] En l'occurence, nous-mêmes.

*"1) Écrire l'expression algébrique*
*2) Remplacer les variables par la valeur choisie*
*3) Calculer en tenant compte de la priorité des opérations*
*4) Écrire à la verticale*
*5) Effectuer une seule opération par ligne ."*

Tim ajoute à la dernière étape: *souligner chaque opération qu'on effectue.*

Dans sa prestation, Tim ne fait pas la distinction entre un domaine préalablement fixé et un domaine qu'on se fixe soi-même. Mais il insiste beaucoup auprès des élèves sur la méthode: *"ici je vous donne une procédure rigoureuse"*. Les élèves s'interrogent sur la pertinence de cette méthode et le stagiaire passe beaucoup de temps à se justifier en faisant appel à la rigueur et à l'examen. Alain aussi lors de la prestation insiste: *"Je veux que vous suiviez cette démarche. (...) C'est important d'écrire ces étapes une à une. (...) Je ne veux pas que vous sautiez. (...) Je veux la démarche, comment vous êtes arrivés à cette valeur."*

Dans le souci, pensons-nous, de faire le lien avec les exercices du manuel qui suivront, le domaine perd son sens de domaine de validité. L'introduction du domaine paraît n'avoir qu'une fonction, introduire aux calculs de valeurs numériques pour lesquels les élèves éprouvent énormément de difficultés (plusieurs stagiaires le soulignent), donc un travail sur les priorités des opérations qui prend énormément d'importance. Plus, comme dans le prolongement de l'introduction de ces notions on trouve des exercices de comparaison d'expressions, ces exercices seront également récupérés pour travailler ces mêmes habiletés. C'est le cas d'Alain. Bien qu'envisageant une argumentation générale dans sa planification, dans le devoir de cette même planification et lors de la prestation, il demande aux élèves d'accompagner leur choix d'un exemple en reproduisant les calculs selon la méthode vue. Il insiste encore: *"Il est important de bien faire les étapes"*. Voici le type de solution attendu selon le corrigé du devoir fourni avec sa planification:

<u>Extrait d'Alain: domaine d'une variable et valeur numérique d'une expression algébrique (planification)</u>:
*#17 Laquelle des 2 expressions est équivalente à $x+x$ ($2x$ ou $x^2$)?*

*Si $x=3$*

| | | |
|---|---|---|
| $x+x$ | $\underline{2x}$ | $x^2$ |
| $3+3$ | $2*3$ | $(3)^2$ |
| $6$ | $6$ | $9$ |

Alors qu'il planifie une argumentation générale lors du travail en classe, c'est l'exemple numérique avec comparaison des réponses qui est exigé dans le devoir, avec une présentation conforme à la méthode exigée. Dans sa planification améliorée, il précisera qu'il *ne faut surtout pas se contenter d'uniquement un exemple* mais il ne remettra pas en question la démarche exigée pour les élèves.

Ainsi, des activités intéressantes du manuel, qui demandent une réflexion des élèves et une validation, sont converties en exercices où les élèves montrent qu'ils peuvent calculer. La validation a peu affaire dans ces exercices. À notre avis, lorsqu'Alain demande d'effectuer un calcul et de comparer les réponses, il ne s'agit pas tant d'une validation avec utilisation d'un exemple, il s'agit simplement d'utiliser une valeur du domaine pour produire une valeur numérique.

Les extraits qui suivent, tirés des planifications de Blanche sur la comparaison d'expressions algébriques, laissent perplexe encore une fois. Comme nous l'avons déjà dit, Blanche travaille d'abord la comparaison d'expressions algébriques à l'aide de la droite numérique: par exemple, sachant que "x" est positif, il faut situer approximativement x/2 sur la droite numérique (exercice du manuel). Présentant ses intentions, elle dit:

> *"Il sera important de faire ressortir le sens critique de l'élève face à cette méthode. En effet, cette méthode peut être utilisable pour de simples expressions algébriques, mais peut être très complexe lorsque nous voulons comparer de plus grandes expressions. Ainsi les élèves pourront s'apercevoir des limites de l'utilisation de la droite numérique et ceci créera le besoin d'une nouvelle méthode de comparaison qui sera abordée au prochain cours, soit le domaine et la valeur numérique."*

Dans la planification sur le domaine d'une variable et la valeur numérique d'une expression algébrique, elle aborde le sujet à partir d'un exercice de comparaison des expressions algébriques sur la droite numérique, où elle dit qu'il est difficile de situer les expressions; les expressions sont y (avoir de Julie), y+10 et 2(y+10)-8. Elle amène les élèves à dire que ce serait plus facile si on connaissait la valeur de l'avoir de Julie (une des protagonistes du problème). Dans la planification de la leçon suivante, elle dit qu'elle fera *un rappel sur la façon que les élèves ont privilégiée pour comparer les différentes expressions algébriques*, soit celle *de donner des valeurs à la variable.*

Ceci nous laisse croire que l'introduction des notions de domaine et de valeurs numériques d'une expression légitimise en quelque sorte le recours aux calculs et une validation qui repose sur la réponse.

Dans le manuel que tous les stagiaires de deuxième secondaire utilisent *(Carrousel)*, l'introduction de la notion de domaine paraît être un passage crucial d'un mode de validation à un autre. Dans un exercice qui demande de déterminer si deux expressions sont égales *(vrai ou faux? pour tout entier a, 2a + 3a = 5a.)*, le guide d'accompagnement encourage des essais numériques et la recherche de bêtes noires:

> "*Dans la discussion voir à ce que les élèves généralisent à partir de plusieurs cas et leur demander de toujours chercher les bêtes noires; 0 en est une. On cherche l'exception qui infirmera l'énoncé. Si l'on n'en trouve pas, on conclut que l'énoncé est vrai. Cependant cette démarche ne constitue pas une preuve.*" (*Carrousel, Mathématique 2, Guide d'enseignement, deuxième secondaire*, p. 542)

Plus loin (Id. p. 559), pour un exercice de comparaison d'expressions algébriques qu'utilise Alain, le guide précise que l'exercice "*exige que les élèves jonglent avec l'ensemble des valeurs numériques prises par les expressions algébriques*". La validation en conséquence considère cette fois toutes les valeurs possibles. En fait, dans les pages qui précèdent, le manuel introduit les notions de "*Domaine d'une variable et valeur numérique d'une expression algébrique*". Le passage de la vérification sur plusieurs cas en recherchant la bête noire à la considération de tous les cas possibles se fait donc par l'introduction du domaine de la variable.

Les leçons sur le domaine et la valeur numérique, nous apparaissent être déterminantes pour la validation. Toutefois, chez les stagiaires, la validation ne semble pas y gagner, probablement parce qu'ils ne voient pas bien la pertinence de ces notions. Comme les élèves ont beaucoup de difficultés à opérer en respectant les priorités des opérations, il se peut que les stagiaires y trouvent une occasion de travailler cet aspect au détriment de la validation.

### 6.3.4.2. Analyse complémentaire sur les activités de généralisation

#### a. Travail sur les relations dans un problème

L'utilisation d'exemples n'est pas sans intérêt dans les activités de généralisation. Nous avons vu des élèves et des stagiaires utiliser des exemples génériques plus proches de l'expérience mentale que de l'argument pragmatique pour expliquer leur formule. Les leçons que nous présentons maintenant complètent l'information sur l'utilisation des exemples par les stagiaires. Nous les présentons maintenant parce que les exemples sont utilisés avant la formulation et non après comme dans les leçons présentées en 6.3.2 et 6.3.3.

Ainsi, certaines planifications de Patricia du groupe 1, de Blanche, Cécile et les planifications de Denis et Paul apportent quelques informations complémentaires sur les moyens utilisés par les stagiaires pour mener les élèves à la construction d'expressions algébriques et à valider ces expressions. D'abord ces stagiaires utilisent plusieurs exemples numériques afin de montrer la structure de l'expression à construire et amener les élèves à produire cette expression. Dans sa planification, Denis demande aux élèves de représenter l'affirmation suivante "John LeClair a 10 buts de plus que Shayne Corson". Les élèves doivent choisir le nombre de buts de Shayne Corson. L'extrait qui suit reprend ce qui est prévu par Denis.
*"Question: Combien de buts a compté Shayne Corson?*

> <u>Extrait de Denis, sec. 2: relation entre les données d'un problème (planification)</u>.
> *"Réponse variable selon les élèves.*
> *J'écris les diverses réponses sur l'acétate car je vais m'en servir plus tard.*
> *Question: Quelle opération avons-nous fait pour savoir combien de buts a compté John LeClair à partir du nombre de buts compté par Shayne Corson?*
> *Réponse: +10*
> *Je demande alors à l'élève qui a reproduit cette situation sur acétate de venir montrer son illustration. (...) Je vais alors bien verbaliser: On dit que Corson a un certain nombre de buts, selon la situation de l'élève et on ajoute 10 pour obtenir le nombre de buts comptés par John Leclair.*
> *Question: Lequel d'entre vous a raison au niveau des buts comptés par Corson? (...)*
> *Réponse: Tout le monde car le nombre de buts compté par Corson n'a pas d'importance, ce qui est important, c'est que LeClair aie 10 buts de plus.*
> *Suite à cette question, j'introduis l'application des lettres en disant:*
>
> *Question: Si Corson a compté "a" buts, combien de buts a fait LeClair?*
>
> *Réponse: a + 10 buts."*

Par ailleurs, nous retrouvons dans une des planifications de Cécile, l'utilisation d'un exemple numérique qui pourrait avoir valeur générique.

> <u>Extrait de Cécile, sec. 2: les expressions algébriques (planification)</u>.
> *"On va vérifier si le message que vous m'avez donné me permet bien de calculer le nombre total de canards que Marc a tués en supposant que Marc a tué 11 canards le premier jour. Que feriez-vous pour calculer le nombre total de canards? (...)"*

Cécile utilise cette question alors qu'elle anticipe dans sa planification un faux message, mais elle l'utilise aussi pour aider à la production de messages à différentes reprises. La question *que feriez-vous* fait abstraction du nombre précis utilisé et permet de reconnaître dans le calcul particulier une procédure générale.

Paul dans ses planifications sur l'équation d'une fonction linéaire utilise aussi cette idée.

Nous trouvons l'utilisation d'exemples qui peuvent avoir une valeur générique aussi chez Marcel et Brigitte dont nous avons analysé les leçons précédemment, mais les exemples sont utilisés après la production de la formule et non avant. Toutefois il se peut, comme nous en avons fait l'hypothèse, que les exemples de Brigitte et de Marcel soient une façon de refaire le mouvement d'induction pour aider les élèves ou pour les convaincre de l'aspect général de la formule.

**b. Leçons sur les suites**

Les activités de généralisation décrites en 6.3.2 et 6.3.3 peuvent se traduire en suites numériques, mais les stagiaires ne l'ont pas fait, tout au moins dans la leçon comportant l'activité de généralisation. Par contre, plusieurs leçons connexes portent explicitement sur les suites numériques. Nous revenons sur ces leçons pour répondre à une question posée préalablement: est-ce que le contexte d'enseignement, notamment celui des suites, influence la validation? Nous pensons que oui dans le cas des leçons sur le domaine (point a3), en deuxième secondaire; mais est-ce le cas pour les suites, plus particulièrement en première secondaire. Les leçons traitant spécifiquement des suites sont peu détaillées et nous apportent peu d'informations. Nous pouvons toutefois dire que dans les planifications et prestations, une grande partie du travail sur les suites numériques consiste à trouver les valeurs numériques d'expressions algébriques. Les effets de ces leçons pourraient rejoindre ceux des leçons sur le domaine d'une variable et la valeur numérique d'une expression algébrique où le travail sur les habiletés de calcul prend toute l'importance au détriment de la validation, étant données les difficultés des élèves.

### 6.3.5 Bilan et conclusion sur les leçons du groupe 2

Les leçons du groupe 2 consistaient en **activités de généralisation menant à la construction de formules**, appelés aussi messages. Selon principalement les intentions formulées dans leurs planifications de leçons, la majorité des stagiaires ont le **projet de donner du** sens au symbolisme ou de faire comprendre le *concept de suites*. Le découpage des planifications et prestations de leçons en étapes nous a permis d'établir le **schéma** type de leurs planifications et prestations: un problème est résolu par les élèves, une période de retour suit consistant en une étape de formulation souvent suivie d'une étape de vérification. Les formules sont ensuite symbolisées si les élèves ne l'ont déjà fait et, dans quelques cas, leur équivalence est discutée. Nous avons déterminé trois lieux de validation: lors de la formulation des messages, lors de l'étape de vérification et au moment de la discussion sur l'équivalence. Pour déterminer la fonction de la validation, nous avons présenté cinq études de cas.

**a. Validation implicite: explication à potentiel de preuve**

La validation qui a lieu lors de l'étape de formulation des messages est **implicite** puisque les stagiaires ne l'identifient pas comme telle. Elle consiste en une explication des fondements qui peut se particulariser à travers un exemple générique qui rejoint parfois l'expérience mentale. Deux stagiaires au moins utilisent ces explications pour **faire comprendre** les élèves et l'étape de formulation semble l'occasion de **partager cette compréhension.** Si ce ne sont pas les stagiaires qui fournissent les explications, ce sont les élèves qui le font spontanément; les situations utilisées, semblables pour tous les stagiaires, ont sans doute un rôle à jouer ici. Nous ne constatons aucune différence dans le comportement des élèves, que les stagiaires aient utilisé ou non un vocabulaire suite (rang, terme), et qu'ils aient donné ou non un indice quant à l'augmentation constante dans le passage d'un terme à l'autre. La situation porte donc à l'explication et les élèves expliquent. Toutefois, certains stagiaires ne semblent pas reconnaître ces explications comme ayant un potentiel de validation.

**b. Validation explicite: vérification de la formule**

L'étape de formulation semble plutôt prévue pour la stricte exposition des messages par les élèves et alors elle est suivie d'une étape explicite de ***vérification*** ou de ***validation.*** Pour ces stagiaires, l'étape de formulation des messages apparaît dissociée de leur validation, comme si les stagiaires voulaient d'abord recevoir les formules et l'explication qui les accompagnent, qu'elles soient fausses ou justes, pour ensuite en discuter. Nous constatons cette dissociation dans les planifications et prestations de la majorité des stagiaires. L'étape de validation, qui constitue un lieu **explicite** de validation, est assumée par les stagiaires, les élèves ayant alors un rôle mineur à jouer contrairement à l'étape précédente de formulation. L'étape explicite de validation permet de **rassembler** les élèves autour d'une même tâche, pour **disposer collectivement** des formules sous la direction du stagiaire qui se sent peut-être par contrat responsable de cette partie. C'est donc l'occasion de rejeter les formules fausses, déterminer les formules justes à retenir et les appliquer. Cette étape, où prend place la validation, peut être associée à une étape d'**institutionnalisation** même si les formules produites ne sont pas objet d'enseignement comme tel. Ce qui était avant propriété individuelle devient propriété de la classe. Nous nous retrouvons donc avec deux fonctions de la validation, selon que la validation est implicite et appartient à l'étape de formulation ou qu'elle est explicite et se situe après, comme nous l'illustrons dans le tableau VIII.

| Lieu de validation | FORMULATION ET EXPLICATION (VALIDATION IMPLICITE) | FORMULATION + VALIDATION EXPLICITE |
|---|---|---|
| Fonction de l'argument de validation | FAIRE COMPRENDRE LES FONDEMENTS DE LA FORMULE | VÉRIFIER L'APPLICABILITÉ OU LA RÉPONSE |
| Fonction de l'étape de validation | PARTAGER LA COMPRÉHENSION | DISPOSER DES FORMULES COLLECTIVEMENT |

**Tableau VIII:** Groupe 2, fonctions de la validation selon le lieu de validation.

Lors de la vérification explicite, les arguments de validation ou de vérification ne sont pas tous pareils et il arrive que les vérifications conservées présentent les caractéristiques générales de la situation.

Dans le cas de formules justes, Tim et Marcel, dans leurs prestations, utilisent une vérification qui consiste à comparer une réponse obtenue avec la formule à la réponse obtenue par constat sur la figure. Ces vérifications ne montrent pas les propriétés de la situation. L'accent est sur la réponse seulement. Nous n'avons rencontré cet argument (vérification des réponses) dans aucune planification des stagiaires. En d'autres mots, il ne serait pas le produit d'une planification: la planification de Tim ne dit rien de l'étape de vérification et dans celle de Marcel, on retrouve un argument différent de celui-là.

Dans le cas de Tim, nous avons conclu que la vérification servait à montrer que la formule était **efficace** pour **répondre à la demande** faite dans le problème, bien qu'il ne s'agisse que d'une vérification ponctuelle. Dans le cas de Marcel, nous pensons que le stagiaire a été piégé par le découpage en deux parties du retour sur les formules: formulation et ensuite vérification. Sa planification présente une vérification d'un autre type que celle réalisée lors de la prestation. Dans sa planification, la vérification utilise plusieurs exemples pouvant chacun isolément avoir une valeur générique. Il y a bien un calcul et une réponse à ce calcul, mais la réponse est accessoire, il ne la vérifie pas. L'analyse de la vérification nous montre une répétition de l'application de la formule et des arguments qui peuvent contribuer à la construction de la formule. La vérification pourrait alors montrer qu'on peut utiliser la procédure sur autant de cas particuliers que l'on veut, que la formule trouvée est **applicable** (et non juste) et remplit donc bien la tâche voulue. Mais plus que ça, contrairement au premier stagiaire, cette vérification a aussi une valeur générique puiqu'elle donne dans chaque cas particulier les propriétés du contexte sur lesquelles on s'appuie. Alors, elle peut aussi avoir pour effet de **renforcer la compréhension de la formule générale**, comme un mouvement d'induction en sens inverse. C'est aussi le cas d'une autre stagiaire bien que l'aspect générique des calculs n'apparaisse pas aussi clairement. Nous trouvons donc ici **deux types de validation** dont les fonctions apparaissent différentes; nous les résumons dans le tableau IX qui suit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Arguments de validation: | La réponse obtenue en appliquant une formule est comparée à la réponse obtenue par un autre procédé. | La formule est expliquée puis les réponses sont produites en appliquant la formule sur plusieurs cas. | Des réponses sont produites en appliquant la formule sur plusieurs cas, les propriétés sont reprises dans les cas particuliers. |
| Fonction: | VÉRIFIER QUE LA FORMULE DONNE LA BONNE RÉPONSE | CONVAINCRE QUE LA FORMULE EST GÉNÉRALEMENT APPLICABLE ET RENFORCER LA COMPRÉHENSION | |
| Résultat: | ACCEPTATION OU REJET DE LA FORMULE | CONSTATATION QUE "ÇA MARCHE" TOUJOURS | |

**Tableau IX:** Groupe 2, fonctions de la vérification explicite selon le type d'arguments.

Dans leurs planifications, plusieurs stagiaires envisagent devoir rejeter les formules fausses, sans trop expliquer comment ils s'y prendront. Lors des prestations, les élèves produisent peu de formules fausses et nous avons donc eu peu d'occasion d'observer les interventions des stagiaires au moment de la réfutation de ces formules. Marcel traite la seule formule fausse produite par un élève comme il a traité les formules justes, c'est-à-dire en comparant la réponse obtenue par cette formule avec la réponse obtenue par une autre formule ou en constatant sur le dessin. Il utilise un contre-exemple. Une seule stagiaire est confrontée uniquement à des formules fausses. Sa stratégie d'intervention consiste à montrer que la procédure ne permet pas d'obtenir la bonne réponse. Cette intervention ne semble toutefois pas vouloir montrer pourquoi la formule ne produit pas la bonne réponse. **L'utilisation des contre-exemples ne sert pas à mieux comprendre.**

**c. Fonction de validation / fonction de gestion**

L'étape de formulation semble plutôt prévue pour la stricte exposition. Mais, les situations portent à expliquer et les élèves expliquent. Malgré cela, des stagiaires ajoutent une étape de validation explicite. Plusieurs explications peuvent être apportées. D'abord les stagiaires n'accordent pas aux explications des élèves une fonction de validation. Deuxièmement, l'explication et la validation ne visent pas les mêmes objectifs: l'explication concerne la compréhension de comment la formule a été construite et la validation concerne le fonctionnement de la formule. Troisièmement, elles ont des fonctions différentes dans l'articulation de la leçon. L'étape de validation aurait davantage une fonction de rassembler, de conclure, de lancer de nouvelles questions. Elle serait plus collective que celle de l'explication, laquelle accompagnant la formulation serait vue comme individuelle. C'est comme si l'explication individuelle ne semblait pas pouvoir être exploitée en classe pour la faire partager et lui conférer un caractère "social" collectif qui la rendrait preuve.

Ainsi le glissement de Marcel d'arguments à valeur générique, dans sa planification, vers une simple vérification de la réponse, dans sa prestation, pourrait s'expliquer. Avec ce glissement, la validation de la formule comme procédure générale s'en est trouvée compromise alors que les fonctions de rassemblement et d'institutionnalisation de la validation ont été préservées. Ce qui nous fait dire que la **validation dans ce cas, sert bien plus la progression et la gestion des connaissances du groupe-classe que l'activité mathématique elle-même.**

**d. Validation lors de la comparaison d'expressions algébriques**

Dans les leçons du groupe 2, nous avons identifié un troisième lieu de validation, celui où est discutée l'équivalence des formules. En complément, nous avons aussi fait l'analyse d'exercices de comparaison d'expressions algébriques. Quatre arguments de validation sont utilisés dans l'ensemble de ces situations. Nous les reprenons dans le Tableau X.

| | | | |
|---|---|---|---|
| On compare les deux façons de dénombrer en s'appuyant sur le contexte et on montre qu'elles sont équivalentes. | On montre qu'on obtient le même nombre (sans calcul) en s'appuyant sur le sens des opérations. | On utilise une bonne verbalisation et les propriétés des opérations pour montrer que les deux expressions sont égales. | On remplace les deux expressions par la même valeur pour montrer que la réponse est la même et que les expressions sont équivalentes. |
| VÉRIFICATION DANS LE CONTEXTE | VÉRIFICATION QUI S'APPUIE SUR LE SENS DES OPÉRATIONS | VÉRIFICATION QUI S'APPUIE SUR LES PROPRIÉTÉS | VÉRIFICATION QUI S'APPUIE SUR LA RÉPONSE |

**Tableau X: Arguments servant à montrer l'équivalence**

Pour les trois premiers stagiaires, outre une fonction de vérification, nous attribuons aux arguments la fonction de **faire comprendre** puisque les stagiaires montrent pourquoi ces expressions sont équivalentes en s'appuyant sur la manière dont le dénombrement a été effectué, sur le sens des opérations et leurs propriétés avec une bonne verbalisation. Ce n'est pas le cas pour le quatrième argument, qui repose sur la **vérification de la réponse** uniquement.

Cette vérification par la réponse est effectuée par trois stagiaires de deuxième secondaire. L'analyse des leçons portant sur le domaine d'une variable et la valeur numérique d'une expression algébrique nous a permis de constater d'abord que le domaine de la variable n'était pas associé au domaine de validité ou de variabilité d'une formule et que l'introduction de la notion de valeur numérique était l'occasion de renforcer des habiletés de calcul dans des chaînes d'opérations. Les tâches que nous avions identifiées comme lieu potentiel de validation étaient alors l'occasion d'appliquer une méthode de calcul. Ainsi, ce que nous pouvions au départ considérer comme une validation, servait **bien plus le renforcement d'habileté de calcul que la validation elle-même.**

**e. Invalidation**

Finalement, les situations de vérification par la réponse s'avèrent être davantage des lieux d'invalidation que de validation, les calculs effectués lors des vérifications servant à rejeter les énoncés ou les formules fausses. La validation serait d'abord vue comme l'occasion d'invalider les formules ou les énoncés et il n'y aurait pas de problème, dans ce cas, à s'en servir pour améliorer les habiletés de calcul, lorsque les énoncés sont sus justes.

**f. Retour sur le projet des stagiaires**

Les activités de généralisation visaient à donner du sens au symbolisme et dans ce sens les stagiaires ont sans doute réussi dans la mesure où les élèves eux-mêmes produisaient les formules en mots, les expliquaient et les symbolisaient. La période de vérification consistant en application de la formule y contribuait sans doute aussi. Outre le projet de donner du sens au symbolisme, les stagiaires n'ont pas exprimé d'intentions explicites de validation lors de la formulation des messages. Comme nous l'avons vu, plusieurs annoncent une période explicite de validation. Toutefois, dans les planifications, le projet n'est pas élaboré et les stagiaires n'ont formulé aucune intention (sauf dans un cas) qui pourrait relever d'un projet de rigueur. Le glissement observé chez un stagiaire d'une validation par application à valeur générique vers une validation par la réponse, l'utilisation à d'autres fins de tâches potentiellement porteuses de validation, le recours aux vérifications par la réponse et le peu de commentaires des stagiaires en rapport avec le type d'explication auquel ils s'attendent, nous laissent croire que les stagiaires n'ont pas de préoccupation explicite de validation qui relèverait d'un projet de rigueur, projet qui consisterait à s'interroger sur les critères utilisés pour valider. Dans les planifications améliorées nous n'avons noté que très peu de commentaires relatifs aux étapes de validation et pas d'amélioration notable. Les étapes de validation n'ont donc pas été soumises à révision. Il nous apparaît important que les stagiaires intègrent la validation à leur réflexion.

Le projet de donner du sens au symbolisme est aussi encouragé dans les cours de didactique qu'ils ont suivis avant leur stage. Les stagiaires se sont fortement inspirés de situations de généralisation qui ont été travaillées dans ce cours pour introduire au symbolisme. Les problèmes choisis et leur formulation respectent des choix faits alors pour amener l'élève à produire une formule générale d'abord en mots puis de manière symbolique. Le déroulement est aussi celui envisagé dans le cours à une exception toutefois: l'étape de validation. Dans le cours, il n'est pas envisagé d'autres lieux de validation que celui où les élèves expliquent leur formule et une validation de l'équivalence par la réponse est rejetée. La planification demandant le découpage de l'activité en étapes a pu contribuer à l'identification d'une étape explicite de validation qui chez certains s'est résumée en simples vérifications par la réponse. Par ailleurs, dans les prestations, la validation ayant lieu souvent une fois que les formules ont été expliquées, il est normal que la validation concerne alors leur fonctionnement ou leur efficacité.

#### g. Influence des notions à enseigner sur la validation des messages

Nous nous interrogions au départ de l'analyse des leçons du groupe 2 sur l'influence de l'orientation "suite" sur la validation. Nous n'avons pas noté de différence dans le comportement des élèves; nous n'avons pas non plus noté de différence notable dans l'articulation des étapes de validation avec le reste de la leçon même si certains stagiaires font précéder ou suivre leurs leçons d'un travail sur les suites. Toutefois, il se peut que l'utilisation abondante des tables de valeurs, lors du travail sur les suites, renforce le recours à une vérification par la réponse. Par ailleurs, en deuxième secondaire, l'introduction des notions "domaine d'une variable" et "valeur numérique" pourrait avoir eu une influence sur la validation, la détournant de son rôle pour travailler d'autres habiletés.

#### h. Résumé

Nous résumons nos conclusions dans l'encart ci-dessous.

**Type d'activités:** activité de généralisation et de comparaison d'expressions algébriques.

**Projet:** donner du sens au symbolisme et faire comprendre les suites.

**Place de la validation:** (1) au moment des explications de comment la formule a été produite, (2) après formulations, lors d'une étape explicite de vérification (3) lors des activités de comparaison ou portant sur l'équivalence.

**Arguments de validation:**
en 1) arguments à potentiel de preuve: explication de comment la formule a été construite;
en 2) vérification par la réponse, vérification par application.
en 3) vérification par la réponse, par propriétés, en s'appuyant sur le sens des opérations et dans le contexte.

**Fonctions:**

- Étape d'explication (en 1): faire comprendre, aider / partager / faire progresser
- Étape de vérification (en 2): vérifier le fonctionnement ou l'efficacité de la formule, invalider / rassembler, déterminer les formules à retenir, corriger, revenir sur la tâche / faire progresser
- Équivalence et comparaison d'expressions algébriques (en 3): faire comprendre / introduire la notion d'équivalence; invalider / travailler des habiletés de calculs.

# CHAPITRE 7
# CONCLUSION

Avant de conclure, il nous apparaît important de rappeler notre problématique et nos objectifs et de décrire brièvement les moyens que nous avons utilisés pour réaliser notre recherche.

## 7.1 Rappel de la problématique et de la méthodologie

### 7.1.1 Notre point de vue

Dans l'enseignement des mathématiques, nous pensons que rigueur n'est pas synonyme de formalisme et que les exigences de rigueur peuvent varier d'un niveau d'enseignement à l'autre. Nous pensons qu'au niveau secondaire doit exister à la fois le projet de donner du sens et le projet de rigueur. Le projet de donner du sens consiste pour nous à faire appel à l'intuition, au bon sens, à l'imagination, aux images, à des problèmes... dans le but à la fois de construire de nouvelles connaissances et de faire comprendre les fondements. Le projet de rigueur consiste à prendre du recul par rapport à l'activité mathématique pour s'interroger sur les arguments qui fondent les règles. Au niveau secondaire, le projet de rigueur de l'enseignant consistera aussi à faire passer les élèves aux niveaux des preuves intellectuelles.

Nous nous sommes intéressée au premier cycle du secondaire, ce qui nous a amenée à considérer la preuve (porteuse de rigueur) sous un angle plus large. Nous attribuons alors une valeur de preuve aux arguments qui s'appuient sur les propriétés mathématiques des objets. Plus encore, nous accordons une valeur de preuve aux arguments qui s'appuient sur les propriétés mathématiques qui apparaissent par l'intermédiaire d'un contexte particulier, par exemple, un contexte de calcul d'aires. Nous accordons donc à la preuve un sens large qui nous a permis de faire une analyse de la validation au premier cycle du secondaire avec une perspective plus grande que celle que nous aurait fourni la simple référence à la démonstration.

Nous avons la conviction que l'aptitude à valider se prépare dès le premier cycle du secondaire (et même avant). De plus, nous pensons que si un enseignant n'encourage pas chez les élèves un questionnement relatif à la validation, au premier cycle du secondaire, il ne le fera guère plus au second cycle même si des objectifs de programme sont plus spécifiques à cet effet.

Cela dit, plusieurs questions se posent particulièrement pour la formation des enseignants.

### 7.1.2 Le problème

Le programme d'études secondaires encourage une approche d'enseignement qui part de situations concrètes et où du matériel est utilisé. Dans les cours de didactique suivis par les étudiants, futurs enseignants qui sont nos sujets d'expérimentation, du matériel et des illustrations sont utilisés pour supporter les raisonnements qui valident les résultats. Une recherche en cours sur la formation des étudiants en enseignement des mathématiques au secondaire à l'UQAM, à laquelle nous participons, indique que les étudiants peuvent développer à travers le programme de formation, le désir de faire raisonner les élèves, de les faire participer à leur apprentissage, et de faire comprendre un concept à travers des activités de manipulation.

Cependant, d'après des recherches réalisées auprès de futurs enseignants et nos observations personnelles, nous savons que ceux-ci sont peu habiles en démonstration, qu'ils recourent à des vérifications empiriques, qu'ils évaluent mal le rôle de la preuve. Sachant cela, et considérant que l'enseignant au secondaire a la responsabilité d'initier les élèves à la rigueur mathématique en leur présentant une mathématique significative, nous posons la question suivante: comment les futurs enseignants concilient-ils dans leur classe sens et rigueur? Les autres questions sont des sous-questions de celle-là. Les voici.

- Les futurs enseignants sont-ils prêts à introduire dans la classe une problématique de rigueur?
- Jusqu'où va leur projet de donner du sens?
- Est-ce que l'utilisation abondante de matériel concret, par exemple, renforce chez eux le recours à des validations basées sur l'observation et le simple constat ou, au contraire, stimule-t-elle le recours à d'autres niveaux de preuve?
- Existe-t-il d'autres alternatives à la démonstration et aux essais sur exemples particuliers?
- Comment les étapes de validation servent-elles les objectifs d'apprentissage de la leçon?

Notre projet ne consistait pas à répondre directement à ces questions, mais nous voulions nous documenter sur la validation chez les futurs enseignants du secondaire en mathématiques dans leurs leçons.

### 7.1.3 Objectifs de recherche

Nous avons donc cherché dans cette thèse à caractériser la validation dans les planifications et prestations de leçons des futurs enseignants du secondaire en mathématiques, d'après

1) sa place dans la leçon, lieu et espace occupé,
2) ses fonctions et
3) les arguments utilisés.

Nous nous sommes concentrée sur le premier cycle du secondaire et avons donc été obligée d'envisager d'autres preuves que la démonstration. Nous avons analysé les leçons portant sur les sections identifiées comme algébriques ou préparant à l'algèbre, une notion qui prend une grande part des heures d'enseignement au secondaire.

Dans les planifications et prestations des stagiaires, nous avons considéré comme étant des étapes de validation les moments où l'acceptation d'une théorie, d'un résultat, d'un énoncé ou d'une procédure était en jeu. Nous avons appelé arguments de validation, les moyens utilisés par le stagiaire pour faire accepter cette théorie, ce résultat, cet énoncé ou cette procédure. La place de la validation était le lieu où apparaissaient une étape ou un argument de validation dans l'articulation de la leçon. La place est aussi l'importance accordée à la validation dans la planification ou la prestation. Nous traitons de ce dernier aspect spécifiquement dans cette conclusion. La fonction de l'argument de validation était ce à quoi il servait par rapport à l'objet mathématique qui était validé et la fonction de l'étape de validation était son rôle dans le déroulement de la leçon, par rapport aux autres étapes.

Nous pensions que les trois aspects de notre analyse, place, fonction et arguments, n'étaient pas indépendants et qu'ils pouvaient nous renseigner conjointement sur la validation. Entre autres, nous pensions que les fonctions de la validation n'étaient pas indépendantes du moment et du contexte où a lieu la validation.

Nous présenterons maintenant notre méthodologie de recherche pour résumer ensuite notre grille d'analyse.

### 7.1.4 Méthodologie

#### a. Population et thèmes des leçons analysées

Nous avons analysé les leçons de quinze étudiants - stagiaires en enseignement des mathématiques au premier cycle du secondaire, ayant préparé et donné des leçons en algèbre. Les documents dont nous disposions étaient ceux réalisés comme exigence lors de leur stage d'enseignement. Douze de ces étudiants étaient en deuxième année de formation et réalisaient leur premier stage d'enseignement en mathématiques. Les trois autres étudiants étaient en quatrième année et réalisaient leur deuxième stage d'enseignement en mathématiques. Les étudiants de deuxième année avaient suivi un cours de didactique de six crédits les préparant à la planification de leçons et ceux de quatrième année avaient suivi un cours supplémentaire de trois crédits les préparant à réaliser une séquence d'enseignement. Ils ont de plus suivi plusieurs cours les préparant à l'enseignement de différents concepts.

Nous avons divisé les leçons en deux groupes selon les thèmes traités et surtout les objectifs didactiques. Le groupe 1 était composé des leçons de huit stagiaires. Les leçons de ce groupe consistaient à introduire des règles de manipulations des expressions algébriques ou des équations. Le groupe 2 était composé principalement des leçons de huit stagiaires. Les leçons consistaient alors en activités de généralisation ou de production d'expressions algébriques. Dans ce cas, l'objectif principal visait à familiariser les élèves avec le symbolisme algébrique et éventuellement à introduire le terme général d'une suite.

#### b. Cours de didactique et stage d'enseignement

Au moment de leur stage, les étudiants de deuxième année avaient suivis l'équivalent d'onze crédits en cours de didactique les préparant à la planification de leçons et à l'enseignement de différents concepts surtout du premier cycle du secondaire. Les étudiants de quatrième année avaient l'équivalent de six crédits supplémentaires. Dans ces cours de didactique donnés à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), une grande importance est accordée à la mise en contexte, aux représentations visuelles et aux exemples génériques, comme supports au raisonnement.

Quant au stage d'enseignement, il est sous la responsabilité d'un enseignant et dure au moins deux semaines pour les étudiants de deuxième année et sept semaines pour les étudiants de quatrième année. Les stagiaires ont une grande latitude pour expérimenter des approches pédagogiques qui respectent les contraintes du milieu. Le stagiaire est aussi sous la responsabilité d'un superviseur responsable du lien université-milieu et de l'évaluation du stage et des travaux, notamment les prestations (observées et enregistrées sur bande vidéo), les planifications de leçons et le rapport de stage. Ce rapport, remis au superviseur après le stage, contient les planifications améliorées.

**c. Cueillette de données**

C'est suite à ce stage que nous avons recueilli nos données expérimentales, soient les planifications, prestations et planifications améliorées. Pour les stagiaires de deuxième année, les planifications comprennent une brève analyse du concept avec les conceptions des élèves, les raisonnements à travailler et les habiletés à faire acquérir. Elles comprennent également les planifications de base de trois leçons avec les intentions du stagiaire relativement à l'enseignement du concept à partir de l'analyse faite préalablement. En plus, les planifications comprennent le scénario détaillé d'une des leçons qui présente le déroulement prévu en classe en précisant comment seront présentés les exemples, les situations, le matériel et comment sera organisé le questionnement. Les prestations sont des enregistrements vidéos d'une des planifications et le plus souvent de la leçon détaillée. La planification améliorée est la planification modifiée suite à la prestation. Quant aux stagiaires de quatrième année, si le format du travail n'était pas exactement celui des stagiaires de deuxième année, nous retrouvions aussi une analyse conceptuelle, des planifications détaillées, des prestations et des planifications améliorées, semblablement à celles de deuxième année.

**d. Grille d'analyse**

Nous avons choisi un cadre théorique qui nous permettait de caractériser la validation d'après sa place, ses arguments et ses fonctions. De ce cadre théorique, retenons principalement:

- deux projets de validation: un projet de preuve, qui consiste en une recherche de nécessité, et un projet de vraisemblance lié à la contingence et au bon sens;
- cinq fonctions principales de la preuve:
    - statuer et systématiser: déterminer si un énoncé est vrai dans le cadre d'une théorie axiomatique;
    - faire comprendre pourquoi un énoncé est vrai ou comment on est

arrivé à un résultat;

- convaincre de la vérité ou de la fausseté d'un résultat, d'une théorie...
- produire des connaissances;
- communiquer.

- une liste d'arguments de preuve et de validation allant de l'argument pragmatique à la démonstration (Cf. tableau III, chapitre 5).

- différents types de validation selon la structure de la leçon:

- par nature
- opératoire implicite
- opératoire formelle
- démonstrative
- démarche de preuve.

Pour répondre à nos objectifs, nous avons réalisé l'analyse des aspects suivants:

1. Les intentions des stagiaires dans les planifications: ces intentions nous ont permise de déterminer le projet des stagiaires spécifiquement pour les leçons analysées et nous ont éclairée sur la fonction des étapes et arguments de validation.

2. L'organisation de la leçon: nous avons réalisé des schémas qui nous ont permis d'identifier des lieux de validation et de situer la validation par rapport aux autres éléments de la leçon. Le schéma d'organisation nous a donné des indications sur les fonctions des étapes de validation.

3. Les interactions de classe: les réactions des élèves lors d'une étape de validation, nous ont renseignée sur les effets de la validation et par conséquent sur sa fonction effective; de plus, l'analyse des interactions nous a donné une idée de l'importance accordée à la validation dans la classe.

4. Les arguments proprement dits: pour déterminer la fonction de la validation, nous nous sommes aussi servi des caractéristiques des arguments utilisés pour valider.

Les fonctions qui sont alors déterminées le sont selon les arguments, selon la place et selon les intentions. Les fonctions elles-mêmes nous instruisent sur la place de la validation en terme d'importance.

## 7.2 Conclusion

### 7.2.1 Rappel des résultats du groupe 1

Le premier groupe de leçons que nous avons analysées avaient comme objectif d'introduire des règles de calcul ou de résolution d'équations. Nous avons considéré que l'étape d'introduction aux règles était lieu de validation. Nous avons trouvé:
- que la majorité des stagiaires ont le projet de donner du sens aux règles introduites;
- que dans ces leçons, la validation prend place dans une étape expérimentale à potentiel générique;
- que la fonction de validation de cette étape expérimentale se rattache à un projet de vraisemblance (donner un sens concret, associer des images aux opérations, aux expressions algébriques et aux égalités, argumenter dans le contexte d'un problème);
- que les stagiaires utilisaient certains arguments à potentiel de preuve, notamment des décompositions algébriques, parfois via des décompositions géométriques, et une argumentation sur les équations par l'intermédiaire d'un problème, argumentation qui pourrait constituer un premier niveau de preuve.

En même temps, nous avons trouvé:
- que les manipulations sur du matériel peuvent faire illusion au sens et à la participation des élèves, en se coupant du domaine mathématique;
- que certains stagiaires ont tendance à centrer leur argumentation sur les réponses algébriques ou numériques;
- que les propriétés des opérations sont peu présentes dans les prestations et planifications sur les opérations algébriques, que ce soit explicitement ou implicitement, alors que les élèves ont été familiarisés préalablement avec les propriétés des opérations.

Pour les manipulations algébriques en particulier, il nous semble que les stagiaires ne sont pas engagés dans le projet de montrer la nécessité mathématique des règles car les élèves ne sont pas interrogés sur la généralité de la règle, la règle n'est jamais remise en question, le procédé pour y arriver est à peine, voire aucunement, discuté et les planifications sont peu explicites quant à l'argumentation qui mène à la règle. S'il y a un tel projet, il est peu articulé. D'un autre point de vue, c'est le stagiaire qui mène complètement la séance d'introduction aux règles et les élèves participent peu finalement malgré des intentions de départ dans ce sens. La validation reste près de la validation opératoire qui consiste à présenter un exemple pour montrer comment faire, à faire essayer les élèves et à les faire pratiquer.

### 7.2.2 Rappel des résultats du groupe 2

Les leçons du groupe 2 consistaient en activités de généralisation menant à la construction de formules, appelés aussi messages. Nous avons identifié dans ces leçons et quelques unes connexes, trois lieux de validation. Le premier lieu de validation est le moment où les élèves formulent leurs messages et les expliquent. À ce moment-là, il arrive aussi que les stagiaires expliquent. Nous avons considéré que les explications des élèves ou des stagiaires précisant comment la formule avait été construite étaient un argument à potentiel de preuve si l'explication utilisait les caractéristiques générales sur lesquelles s'appuyait la construction. Pour cette étape, nous avons trouvé:

- que, pour certains stagiaires, cette étape peut servir de validation, implicite, et que sa fonction consiste alors à faire comprendre les fondements et à partager cette compréhension;
- que, pour d'autres, les explications peuvent ne servir qu'à aider le stagiaire à saisir l'idée ou la démarche de l'élève et n'ont pas un potentiel de validation, puisque les explications sont suivies d'une étape de validation ou de vérification.

C'est dans cette deuxième étape que nous avons identifié le deuxième lieu de validation. Pour ce lieu, nous avons trouvé:

- que cette validation est explicite et qu'elle consiste en calculs, vérification par la réponse ou applications répétées de la formule;
- que cette étape de validation résulte d'une dissociation dans les planifications entre la formulation individuelle des messages et la validation qui elle est collective;
- que la fonction de cette étape de validation est, d'une part, de disposer collectivement des messages, sous la direction des stagiaires et qu'elle peut être associée à une étape d'institutionnalisation même si les formules produites ne sont pas des objets d'enseignement comme tel;
- que, d'autre part, l'argument de validation sert à vérifier ou à convaincre de l'efficacité de la formule à produire la bonne réponse ou encore de l'applicabilité générale de la formule en la faisant fonctionner sur différents cas particuliers; dans ce deuxième cas, la validation peut contribuer à renforcer la compréhension de la formule comme procédure générale lorsque les propriétés du contexte sont invoquées conjointement à l'application de la formule.

Nous avons constaté que la majorité des stagiaires avaient le projet de donner du sens au symbolisme ou de faire comprendre le concept de suites. L'étape de formulation avec les explications qui l'accompagnent et l'étape explicite de validation peuvent servir cet objectif lorsqu'elles montrent les propriétés sur lesquelles s'appuie la construction.

Pour le troisième lieu de validation, lors des tâches de comparaison d'expressions algébriques y compris les discussions sur l'équivalence des messages, nous trouvons:
- que lorsque l'équivalence se situe dans le prolongement de l'activité de généralisation, les justifications qui sont utilisés par les stagiaires semblent vouloir faire comprendre l'équivalence, puisque les stagiaires montrent pourquoi ces expressions sont équivalentes en s'appuyant sur le sens des opérations et sur leurs propriétés ou sur la manière dont le dénombrement a été effectué;
- mais, on trouve également des vérifications par la réponse, là et dans d'autres activités semblables où l'élève doit déterminer si une égalité est vraie ou si une expression est plus grande qu'une autre.

Dans les cas où il n'y a que vérification par la réponse, quelque soit le lieu de validation, nous avons constaté
- qu'il s'agit bien plus d'une période d'invalidation que de validation;
- que l'utilisation de contre-exemples ne sert pas à comprendre;
- que certaines tâches qui auraient pu donner lieu à des situations de validation sont utilisées pour travailler des habiletés de calcul et s'éloignent d'un projet que nous pourrions associer à une volonté de validation.

Nous avons vu que les activités de généralisation visaient à donner du sens au symbolisme et dans ce sens les stagiaires ont sans doute réussi ce projet dans la mesure où les élèves eux-mêmes produisaient les formules en mots, les expliquaient et les symbolisaient. Nous n'avions noté aucun projet <u>élaboré</u> de validation dans les planifications, ni lors de l'étape de formulation, ni lors de l'étape de validation. Les stagiaires n'ont pas formulé d'intentions particulières (sauf dans un cas) quant au rôle joué par cette étape.

### 7.2.3 Conclusion sur l'ensemble des résultats

Nous voulions caractériser la validation par sa place, ses fonctions et les arguments utilisés pour valider. Le tableau XI regroupe nos résultats.

| ÉTAPE - PLACE | FONCTION DE L'ÉTAPE | TYPE D'ARGUMENT | FONCTION DE L'ARGUMENT |
|---|---|---|---|
| AU MOMENT DE L'INTRODUCTION DE LA RÈGLE | LA DÉCOUVRIR ENSEMBLE | EXPÉRIENCES RÉPÉTÉES AVEC ARGUMENTATION CENTRÉE SUR LA RÉPONSE À CES EXPÉRIENCES | LUI DONNER DU SENS |
| | | EXPÉRIENCES RÉPÉTÉES À POTENTIEL DE PREUVE | |
| AU MOMENT DE LA FORMULATION DE LA RÈGLE | EN PARTAGER LA COMPRÉHENSION | EXPLICATIONS QUI S'APPUIE SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SITUATION | FAIRE COMPRENDRE LA DÉMARCHE POUR Y ARRIVER |
| APRÈS LA FORMULATION DE LA RÈGLE (ÉTAPE DE VALIDATION EXPLICITE) | EN DISPOSER COLLECTIVEMENT (en retenir, en rejeter, les appliquer, trouver des réponses) / CONCLURE: REVENIR SUR LA TÂCHE / PASSER À AUTRE CHOSE... | CALCULS AVEC ARGUMENTATION QUI S'APPUIE SUR LE FAIT QUE LA RÉPONSE EST BONNE LORSQU'ON L'APPLIQUE | VÉRIFIER / CONVAINCRE DE L'EFFICACITÉ POUR TROUVER LA RÉPONSE / INVALIDER |
| | | CALCULS AVEC ARGUMENTATION QUI S'APPUIE SUR LES PROPRIÉTÉS ET SUR LE FAIT QU'ON PEUT TOUJOURS L'APPLIQUER | VÉRIFIER / CONVAINCRE DE L'APPLICABILITÉ GÉNÉRALE / RENFORCER SA COMPRÉHENSION |
| LORS DU TRAITEMENT DE L'ÉQUIVALENCE | INTRODUIRE L'ÉQUIVALENCE | EXPLICATION QUI S'APPUIE SUR<br>- LE CONTEXTE<br>- LE SENS DES OPÉRATIONS<br>- LES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS | VÉRIFIER / FAIRE COMPRENDRE POURQUOI DEUX EXPRESSIONS SONT ÉQUIVALENTES |
| LORS D'EXERCICES DE COMPARAISON D'EXPRESSIONS | AUGMENTER LES HABILETÉS DE CALCULS | CALCULS AVEC ARGUMENTATION QUI QUI REPOSE SUR LE CALCUL DE LA VALEUR DES EXPRESSIONS EN DONNANT UNE VALEUR À LETTRE | INVALIDER |

**TABLEAU XI: PLACE, FONCTIONS ET ARGUMENTS DE VALIDATION SELON LES ÉTAPES**

Ces fonctions, places et arguments, qui apparaissent dans le tableau XI, nous révèlent quatre comportements de validation différents. (1) Quand il s'agit d'introduire une règle (leçons du groupe 1), on cherche à lui donner du sens et on tente de la faire comprendre par des expériences consistant le plus souvent en des manipulations d'illustrations. Ici la compréhension peut rester (pour certains) intuitive et perceptuelle. L'important c'est qu'on y arrive. L'évidence alors est telle qu'aucune autre forme de validation subséquente n'apparaît nécessaire. Le projet pourrait en être un de vraisemblance. (2) Quand des élèves ont produit eux-mêmes une règle en réponse à un problème posé, notamment une formule (dans les leçons du groupe 2), l'explication de comment la formule a été trouvée, en s'appuyant sur les propriétés de la situation, constitue un argument suffisant pour valider cette réponse. Les leçons du groupe 1 sur la résolution d'équations, pourraient être associées à ce deuxième comportement bien que la résolution soit guidée pas à pas par le stagiaire. L'explication fait comprendre sur quoi s'appuie la résolution du problème. (3) Une fois que la démarche personnelle de l'élève est expliquée, il faut se prononcer sur le produit de cette démarche, déterminer ici les formules justes et surtout invalider les formules fausses, montrer que les formules répondent bien à la tâche demandée, qu'elles sont efficaces et qu'elles fonctionnent, pour ainsi pouvoir passer à autre chose. La validation consiste alors en calculs. (4) Dans des exercices où des énoncés sont en jeu, il faut surtout invalider les énoncés faux; on en profitera pour augmenter les habiletés de calculs lorsque l'énoncé est vrai.

Dans le tableau, nous avons noté quatre fonctions principales aux arguments de validation en ce qui concerne la règle qui constitue l'objet à valider: celle de lui donner du sens, celle de faire comprendre la démarche qui y mène ou ses fondements, celle de vérifier son efficacité ou son applicabilité et celle de l'invalider.

Nous notons aussi trois fonctions principales de l'étape de validation dans la leçon, toujours en ce qui concerne la règle: la découvrir ensemble, en partager la compréhension et en disposer collectivement. Dans tous ces cas, les étapes sont collectives et sont gérées par les stagiaires. Elles participent à la reconnaissance par tous des règles comme justes, efficaces ou fonctionnelles et, comme nous l'avons souligné à quelques occasions, à la progression de tous les élèves en même temps. Ces fonctions sont plus didactiques que strictement de validation. Elles peuvent s'associer à une fonction de communication de la preuve. Nous ajoutons aussi à ces fonctions, d'autres qui concernent cette fois pas tant l'objet à valider mais la progression de la leçon: introduire, conclure pour passer à autre chose, revenir sur la tâche. Une autre fonction de cet ordre peut être ajoutée au moment des exercices où sont exécutées des vérifications ponctuelles; les calculs servent alors bien plus à renforcer des habiletés de calculs qu'à valider.

Nous avons donc affaire à deux grandes classes de fonctions de la validation, une fonction plus strictement lié au besoin de validation de l'objet mathématique et une fonction liée davantage à la présentation des contenus et à la progression du groupe-classe. Ces fonctions de la validation varient selon la place des étapes dans le déroulement de la leçon, place qui est déterminée par les objectifs de cette leçon. Par exemple, les validations qui ont lieu dans une période d'introduction à un concept pourraient davantage vouloir faire comprendre et faire partager la compréhension alors que celles qui ont lieu en conclusion pourraient se préoccuper surtout d'efficacité. L'étape de conclusion apparaît aussi comme une étape charnière dans la progression de la leçon, pour revenir sur la tâche, lancer de nouvelles questions et passer à autre chose. L'identification des deux niveaux de fonctions, nous a permis d'apporter des explications à certains phénomènes observés dans le groupe 2, notamment le glissement d'une validation qui repose sur des exemples à valeur générique vers des vérifications ponctuelles de réponses. Nous avons alors émis l'hypothèse que les étapes de validation pouvaient parfois servir bien plus la progression du groupe-classe que la validation de l'objet mathématique.

Quant aux arguments de validation selon les étapes, l'observation du tableau XI nous révèle des comportements similaires sur certains points. Lors de l'introduction de règles (leçons du groupe 1), plusieurs utilisent les expériences seulement pour les réponses qu'elles fournissent; ce comportement peut se rapprocher des vérifications des formules par la réponse (dans les leçons du groupe 2). Lors de l'introduction d'une règle (groupe 1), les stagiaires utilisent des expériences à potentiel de preuve pour déduire la règle; ce comportement se rapproche de la vérification des formules par leur application sur plusieurs cas sans se soucier de la réponse (groupe 2). Finalement, le principal critère qui ressort de cette analyse pour distinguer les deux types d'argumentation, est la centration ou non sur la réponse, critère que Margolinas utilise pour déterminer si un élève est engagé dans un processus de validation qui tient du vraisemblable ou de la nécessité. Si ce critère est utilisé par Margolinas à l'étape de conclusion, lors de la résolution d'un problème par les élèves, dans des situations qui ressemblent davantage aux leçons du groupe 2, il ressort de notre analyse que nous pouvons appliquer ce critère également au moment où une règle est introduite. Lorsque les stagiaires introduisent les règles de manipulations algébriques (groupe 1), ils comparent l'expression algébrique initiale à la réponse obtenue par manipulation d'une illustration ou de matériel et trouvent par observation des expressions comment pourrait s'effectuer le passage; les propriétés qui permettent ce passage ne sont pas considérées. Lorsque les stagiaires introduisent les méthodes de résolution des équations (groupe 1 aussi), ils illustrent bien les propriétés des égalités et le raisonnement qui permet d'obtenir la réponse, ce que nous avons associé à des arguments à potentiel de preuve. Mais, puisque le passage d'une équation de forme complexe à une équation de forme "x= a" n'est pas immédiat, qu'il se fait par application successive des propriétés de l'égalité et que la leçon vise à montrer comment effectuer le passage, on peut se demander si ce comportement de validation n'est pas que circonstanciel.

Cette analyse soulève deux questions:

1) Est-ce que les comportements, différents selon les activités, sont déterminés par celles-ci ou bien s'agit-il de lacunes quant à ce qui valide en mathématiques?

2) Est-ce que le comportement de validation est cohérent, pour un même stagiaire, à travers les différentes activités d'introduction et de résolution de problèmes? D'après les indices que nous fournissent les quelques dix-huit planifications de Blanche et Cécile, le comportement de validation varie lorsqu'il s'agit d'intro-duire à une règle (leçons du groupe 1). Le niveau de validation peut être plus ou moins près de l'action ou de la preuve intellectuelle. Toutefois, Cécile qui semble ne s'appuyer que sur les réponses aux calculs effectués avec matériel pour déduire la règle (groupe 1), effectue aussi des vérifications par la réponse pour montrer l'équivalence de formules dans des activités de généralisation (groupe 2) et montre ainsi une forme de cohérence.

Ces questions mériteraient d'être investiguées pour elles-mêmes mais nous tentons tout de même une réponse à partir de nos résultats. Nous répondons en même temps à la question de départ sur comment les futurs enseignants concilient sens et rigueur et nous qualifions aussi la place de la validation en tant qu'importance.

Nous pensons que les futurs enseignants n'ont pas de préoccupation articulée de rigueur. Lors de l'introduction de règles (groupe 1), selon toute apparence, les stagiaires veulent faire comprendre les élèves en leur montrant la vraisemblance des règles. Cependant ce projet ne semble pas aller jusqu'à faire comprendre les fondements ou si oui, il n'est pas articulé, ni constant ni systématique. Lors de la construction de formules (groupe 2), certains semblent se préoccuper des fondements et de la généralité des résultats, mais d'autres utilisent des vérifications par la réponse sans plus. Selon toute apparence, il n'y a pas chez-eux la préoccupation d'utiliser des critères de validité acceptables. Nous avons constaté que des situations qui auraient pu facilement donner lieu à une argumentation, étaient utilisées pour améliorer des habiletés de calculs et qu'alors on se contentait encore de vérifier une réponse. Des arguments à potentiel de preuve sont sous-estimés ou ils ne sont pas récupérés par des stagiaires. Nous avons observé des glissements d'arguments de validation reposant sur les propriétés générales dans la planification vers des arguments reposant sur des vérifications de réponses, dans la prestation.

Dans les planifications, les stagiaires élaborent sur l'importance de ne pas que donner des règles à appliquer, de les justifier, de faire participer les élèves à leur découverte, de leur donner du sens via la résolution de problème et via des illustrations mais ils élaborent peu sur les fondements eux-mêmes des règles. S'ils parlent de propriétés, ils ne précisent pas comment ils comptent les traiter en classe. Dans les activités de généralisation, la partie explication par les élèves est laissée dans l'ombre et la partie validation n'est pas accompagnée d'intentions quant au rôle de ces validations.

Ceci nous fait dire donc que pour plusieurs, il n'y a pas de préoccupation articulée de rigueur sauf en ce qui a trait à la présentation des calculs et à l'utilisation du symbolisme algébrique avec ses conventions d'écriture. Ils ne s'interrogent et n'interrogent pas les élèves sur la généralité du résultat ou sur les arguments utilisés.

À l'utilisation de calculs pour valider, nous envisageons deux explications. La première renvoie aux conceptions de ce qui valide en mathématiques. Les stagiaires ne conçoivent pas que des arguments de validation puissent supporter au départ une forme d'incertitude ou s'exprimer de manière non formelle et prêter à interprétation et ce, d'autant plus que les explications des élèves ne sont pas toujours justes. Comme les explications des élèves sont parfois justes mais aussi parfois fausses, ils ne pensent pas s'en servir pour discriminer les formules justes des fausses. Un calcul est lui plus sûr et plus facilement vérifiable. Il établit plus facilement le consensus. La deuxième explication renvoie à la conception qu'ont les stagiaires de l'enseignement et de leur contrat, la responsabilité de l'enseignant consistant d'une part à montrer ce qui est vrai et, d'autre part, à invalider lorsque se présentera une procédure ou un énoncé faux.

La validation - preuve a finalement peu de place dans la classe. Pour qu'il y ait un tel projet, il nous apparaît clair qu'il faut une réflexion explicite sur le sujet de la part du stagiaire et que le projet de vraisemblance, par ailleurs essentiel, dans la mesure où il stimule l'intuition, s'accompagne d'une réflexion sur ce qui valide en mathématiques même si cette validation est envisagée localement pour les problèmes traités à ce niveau.

En bref, nous constatons que les étudiants réalisent un enseignement des mathématiques qui donne une place aux activités d'exploration avec matériel mais que ces activités d'exploration ne débouchent pas sur une argumentation voire une preuve. Nous pensons que ce saut ne se fait pas d'abord parce qu' il leur manque une réflexion sur la rigueur qu'ils peuvent exiger dans leur enseignement, mais aussi parce que leur contrat n'inclut pas de faire passer les élèves à un niveau de preuve autre que pragmatique et qu'ils n'accordent qu'une place mineure à l'élève dans les activités de validation.

L'objectif des stagiaires est que l'élève donne du sens aux règles pour qu'il s'en souvienne davantage et qu'il les utilise correctement. Le projet de vraisemblance des stagiaires est mû par un souci d'efficacité didactique qui ne concerne pas la rigueur.

## 7.3 Critiques, limites et perspectives de recherches

### 7.3.1 Critiques et limites de notre recherche

Notre recherche concerne les futurs enseignants. Nous avons choisi de faire l'analyse de leurs planifications et prestations en recueillant les documents écrits et vidéoscopiques après leur stage, sans leur avoir donné préalablement de consignes particulières ou les avoir avisés des objectifs de notre recherche. Comme nous voulions raffiner notre compréhension de leurs choix didactiques du point de vue de la validation, il nous apparaissait important de laisser justement ces choix à leur initiative. De plus, dans le cadre de leur stage, nous ne pouvions pas leur demander d'appliquer une séquence d'apprentissage ou une partie de cette séquence, sans aller à l'encontre des objectifs mêmes du stage. Mais alors, nous nous privions de la possibilité de contrôler les diverses variables qui influencent les choix des stagiaires comme les manuels, le thème des leçons, les cours de didactique, les superviseurs, les enseignants-associés. Notre connaissance des manuels, des cours de didactique et du programme nous permettait toutefois de baliser notre analyse dans une certaine mesure. Notre étude est exploratoire et nous voulions réaliser une analyse fine des comportements des stagiaires. Nous pouvons maintenant poser des questions plus pointues sur un aspect en particulier, questions qui pourraient inspirer d'autres recherches. Nous en donnons quelques-unes dans la section suivante.

Nous avons limité notre recherche à l'algèbre au premier cycle du secondaire. En réalisant ce choix, nous avons opté indirectement pour des notions de base avec des situations qui tiennent de l'évidence, tout au moins pour les stagiaires. Ainsi, dans une manipulation algébrique via du matériel, toutes les propriétés peuvent être présentes implicitement. Certains stagiaires basent leur argumentation sur la comparaison de l'expression initiale et de l'expression finale lors de transformations algébriques pour déduire, selon toute vraisemblance, ce qui s'est passé. Mais, l'évidence est telle que le stagiaire peut ne pas voir la pertinence d'expliciter davantage puisque l'élève "comprend". On peut se demander si les comportements observés sont liés aux situations trop élémentaires sur certains aspects ou à une façon de faire des stagiaires que l'on pourrait aussi observer pour des situations plus complexes. Il paraît donc important de poursuivre la recherche au deuxième cycle du secondaire et pour d'autres domaines que l'algèbre, à tous les cycles du secondaire.

Enfin, bien que quelques-uns disent vouloir fonder les règles, l'analyse réalisée nous a conduite à caractériser le projet des stagiaires comme étant surtout un projet de vraisemblance. Les stagiaires pourraient avoir un point de vue différent sur leurs leçons ou sur celles de leurs confrères ou consoeurs, que celui que nous présentons en analyse. Dans certains cas particulièrement intéressants, des entrevues pourraient être réalisées à partir d'extraits de planifications et de prestations de leçons afin que les étudiants se prononcent sur la fonction de certaines étapes et sur le statut de certains arguments utilisés dans les leçons.

### 7.3.2 Apport de notre recherche et perspectives

Notre recherche exploratoire s'est réalisée à partir de notre cadre théorique et d'une grille d'analyse issue de ce cadre théorique. Si ce cadre reprend les résultats d'autres recherches, nous les avons organisés de manière à constituer un tout cohérent qui nous permettrait une analyse fine et nouvelle du comportement des stagiaires. En jumelant en particulier les idées de projets de preuve ou de vraisemblance de Margolinas (1989), de niveaux de preuve de Balacheff (1988), de validation lors de la transmission d'un modèle en sciences expérimentales de Joshua et Joshua (1987), de fonctions de la preuve chez Barbin (1989), Hanna (1989) et de Villiers (1990), nous avons pu apporter un éclairage particulier, nous semble-t-il, à ce comportement des stagiaires, par ailleurs peu documenté.

De plus, notre recherche a permis d'élargir la grille d'analyse construite à partir de notre cadre théorique, en lui ajoutant en particulier une liste de fonctions didactiques. Si certaines fonctions didactiques que nous avons identifiées trouvent une correspondance dans celles issues de notre cadre théorique, d'autres sont nouvelles.

Ainsi, toutes les fonctions que nous avons attribuées aux étapes de validation n'apparaissaient pas dans la première grille. En envisageant les fonctions des étapes de validation dans le déroulement de la leçon, relativement aux autres étapes de la leçon, nous avons été amenée à envisager l'hypothèse que les fonctions de ces étapes touchaient davantage à la gestion du groupe-classe et à la présentation des contenus qu'au strict besoin de validation de l'objet mathématique. Cette nouvelle catégorie de fonctions nous a permis d'apporter des explications à certains phénomènes observés en classe et pourra sans doute éclairer d'autres chercheurs.

De manière générale, notre recherche permet de pointer quelques nouveaux aspects à investiguer. Nous en donnons quelques-uns maintenant.

Nous avons suggéré, en conclusion, que les futurs enseignants devraient inclure à leur projet une réflexion sur la rigueur. Nous pouvons nous demander ce qu'il serait arrivé si nous leur avions demandé de le faire. Est-ce qu'une intention explicite de preuve aurait orienté leurs leçons différemment? Certains stagiaires ont planifié une étape de validation explicite. Nous pouvons nous demander ce qui serait arrivé si nous avions demandé à tous de le faire. Est-ce que, pour ceux qui ne l'ont pas fait, les arguments utilisés seraient les mêmes? Et surtout, quel serait le contenu de ces réflexions? Quelques indices nous laissent croire que ce projet pourrait se limiter à l'utilisation d'un symbolisme, à des règles de présentation et à l'application stricte de méthodes, mais une investigation supplémentaire est nécessaire.

Nous avons soulevé à l'occasion que certaines conceptions des futurs enseignants pouvaient influencer le comportement de validation. Par exemple, que le comportement des stagiaires consistant à vérifier que deux expressions sont équivalentes en remplaçant la lettre par une même valeur dans chacune des expressions, pourrait être lié à une certaine confusion entre équations et identités, d'une part, et entre implication simple et une implication double, d'autre part.

Nous avons fait l'analyse de la validation selon ses fonctions, sa place et les arguments utilisés. D'autres recherches sur ces aspects sont nécessaires pour élargir l'ensemble des situations possibles et des activités d'apprentissage. Comme nous l'avons déjà dit, il nous apparaît important de poursuivre la recherche pour les leçons portant sur l'algèbre au deuxième cycle du secondaire et pour les leçons portant sur d'autres domaines que l'algèbre, à tous les cycles. En particulier, nous nous demandons ce que deviennent les fonctions de "faire comprendre les fondements" et celle de "vérification de l'efficacité d'un résultat".

Nous pouvons aussi nous demander, tel que nous l'avons mentionné, si le comportement d'un stagiaire est toujours le même quelques soient les situations. Ainsi, si le comportement du stagiaire change selon les situations, nous pouvons nous demander si la fonction de la validation change elle aussi selon les situations mathématiques ou encore selon les élèves. Plusieurs voies sont à explorer ici: les perspectives de recherches sont nombreuses.

## BIBLIOGRAPHIE


ALIBERT, D. & THOMAS, M. (1991). Research on Mathematical Proof. In David O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 215-230.

ARSAC, G. (1993). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses universitaires de Lyon. IREM.

ARSAC, G. (1990). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, no 3, pp. 247-280.

ARSAC, G. (1987). L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 8, no 3, pp. 267-312.

ARTIGUE, M. et ROBINET, J. (1986). *Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire*. Rapport de recherche. Cahier no 38. IREM, Paris VII, réédition.

BALACHEFF, N. (1998). In: Éclairage didactique sur les EIAH en mathématiques. Informatique et enseignement des mathématiques: le point de vue de la didactique, *Actes du Colloque du Groupe de Didactique du Québec*. Concordia University, Montréal, 25 et 26 mai, pp. 11-42.

BALACHEFF, N. (1988). *Une étude épistémologique du processus de preuve en mathématiques au collège*. Thèse présentée à l'Université National Polytechnique, Grenoble.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18, pp. 147-176.

BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, no 3, pp. 261-304.

BARBIN, E. (1989). Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie. In: Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologique et histoire des mathématiques. Besançon, pp 57-79.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. *Comptes-rendus du Colloque sur la didactique et la formation des enseignants*. E. N. S. de Marrakech.

BEDNARZ N., GATTUSO L., MARY C. (1996). "Changes In Student Teacher Views Of The Mathematics Teaching/Learning Process At The Secondary School Level". In Luis Puig & Angel Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Valence, Espagne. 59-66.

BEDNARZ N., MARY C., & DUFOUR-JANVIER B. (1996). Émergence et développement des raisonnements algébriques. *Rapport de recherche.* Conseil de recherche en sciences humaines du Canada.

BEGLE E. G. (1972) Teacher Knowledge and Student Achievement in Algebra. Stanford, *School Mathematics Study Group* , No 9.

BELL A. W. (1993). *Purpose in school Algebra,* Plenary paper for the Algebra Working Group of the International Congress on Mathematical Education, Québec.

BOOTH L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x,* no 5, pp. 5-17.

BROUSSEAU G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q.* Vol. XXVII (2), 14-25.

BROUSSEAU G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques,* 9 (3), 309-336.

BROUSSEAU, G. (1996). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: Brun J., *Didactique des mathématiques,* Delachaux et Niestlé S. A., Lausanne, 45-143.

BROUSSEAU G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherche en didactique des mathématiques,* 2 (3), 37-127.

DAVIS Ph. J. (1993). Visual Theorems. *Educational studies in Mathematics,* 24 (4), 333-344.

DEVILLIERS, M. (1990). The role and function of proof with sketchpad. *South African Mathematics Magazine PYTHAGORAS,* dec.

DUVAL, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x,* no 31, pp. 37 à 61.

EISENBERG, T. A. (1977). Begle revisited: teacher knowledge and student achievement in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education* 8, 216-222.

FILLOY, E. & ROJANO, T. (1989). Solving equations: The Transition from Arithmetic to Algebra, For the Learning of Mathematics, 9 (2), pp. 19-25.

GALBRAITH, P. (1995). Mathematics as Reasoning. *The Mathematics Teacher,* 88 (5), pp. 412-417.

GALBRAITH P.L. (1982) The mathematical Vitality of Secondary Mathematics

Graduates and Prospective Teachers: A comparative Study. *Educational Studies in Mathematics* 13, 89-112.

GRAY, J. D. (1975). Criticism in the mathematics class, *Educational Studies in Mathematics* 6, 77-86.

GUICHARD, J. (1989). Arrière-plans philosophiques de la démonstration. In: Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, *La démonstration mathématique dans l'histoire,* Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologique et histoire des mathématiques. Besançon, pp 39-52.

HANNA, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof, *For the Learning of Mathematics* 15, 3, pp 42-49.

HANNA, G. (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, and M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, 45-51.

HOYLES, C. (1996). Beyond the Classroom: The Curriculum as a Key Factor in Student'Appoaches to Proof. In M. Pothier, Mount Saint Vincent University (Eds.), *Proceedings, 1996 Annual Meeting, Canadian Mathematics Education, Study Group,* pp 7-26.

HOWSON, A. G. (1975). University courses for future teachers, *Educational Studies in Mathematics* 6, 273-292.

JOSHUA, M.-A. & JOSHUA, S. (1988). Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (deuxième partie), *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 9 (1), pp 5-30.

JOSHUA, M.-A. & JOSHUA, S. (1987). Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (première partie), *Recherche en Didactique des Mathématiques,* Vol. 8, no 3, pp 231-266.

KIERAN, C., BOILEAU, A. & GARANÇON, M. (1993). Introducing algebra by means of a functional approach. Texte du colloque: *Perspective de recherches sur l'émergence et le développement de la pensée algébrique,* CIRADE, UQAM.

KNUTH, E. J. & ELLIOT, R. L. (1997). Preservice secondary mathematics teachers' interpretations of mathematical proof, *Proceedings of the 19th Conference Group for the Psychology of Mathematics Education of North America,* pp. 545-551.

KRANTZ, S. G. (1994). The immortality of proof. *Notices of the American Mathematical Society* , 41 (1), pp. 10-13.

KRUMMHEUR, G. (1992). Formats of Argumentation in the Mathematics Classroom, Paper presented at ICME 7, Québec, in the working group 7: Language and communication in the arithmetic classroom.

LABORDE, C. (1992) Enseigner la géométrie: permanences et révolutions, Actes du 7e *Congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, Les presses de l'Université Laval, Québec.

LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Paris: Hermann. Version originale: (1976) *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press. Version originale, 1976.

LAMPERT, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal,* 27 (1), pp. 29-63.

LEGRAND, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, no 3, pp. 365-406.

LELOUARD, M., MIRA, C., NICOLLE, J.M. (1989) In: Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, Différentes formes de démonstrations dans les mathématiques grecques, *Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologique et histoire des mathématiques*. Besançon, pp 155-180.

LERO, U. (1985). Heuristic Presentations: the Role of structuring, *For the Learning of Mathematics* 5 (3) pp. 7-13.

MAC KERNAN, J. (1996). What's the point of proof? *Mathematics Teaching*, Issus 155, June, pp. 14-20.

MARGARIS, A. (1967). *First Order Mathematical Logic*. Blaisdell Publishing Company. U.S.A.

MARGOLINAS, C. (1989). *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*, thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

MARTIN, W. G. and HAREL, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Researsh in Mathematics Education* 20, 41-51.

MCCARVEY, C. (1981). Mathematics ans miseducation: toward the new school curricula, *The Mathematics Teacher* 29, 23-28.

MOORE R. C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics* 27: 249-266.

NICOLET, J. L. (1965). Intuition mathématique et dessins animés. In C. Gattegno: *L'enseignement des mathématiques, Tome II: Étude du matériel*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, pp. 63-80.

PINTO, M. & AINLEY, J. (non publié). *Student Teachers' Encounters with Formal proof: convincing themselves and convincing others.*

ROUCHE, N. (1989). Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implications? In: Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, La démonstration mathématique dans l'histoire, *Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologique et histoire des mathématiques*. Besançon, pp 9-38.

SCHOENFELD, A.H. (1991). On mathematics as sence-making: An informal attack on the infortunate divorce of formal anf informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.): *Informal Reasoning and Education*, pp. 311-343.

SCHOENFELD,. A.H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166.

SCHOENFELD, A.H. (1983). Theorical and Pragmatic Issues in the Design of Mathematical "Problem Solving" Instruction. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Montréal.

SKEMP, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching* 77, 20-26.

STEINBERG, R., HAYMORE J., MARKS R. (1985). Teacherrs' Konwledge and Structuring Content in Mathematics. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago. L.S. SHULMAN, Principal Investigator.

VOLLRATH, H.-J. (1994). On the appreciation of theorems by students and teachers. In Robitaille D.F., Wheller D.H., Kieran C. (eds.) Selected lectures from the 7th *International Congress in Mathematical Education*, Sainte-Foy: Les Presses de l'Université Laval, pp. 353-365

WOLFF, P. *La grande aventure des mathématiques*. L'encyclopédie PLANETE. Ed. Jacques David et éditions Planète.

YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Researsh in Mathematics Education* , 17 (4), pp. 458-477.

## PROGRAMMES, MANUELS SCOLAIRES ET GUIDES

ARSOULINE, J., BUZAGLO, C. et BUZAGLO, G. (1994). *Univers Mathématique*

2. Module A. Lidec Inc., Montréal, Québec.

BOURDEAU, C., BRETON, G., SMITH, J.-G. (1993). *Carrousel mathématique 1, Guide d'enseignement.,* première secondaire / Tome 1. Centre éducatif et culturel Inc. Anjou, Québec.

BOURDEAU, C., BRETON, G., SMITH, J.-G. (1994). *Carrousel mathématique 2, Guide d'enseignement.,* deuxième secondaire / Tome 1. Centre éducatif et culturel Inc. Anjou, Québec.

BRETON, G., DESCHÊNES, A. et LEDOUX, A. (1996). *Regards mathématiques 416,* 4e secondaire / Tome 1. Les Éditions CEC inc. Montréal, Québec.

BRETON, G. et MORAND, J.-C. (1996). *Carrousel mathématique 3* , troisième secondaire / Tome 2. Centre éducatif et culturel Inc. Montréal, Québec.

BRETON, G. et MORAND, J.-C. (1995). *Carrousel mathématique 3* , troisième secondaire / Tome 1. Centre éducatif et culturel Inc. Montréal, Québec.

BRETON, G. avec la collaboration de Denis Fortin (1994). *Carrousel mathématique 2,* deuxième secondaire / Tome 1. Centre éducatif et culturel Inc. Montréal, Québec.

BRETON, G. (1993). *Carrousel mathématique 1* , première secondaire / Tome I Centre éducatif et culturel Inc. Montréal, Québec.

BRETON, G., MATHIEU, P., SMITH, J.-G. (1983). *Mathématique du secondaire BMS 2* Les éditions HRW Ltée.

CHARLEBOIS, H., GAGNON, B. et HANNA, S. (1977). *Horizons mathématiques / 2,* Librairie Beauchemin Ltée. Montréal, Québec. Traduction de EBOS F. et ROBINSON, B. (1975) *Math / is,* Nelson and Sons (Canada) Ltd.

DROLET, M., ROCHETTE H. (1984). *Mathématique Soleil 2,* Guérin. Montréal, Québec.

DROLET, M., ROCHETTE H. (1987). *Mathématique Soleil 3,* Guérin. Montréal, Québec.

GALION, E. (1975). *Mathématique en 4e,* , édition nouvelle .

GUAY, S. et LEMAY, S. (1994) *Guide d'enseignement de la Boîte à outils, Mathématique 2e secondaire. Scénarios 2* . Éditions HRW. Groupe Éducalivres Inc.Inc. Laval, Québec.

GUAY, S. et LEMAY, S. (1995). *Mathématiques 3e secondaire. Scénarios 3 /* Tome 1et 2. Éditions HRW . Laval, Québec.

GUAY, S. et LEMAY, S. (1994). *Mathématiques 2e secondaire. Scénarios 2..* Éditions HRW. Groupe Éducalivres Inc. Laval, Québec.

JORDI, I., PATENAUDE P. et WARISSE C. (1994). *Dimensions, Mathématiques*

216, Tome 1. Éditions du renouveau pédagogique inc. Saint-Laurent, Québec.

KELLY, B., ALEXANDER, B., ATKINSON, P. (1987). *Mathematics 9.* Addison Wesley Publishers Limited. Don Mills, Ontario.

MAURER, S., LOPEZ, A., DE LA GRANGE, C. (1993). *Collection Les Maths et la vie,* 1ère secondaire. Ed. Brault et Bouthillier.

MEQ (1993). *Programme d'études, Mathématique 116, enseignement secondaire.*

MEQ (1994). *Programme d'études, Mathématique 216, enseignement secondaire.*

MEQ (1995). *Programme d'études, Mathématique 314, enseignement secondaire.*

PATENAUDE, P., VIAU, L. (1993). *Dimensions, Mathématique 116,* Tome 1. Éditions du renouveau pédagogique inc. Saint-Laurent, Québec.

PETRIE, P.A., BAKER, V.E. DARBYSHIRE, W. LEVITT, J.R. MacLEAN, W. B. (1954). *Intermediate Mathematics.* Book Four. The Copp Clark Publishing Co. Limited. Montréal.

RÉUNION de PROFESSEURS (année inconnue). *Arithmétique cours supérieur.* Collection d'ouvrages classiques, rédigés en cours gradués conformément au programme officiel. Maison A. Mame & Fils, Tours.

SOULIÈRE, M. (1993). *Guide d'enseignement de la boîte à outils. Multiguide. Mathématique 1re secondaire. Scénarios I.* Les Éditions HRW Ltée. Laval, Québec.

SOULIÈRE, M., THIBODEAU, J.-G. (1993). *Mathématique 1re secondaire. Scénarios I.* Les Éditions HRW Ltée. Laval, Québec.

## ANNEXE 1

**Les différents intervenants et leurs responsabilités pour les stagiaires de deuxième année (premier stage d'enseignement en mathématiques)**

(Tiré de "Stage II: Initiation à la pratique de l'enseignement, document cadre, complété par des informations relatives à la concentration Mathématiques", UQAM, automne 1997, pages 17-19.)

---

### 3. Les différents intervenants et leurs responsabilités

Les différents intervenants dans ce stage sont les enseignants associés, les superviseurs de stage de l'UQAM ainsi que les directeurs d'écoles.

#### 3.1 Responsabilités de l'enseignant associé et collaboration avec le superviseur de l'UQAM

**Avant le stage**

Dès les première rencontres avec le stagiaire, en vue d'en venir à un accord de poursuivre le stage ensemble, l'enseignant associé doit:

1) prendre connaissance des objectifs et des exigences du stage, de la préparation exigée du stagiaire et se faire expliquer le *Projet initial* (voir la partie 4 du présent document);
2) discuter avec le stagiaire des méthodes d'enseignement et de gestion de classe pouvant être mises en place durant le stage;
3) décider du contenu que le stagiaire aura à enseigner pendant le stage et du matériel pédagogique disponible (manuels, cahiers d'exercices, ordinateurs, rétroprojecteurs, etc.). Ces renseignements sont essentiels à la planification de l'enseignement que le stagiaire doit faire;
4) s'entendre avec le stagiaire sur la façon dont se fera la prise en charge progressive de la responsabilité de la classe.

Dès qu'il y aura accord mutuel, l'enseignant associé doit:

1) renseigner le stagiaire sur les habitudes et règlements de l'école;
2) fournir au stagiaire toute l'information nécessaire pour compléter la fiche informative qu'il doit fournir au superviseur, comprenant entre autres la planification d'étape, le contenu à enseigner, l'horaire des cours et le calendrier scolaire;
3) présenter le stagiaire aux autres enseignants, au personnel de la direction ainsi qu'aux personnes ressources de l'école;
4) préparer les groupes d'élèves à la venue du stagiaire, de manière à ce que ses interventions soient prises tout aussi au sérieux que celles de l'enseignant associé;
5) lui permettre de rencontrer les élèves avant le début du stage.

Les 30 octobre et 11 décembre 1997, l'enseignant associé est invité à participer à une rencontre à l'université avec les superviseurs.

**Pendant les deux parties du stage, l'enseignant associé doit:**

1) conseiller et donner une rétroaction au stagiaire sur la préparation de ses leçons, sa gestion de la classe et sur sa performance en général;
2) rencontrer le superviseur de l'UQAM au moins une fois pendant le stage et maintenir un contact avec lui;
3) avertir le superviseur dès qu'il y a inquiétude ou difficulté pendant le stage: un enseignant associé qui constate des faiblesses qu'il juge importantes chez un stagiaire peut demander à l'université de mettre fin au stage;
4) laisser le stagiaire enseigner de façon autonome et en continuité à au moins la moitié de ses groupes, pendant les dernières semaines du stage et le laisser seul dans la classe pendant au moins quelques périodes.

**Pendant la semaine qui suit le stage, l'enseignant associé doit:**

1) faire une évaluation du stagiaire en collaboration avec la direction de son école, si elle le désire, et la faire parvenir à l'université;
2) assister, s'il le désire, à la réunion d'évaluation des stagiaires si leur stagiaire a manifesté des lacunes importantes au cours de son stage.

**Le superviseur et l'enseignant associé**

Le rôle du superviseur ne se réduit donc pas seulement à évaluer les stagiaires en lui attribuant un note pour un cours de quatre crédits. Bien au contraire.

Durant le stage, le superviseur doit mettre son expérience de l'enseignement de sa discipline au service du stagiaire et de l'enseignant associé. Conséquemment, pour assurer un encadrement efficace, le superviseur doit établir et maintenir le contact avec l'enseignant associé. La collaboration entre le superviseur et l'enseignant associé, la direction de l'école et le responsable du stage disciplinaire est essentielle au bon déroulement du stage, afin d'assurer un suivi formatif de l'expérience professionnelle du stagiaire, plus particulièrement lorsque le stagiaire rencontre des difficultés importantes et que l'enseignant associé exprime des inquiétudes à ce sujet.

### 3.2 Responsabilités de la direction de l'école

La direction de l'école où s'effectue le stage a comme mandat d'accueillir le stagiaire et d'agir en partenaire privilégié dans le processus de formation professionnelle des futurs enseignants.

Pour remplir ce mandat, la direction de l'école accepte:

1) de participer au choix des enseignants associés, conformément au protocole cadre;
2) de considérer le stagiaire comme un membre de l'équipe de son école et de lui imposer les mêmes obligations que le personnel régulier en ce qui concerne les procédures et les politiques en vigueur (ponctualité, présence, etc.);
3) d'associer le stagiaire à toute initiative et à toute activité pédagogique de l'école;
4) de rechercher, en tout temps et spécialement en cas de difficulté, des solutions pour faciliter les progrès dans l'apprentissage de la pratique de l'enseignement;
5) de participer au diagnostic de toute situation problématique, en collaboration avec l'enseignant associé et le superviseur du stage, conformément au protocole cadre;
6) d'être informé du suivi du stagiaire et prendre connaissance de son évaluation finale;
7) de travailler en partenariat avec l'UQAM et ses représentants;
8) de répondre du dossier du stagiaire à la Commission scolaire et à l'université et d'appliquer le protocole d'entente intervenu entre les deux institutions.

### 3.3 Responsabilités du superviseur de l'UQAM

Le superviseur doit:

1) assister aux réunions des superviseurs de la concentration;
2) assister à la réunion des superviseurs, des enseignants associés et de tous les stagiaires ainsi qu'aux rencontres prévues;
3) avant la visite du superviseur à l'école, rencontrer et conseiller le stagiaire pour sa planification de l'enseignement et pour sa préparation des cours;
4) corriger la planification des leçons et la structure de la séquence de celles-ci;
5) convenir assez tôt avec le stagiaire des dates et de l'horaire des visites, de manière à pouvoir observer au moins une leçon complète et rencontrer l'enseignant associé;
6) visiter deux fois le stagiaire (dans la mesure du possible) selon le calendrier convenu avec celui-ci. Ces visites permettent au superviseur de poursuivre l'encadrement pédagogique du

stagiaire. **Idéalement, la première visite sera faite dans une perspective formative et la deuxième dans une perspective sommative.** Ces visites permettent également de voir au bon déroulement du stage et à mettre en place un processus d'évaluation qui s'articule sur l'action du stagiaire en situation d'enseignement, ceci avec l'enseignant associé et la direction de l'école;

7) avertir le responsable de la concentration (en mathématiques, le coordonateur des stages) le plus rapidement possible, si le stagiaire rencontre des difficultés;
8) être un soutien autant pour l'enseignant associé que pour le stagiaire. S'informer, aussi souvent que nécessaire, par téléphone auprès de l'enseignant associé et du stagiaire du déroulement du stage;
9) assister à la rencontre post-stage avec les stagiaires;
10) assister à la rencontre d'évaluation des superviseurs de la concentration;
11) corriger le rapport de stage;
12) évaluer le stagiaire, comme il est prévu à la section 2.3 *Évaluation du cours* du présent document.

Comme on le constate, le rôle du superviseur ne se réduit pas à l'évaluation. Afin que l'encadrement pédagogique soit adéquat, le superviseur doit être disponible pendant la période de stage.

Chaque stagiaire a le privilège de bénéficier d'environ 20 heures d'encadrement individuel. Il lui revient de savoir en tirer parti. Un étudiant qui nécessite plus que ce temps est considéré comme un cas problème.

# ANNEXE 2

## Planification de leçons

(Tiré de "Stage II: Initiation à la pratique de l'enseignement, document cadre, complété par des informations relatives à la concentration Mathématiques", UQAM, automne 1997, pages 43-47.)

**Université du Québec à Montréal**
**Module en enseignement secondaire**
**concentration mathématiques**

Le document de planification, à remettre au superviseur avant de commencer son enseignement, devra comprendre les éléments suivants .

1) **Un paragraphe d'introduction**

2) Une **analyse conceptuelle**
   - les conceptions des élèves
   - les raisonnements importants à travailler
   - les habiletés à acquérir (à automatiser s'il y a lieu)
   - les difficultés anticipées chez les élèves
   - les erreurs les plus fréquentes
   - les changements majeurs souhaités
   - les acquis (bons ou mauvais ou nuisibles) des élèves en relation avec le sujet

3) La **planification** de trois leçons
(Planification de base et grandes lignes auxquelles on ajoute le scénario pour la leçon présentée devant le superviseur)

a) **Planification de base**
- **L'utilité du sujet**
- **Le niveau**
- Situation dans le **programme**: par rapport à ce qui est à faire au primaire et aux notions connexes vues aux différents niveaux secondaires
- **Portrait des élèves** relativement au sujet (c.à.d. ce qu'ils savent et leurs difficultés).
- Les **objectifs** du programme qui sont travaillés dans ces leçons.

**Titre qui caractérise chaque leçon.**

**Préalables** à chaque leçon (max. 10 lignes).

Brève présentation de chaque leçon (genre de leçon, problèmes, exercices).

**Intentions:** Les connaissances que l'on veut faire acquérir, les raisonnements que l'on veut favoriser, les habiletés ou attitudes que l'on veut développer dans chaque leçon.

*En fait, on remet à contribution notre analyse du concept. Les points de l'analyse conceptuelle qui sont travaillés dans chaque leçon en précisant jusqu'à quel point ils sont travaillés (s'agit-il de l'amorce d'un raisonnement, de la consolidation d'une habileté, de la mise en évidence de conceptions erronées en cherchant à provoquer des conflits...).*

**Verbalisations ou /et visualisations que l'on veut mettre en place, vocabulaire à faire acquérir.**

**Matériel utilisé**

Présenter le matériel qui sera utilisé (blocs, papier, jeu...) et spécifier pourquoi il a été choisi.

**Problèmes, situation-problème, activités retenues.**

Justifier brièvement les choix faits.

Le **devoir**, pour chaque leçon, caractérisé par son rôle (veut-on faire pratiquer ce qui a été vu durant la leçon? Veut-on prolonger la réflexion de la leçon sans nécessairement viser le développement d'habiletés? Veut-on récupérer du matériel pour la leçon suivante?

**b) Les grandes lignes**

La structure de la leçon dans l'ordre où elle se déroulera.

Explicitation des moments clés seulement.

Indication des endroits où les exemples sont donnés, où des questions clés seront posées, où du matériel sera introduit où des activités spéciales seront engagées.

Réactions anticipées des élèves.

*On devrait bien percevoir les diverses phases de chaque leçon et le rôle de chaque phase (opérations mentales sollicitées). Le temps consacré à chacune devrait être indiqué.*

Description de la réalisation de la transition d'un leçon à l'autre.

**c) Scénario de leçon**

***Travailler sur le scénario d'une leçon consiste à retrouver et sentir le plus fidèlement possible la réalité de la classe en apprentissage. C'est comme si on y était!***

- Comment la classe sera-t-elle organisée?
- Comment introduira-t-on et rappellera-t-on les préalables dans la leçon?
- Comment sollicitera-t-on les élèves?
- Quels moyens allons-nous utiliser pour provoquer, observer et récupérer les difficultés, les erreurs, les stratégies et réactions éventuelles des élèves?
- Comment seront présentés les exemples, les situations, le matériel et comment seront-ils utilisés?
- Élaborer les questions clés et les réactions des élèves.

  Comment allons-nous organiser le questionnement?
- Quels moyens seront utilisés de manière à ce que les élèves prennent en note ce qui est important?

  *Il y a lieu de prévoir les inscriptions qui devront apparaître au tableau.*
- Comment les devoirs seront-ils présentés et comment s'en servira-t-on dans la leçon?
- Quel rôle entend-t-on faire jouer aux élèves, et à l'enseignant?

À titre d'exemple,

- Lire les leçons de Nancy S. dans le document Moyenne
- Porter attention aux points qui sont relevés dans le document Analyse de leçons: un exemple en Annexe 1 dans le document Guide du laboratoire MAT 2024..

  Voir le document qui suit **pour la forme seulement**.: on dispose sur deux colonnes, avec les paroles et les actions dans chacune des colonnes et des commentaires généraux figurent au centre.

- **Pour le stage, le stagiaire doit remettre la planification de 3 leçons au superviseur.**
- **Pour la leçon présentée devant le superviseur, on demande le scénario; pour les deux autres, les grandes lignes suffisent.**
- **Pour toutes les leçons données en stage, la planification de base et les grandes lignes devront être prêtes et produites sur demande.**

DOCUMENT PRÉSENTÉ POUR LA FORME SEULEMENT

*Aires des polygones réguliers (1ère leçon)*

1) **Objectif général:**
Par cette leçon, je cherche à faire découvrir aux élèves la formule d'aires d'un polygone régulier à partir de leurs connaissances antérieures. Je veux ainsi les amener à raisonner cette formule.

2) **Définition de formule:** (Raisonnement)
Encore ici, la formule représente une méthode de calcul. Par des formules déjà connues, on réussira à trouver une manière de faire pour calculer l'aire d'un polygone régulier. Elle devra s'exprimer en mots sans, initialement, mettre en relation des grandeurs numériques.

3) **Matériel:** – ciseaux et dessin de polygones réguliers (inscrits ou non) sur acétates.

4) **Déroulement:**

Mise en situation: Michel fabrique des tuiles de plusieurs formes.

A) Introduction:

On vient de lui proposer un contrat qui lui demande de fabriquer des tuiles hexagonales (de forme régulière) de différentes grosseurs. Pour pouvoir estimer la céramique nécessaire à la fabrication de ces tuiles, Michel désire trouver une méthode qui lui permettrait de calculer rapidement l'aire des tuiles peu importe la grosseur de celles-ci.

B) Tout en présentant à l'élève la mise en situation, je fabrique un hexagone par pliage.

(5 - 10 min.) (1ère partie)

Je demande ensuite aux élèves de s'en faire un pour illustrer la situation. J'ai choisi la construction par pliage parce qu'elle fournit un bon indice à l'élève. Par le pliage, il peut voir que l'hexagone est formé de six triangles congrus. Je leur laisse essayer avant de leur fournir des indices sur la construction. Comme ils m'ont vu le faire, ils ont déjà une bonne idée sur comment il faut faire. Ils peuvent s'aider entre eux et moi je circule pour fournir des indices dépendant des pliages de chacun. Ces indices seront basés sur le centre de l'hexagone et sur les six branches qui doivent s'y rejoindre. Je n'y consacre cependant pas énormément de temps parce que ce n'est pas le but de cette leçon.

c) 2ième partie: Établir la congruence des triangles (7 min.)

| MOI: | ÉLÈVE: |
|---|---|
| – À l'aide de notre schéma, avez-vous des idées pour trouver l'aire de la tuile hexagonale? | – On ne peut pas calculer son aire parce qu'on ne possède aucune mesure. |
| – Explique ce que tu ferais si on avait les mesures? | – Je trouverais l'aire d'un triangle et je multiplierais par ? cette aire parce que l'hexagone est formé de 6 triangles congrus. |
| – Qu'est-ce qui te dit qu'ils sont tous congrus ? | – On le voit bien! |
| – Ce n'est cependant pas suffisant comme argumentation. | – Ils ont tous même base. |
| – Pourquoi? | – C'est une hexagone régulier donc tous les côtés sont congrus. |
| – Ensuite? | – Les autres côtés sont congrus. |
| – Pourquoi? | – Parce qu'on le voit. |

- Ce n'est pas suffisant.
- Parce que ces côtés partent tous du milieu de l'hexagone jusqu'à un sommet.

- C'est très juste. La raison est que tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle.

(Je montre plusieurs polygones réguliers inscrits par le biais du rétroprojecteur)

- Qu'est-ce que vous remarquer de ces côtés de triangle par rapport au cercle?
- Ces côtés sont des rayons du cercle.
- Quelle est la caractéristique des rayons dans un cercle.
- Ils sont tous égaux.
- On peut donc conclure que ...
- Les six triangles sont congrus parce qu'ils ont tous leurs côtés congrus.

D) **Vers la formule (3^ème^ partie) (7 min.)**
J'installe au rétroprojecteur un dessin d'hexagone

- Maintenant qu'on a prouvé que tous les triangles sont congrus, qu'est-ce qu'on fait?
- Il faut trouver l'aire d'un triangle en multipliant la base (côté de l'hexagone) par la hauteur du triangle et ensuite en divisant par 2.

J'écris sous le dessin: $\text{Aires}_{\text{triangle}} = \frac{\text{côté} \times \text{hauteur}}{2}$

- Ensuite?
- Il faut multiplier l'aire du triangle par six pour trouver l'aire de l'hexagone.

J'écris au tableau: $\text{Aire}_{\text{hexagone}} = 6 \times \text{Aire}_{\text{triangle}}$

Je recommence le même processus avec d'autres polygones réguliers (pentagone, octogone, décagone...). Cette fois-ci, je n'effectue pas de pliage parce que son rôle était de lancer les élèves sur la décomposition du polygone régulier en triangles. Je débute plutôt par un dessin de polygone régulier (déjà divisé en triangles) à l'acétate. A chaque fois, j'écris au tableau le résultat obtenu.

| MOI: | ÉLÈVE: |
|---|---|
| – Que remarquez-vous? | – L'aire du polygone est égal à son nombre de côtés multiplié par l'aire d'un triangle. |

E. **Conclusion:**

J'écris au tableau: $\text{Aire}_{\text{poly}} = \text{nb de côtés} \times \text{Aire}_{\text{triangle}}$

$= \text{nb de côtés} \times \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

Remarque:

Si les élèves découvrent la formule (périmètre × hauteur) /2, je leur laisse utiliser la formule qu'ils comprennent le mieux. Si je ne sens pas le besoin, de la part des élèves, de montrer cette formule, je le ferai au moment propice.

5) **Lexique:**

Vous avez sûrement remarqué que je n'ai pas introduit le mot apothème dans la formule. La raison est que ne vois pas la nécessité de le faire. Pourquoi donner un autre nom à une hauteur de triangle? Le besoin s'en fera sentir quand ils étudieront les pyramides (l'an prochain) car ils se trouveront dans la situation où il y a deux hauteurs (celle de la pyramide et celle du triangle). Pour ne pas avoir de confusion, la hauteur du triangle on l'appellera apothème. Mais à ce moment-ci rien ne nécessite l'introduction de ce nouveau mot. La seule raison qui pourrait m'obliger à introduire ce nouveau vocabulaire est que le mot apothème pourrait se retrouver dans le questionnaire de l'examen du ministère. Il faut donc que je les prévienne pour qu'ils sachent de quoi il est question.

6) Exercices:

Michel sait qu'une de ses tuiles hexagonales a une aire égale à 60 $cm^2$ et que sa hauteur est de 5 cm. Quelle est la mesure d'un côté de cette tuile hexagonale régulière?
Martine fait des biscuits de forme pentagonale. Chaque biscuit possède une aire égale à 7,5 $cm^2$. Elle veut faire des biscuits ayant des côtés deux fois plus longs, quelle sera l'aire de ces biscuits?

Devoir:
Estimer avec justifications l'aire qu'occupe un panneau de signalisation ordonnant un arrêt (un STOP).

## ANNEXE 3

## Rapport de stage, activité d'enseignement pour les stagiaires de deuxième année (premier stage d'enseignement en mathématiques)

(Tiré de: "Stage II: Initiation à la pratique de l'enseignement, document cadre, complété par des informations relatives à la concentration Mathématiques". UQAM, automne 1997, page 53.)

### "2a. Les leçons et leur analyse

Cette partie du rapport consiste en une analyse de votre planification après expérimentation. Mettez ici la préparation améliorée de trois leçons consécutives dont une est celle à laquelle le superviseur a assisté. La leçon devrait déjà avoir été analysée à partir de l'enregistrement audio. Cette leçon dont la préparation est plus élaborée doit avoir été donnée lorsque le stagiaire est en charge d'un groupe. Ces leçons doivent être présentées sous la même forme que celle exigée pour le cours de didactique I (...).

Les documents suivants doivent accompagner la préparation:

1. **l'enregistrement** sur cassette audio ou de préférence vidéo de la leçon.
2. **l'analyse critique globale** par rapport aux intentions formulées dans le projet[61] ou reformulées durant le stage ainsi que par rapport à certaines des rubriques mentionnées au volet "capacité à réaliser une activité d'enseignement" du formulaire d'évaluation remis à l'enseignant associé. Mettez en évidence les améliorations qui ont été apportées depuis l'évaluation formative faite au début du stage par l'enseignant-associé et le superviseur.
3. **les leçons modifiées après analyse**. Faites ressortir les bons points à retenir ou les mauvais à éviter à l'avenir même si ceux-ci n'apparaissent pas dans votre projet de stage. Ajoutez ces remarques à votre préparation de leçon en les inscrivant du côté gauche de votre texte."

---

[61] Document préparé avant le stage présentant les intentions globales du stagiaire relativement à son stage.

# ANNEXE 4

## Description de la séquence d'enseignement pour les stagiaires de quatrième année (deuxième stage d'enseignement en mathématiques

(Tiré de: "Stage IV: mathématiques. ESM 6201. UQAM, automne 1998, pages XI, XII.)

### Description de la séquence d'enseignement

La séquence d'enseignement comprend quatre sections intitulées: **introduction, analyse préalables et objectifs, plan d'action** et **modalités d'évaluation.**

1- INTRODUCTION

L'introduction comporte trois parties.

a) Niveau, sujets enseignés et période d'intervention
b) Précisions pertinentes sur les classes, l'école, l'enseignant, l'approche du manuel utilisé, tout ce qui qui contribue à expliquer certains choix du plan d'action
c) Place des notions abordées au stage à l'intérieur des programmes du primaire et du secondaire (y compris les applications possibles en sciences).

2- ANALYSES PRÉALABLES ET OBJECTIFS

Cette deuxième partie comprend quatre parties.

a) Une analyse conceptuelle des notions concernées par la séquence incorporant une description des difficultés prévues, des erreurs fréquentes.

b) Un portrait-type initial qui décrit les connaissances et habiletés attendues des élèves au début de la période d'enseignement. Le portrait-type initial comprend des exercices-types (environ 4) qui, pris globalement, témoignent de l'ensemble des connaissances et des habiletés développées chez les élèves avant l'enseignement. Ces exercices sont accompagnés d'une justification du choix qui a été fait. Les exercices-types peuvent servir au début du stage pour situer les élèves. Le portrait-type initial doit refléter la **situation véritable qui prévaut au début de l'enseignement** et non pas des compétences idéales.

*Note:* Pour le stage, les visites préliminaires à l'école et les discussions avec le maître associé permettent au stagiaire de se faire une meilleure idée du niveau de maîtrise des élèves.

c) Un portrait-type final qui décrit les connaissances et habiletés attendues des élèves à la fin de la période d'enseignement. Le portrait-type final comprend des exercices-types (en nombre limité, environ 6) qui, pris globalement, témoignent de l'ensemble des connaissances et des habiletés à développer chez les élèves. Ces exercices-types sont accompagnés d'une justification du choix qui a été fait.

Chaque exercice-type des portraits-types décrit les compétences des élèves en trois temps. Après la formulation précise de l'exercice, on présente:
a) une ou plusieurs solutions détaillées attendues des élèves (cette solution détaillée doit décrire ce que l'élève fait, ce à quoi il doit penser, les dessins qu'il doit produire...);
b) la liste de connaissances ou habiletés requises que suggèrent la ou les solutions produites en a)
c) les difficultés et erreurs attendues en fonction de la ou des solutions retenues en a).

d) Un tableau synthèse des deux portraits-types accompagné d'une formulation des objectifs majeurs du plan d'action que la comparaison des portraits-types faire ressortir.

## 3- PLAN D'ACTION

**a) Description générale de la démarche retenue (grandes lignes)**
La démarche retenue à partir de l'examen des objectifs issus du tableau synthèse sera décrite comme une suite d'étapes décomposées en sous-étapes. Cette description sera l'occasion de préciser ce sur quoi on entend insister et ce que l'on veut éviter. L'utilisation d'un schéma (facultatif) peut aider à bien illustrer les relations entre les étapes et sous-étapes.

*La section a) est centrale dans la séquence car vous y présentez une synthèse de vos intentions accompagnée d'un résumé de ce que vous entendez réaliser comme enseignement durant votre stage. Elle doit être articulée sur l'analyse précédente (portrait initial/final/tableau synthèse).*

**b) Description de chacune des étapes**
*La forme que prend la description de chacune de ces étapes peut varier selon le sujet.*
Cette description devra comprendre
- la **durée** en nombre de leçons
- le **but visé** par rapport aux difficultés à prendre en considération, aux raisonnements à développer, aux éléments à mémoriser, aux algorithmes...
- une **description sommaire** des activités d'enseignement majeures prévues pour l'étape
- **d'autres commentaires** (s'il y a lieu) par rapport à l'enseignement à réaliser
- **deschoix** à prévoir (s'il y a lieu) lors de son exécution, en fonction des réactions des élèves, du raccourcissement de la période prévue pour les leçons, de l'enrichissement pour certains élèves,...

**c) Un échéancier d'exécution**
La planification décrite dans cet échéancier devra se faire à partir du calendrier d'activité des classes du stagiaire, elle devra entre autres tenir compte de la période de temps réservée aux leçons, des fins de semaines rallongées,...

**d) Description détaillée des activités d'enseignement**
*Idéalement, le stagiaire avant de démarrer son intervention à l'école devrait pouvoir compter sur le plus grand nombre possible de "leçons préparées". Cependant, cela n'est pas toujours possible et n'est pas toujours la solution idéale compte tenu des ajustements à effectuer.*
Le stagiaire devra fournir dans sa séquence une description détaillée de deux des interventions prévues en les situant dans l'échéancier prévu.

## 4- MODALITÉS D'ÉVALUATION

Cette section est composée de deux parties.
a) On exposera trois principes que l'on entend respecter durant le stage en rapport avec l'évaluation. Chacun de ces principes sera explicité à l'aide d'exemples.
b)On préparera un barème pour trois questions présentées dans le portrait-type final.

## Description de la séquence d'enseignement améliorée

La séquence d'enseignement est présentée sur des feuilles écrites au recto seulement et fait partie intégrale du rapport de stage.

Cependant en fonction des observations faites durant le stage, l'étudiant doit présenter sur les versos adjacents toute modification suggérée par le stage. C'est cette version "corrigée" de la séquence qui porte le nom de séquence améliorée.