SÉBASTIEN GABOURY

SUR LES CONVOLUTIONS DE FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en Mathématiques
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DE SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2007

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux convolutions de fonctions arithmétiques. D'abord on rappelle les grandes notions de base : fonctions additives et fonctions multiplicatives, convolution de Dirichlet, convolutions arithmétiques régulières et fonctions génératrices. Ensuite, on étudie différents opérateurs de moyenne sur certains ensembles de diviseurs et leurs inverses. Aussi, on porte son attention à l'étude des valeurs moyennes de certaines fonctions en améliorant de façon significative leur terme d'erreur $O(\frac{1}{\log x})$ en un terme $O(\frac{1}{\log^{m+1} x})$ pour un entier positif m arbitraire. Finalement, on analyse quelques caractérisations de fonctions arithmétiques basées sur diverses convolutions.

Avant-propos

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Jean-Marie De Koninck, pour sa disponibilité, ses judicieux conseils et son appui financier ainsi que mon co-directeur, le professeur Claude Levesque pour les mêmes raisons.

Je tiens aussi à remercier mes parents, Richard et Lizette, pour leur amour, leur appui financier tout au long de mes études, leurs encouragements, leur compréhension et surtout d'avoir cru en moi.

Finalement, je tiens à remercier mes frères, Jean-François et Marc-André, ainsi que mes amis pour leurs encouragements.

À la mémoire de mon père

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre est une synthèse des principales notions de théorie des nombres qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. On y traite, en autre, des fonctions arithmétiques et de leurs propriétés, de la convolution de Dirichlet, des convolutions généralisées, des fonctions génératrices qui seront utilisées plus particulièrement dans le chapitre 2, de l'intégrale de Stieltjes et de quelques autres définitions importantes pour le chapitre 3. Il faut noter que quelques petits résultats seront énoncés, certains d'entre eux avec démonstration et d'autres sans preuve, et cela dans le but d'alléger le contenu du premier chapitre.

1.1 Les fonctions arithmétiques

Les fonctions arithmétiques jouent un rôle fondamental en théorie des nombres. En effet, l'étude de celles-ci nous révèle de très intéressantes propriétés des nombres naturels. À cet effet, le livre de Apostol [1] se veut un excellent ouvrage de référence. Nous désignerons respectivement par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles des nombres entiers positifs, de tous les nombres entiers, des nombres réels et des nombres complexes.

Définition 1.1.1. Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Les principales fonctions arithmétiques utilisées pour l'étude des convolutions sont les suivantes :

i) $\phi(n)$: la fonction d'Euler qui donne le nombre d'entiers positifs $m \leq n$ tels que $pgcd(m, n) = 1$;

ii) $\tau(n)$: le nombre de diviseurs de n ;
iii) $\sigma(n)$: la somme des diviseurs de n ;
iv) $\omega(n)$: le nombre de facteurs premiers distincts de n ;
v) $\gamma(n)$: la fonction noyau définie par $\gamma(1) = 1$ et pour $n \geq 2$ par

$$\gamma(n) = \prod_{p|n} p \ ;$$

vi) $\mu(n)$: la fonction de Mœbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait,} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{autrement ;} \end{cases}$$

vii) $\Omega(n)$: la fonction définie par

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha || n} \alpha \ ;$$

viii) $\beta(n)$: le produit des exposants défini par

$$\beta(n) = \prod_{p^\alpha || n} \alpha \ ;$$

ix) $I(n) = n$, pour tout $n \geq 1$;

On désignera par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques. Les fonctions décrites en *i*), *ii*), *iii*), *v*), *vi*), *viii*) et *ix*) sont faciles à évaluer puisqu'elles sont multiplicatives. Nous n'effectuerons pas la démonstration du théorème suivant. Nous pouvons toutefois la retrouver dans le livre de De Koninck et Mercier [3] (voir p. 68-75).

Théorème 1.1.2. *Soit $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$ où $q_1, ..., q_r$ sont des premiers distincts. Alors*

$$\begin{aligned} \tau(n) &= (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1), \\ \phi(n) &= \prod_{i=1}^{r} (q_i^{a_i} - q_i^{a_i - 1}), \\ \sigma(n) &= \prod_{i=1}^{r} \frac{q_i^{a_i+1} - 1}{q_i - 1}. \end{aligned}$$

Deux caractéristiques fondamentales traitées ici sont les notions de fonction multiplicative et de fonction additive. Ces notions seront capitales dans notre étude sur les convolutions de fonctions arithmétiques.

Définition 1.1.3. On dit qu'une fonction arithmétique f est *multiplicative* si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque m et n sont relativement premiers, c'est-à-dire $pgcd(m,n) = (m,n) = 1$. Si la relation tient pour tout m, n alors on dit que la fonction est *complètement multiplicative*. De plus, si f est une fonction multiplicative telle que $f(p^\alpha) = f(p)$ pour tout premier p, on dit alors que f est une fonction *fortement multiplicative*. On désigne respectivement par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{CM}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives et l'ensemble des fonctions complètement multiplicatives et par $\mathcal{FM}$ l'ensemble des fonctions fortement multiplicatives. Bien sûr, $\mathcal{CM} \subset \mathcal{M}$.

Il est facile de constater que les fonctions définies en *i*) *ii*), *iii*), *vi*), *viii*) et *ix*) sont multiplicatives et que les fonctions introduites en *ix*) et *x*) sont complètement multiplicatives. Maintenant, introduisons la notion de fonction additive.

Définition 1.1.4. On dit qu'une fonction arithmétique f est *additive* si $f(1) = 0$ et $f(mn) = f(m) + f(n)$ lorsque m et n sont relativement premiers, c'est-à-dire $(m,n) = 1$. Si la relation tient pour tout m, n, alors on dit que la fonction est *complètement additive*. De plus, si $f(p^\alpha) = f(p)$ pour tout premier, on dit alors que f est *fortement additive*. On désigne respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{CA}$ et $\mathcal{FA}$ l'ensemble des fonctions additives, complètement additives et fortement additives.

Les fonctions définies en *iv*) et *vii*) de même que la fonction log sont additives. Dans notre étude sur les convolutions de fonctions arithmétiques, nous nous intéresserons aux sommes de telles fonctions sur différents ensembles de diviseurs. Nous allons donc énoncer un premier théorème.

Théorème 1.1.5. *Soit f et $g \in \mathcal{M}$. Si*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

alors $F \in \mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $(m,n) = 1$. Alors $d|mn \Leftrightarrow d = d_1d_2$ où $d_1|m$, $d_2|n$ et $(d_1,d_2) = 1$. C'est pourquoi

$$\begin{aligned}
F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right) \\
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1d_2)g\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right) \\
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{d_1|m} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2|n} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= F(m)F(n). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.6. Soit f une fonction multiplicative. Alors la fonction F définie par

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

est également multiplicative.

Terminons cette section en mentionnant, sans toutefois en donner la démonstration que l'on peut retrouver dans le livre de De Koninck et Mercier [3] (voir p. 79), un théorème d'inversion très important dû à Mœbius.

Théorème 1.1.7. *(Théorème d'inversion). Pour tout entier positif n,*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)$$

1.2 La convolution de Dirichlet

Il y a beaucoup d'opérations binaires définies sur l'ensemble des fonctions arithmétiques. D'abord la somme et le produit de deux fonctions arithmétiques, disons f et g, sont définies de la manière habituelle :

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n)+g(n) \text{ pour tout } n, \\ (fg)(n) &= f(n)g(n) \text{ pour tout } n. \end{aligned}$$

Notons que l'addition et la multiplication de fonctions arithmétiques possèdent les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité. Maintenant nous allons définir la convolution de Dirichlet.

Définition 1.2.1. La convolution de Dirichlet de f et g, notée $f * g$, est définie comme suit :

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

La convolution de Dirichlet respecte elle aussi les propriétés de commutativité, de distributivité et d'associativité. En effet, la proposition suivante est facilement démontrable.

Proposition 1.2.2. *Si f, g et h sont des fonctions arithmétiques, alors*
i) $f * g = g * f$;

ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Aussi, on peut facilement vérifier que l'ensemble des fonctions arithmétiques muni de l'addition et de la convolution de Dirichlet forme un anneau commutatif. De plus, cet anneau possède un élément neutre pour la convolution. En effet, la fonction E définie par

$$E(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \ , \\ 0 & \text{autrement} \ . \end{cases}$$

est l'élément neutre pour cet anneau.

Définition 1.2.3. Soit f une fonction arithmétique. On dira que la fonction arithmétique g est l'inverse de f si $f * g = g * f = E$. Cet inverse sera noté f^{-1}. Il est important de mentionner que si f possède un inverse, il est unique.

On peut se poser la question suivante.

Question : Est-ce que toutes les fonctions arithmétiques ont un élément inverse ?

Nous allons maintenant énoncer un critère pour répondre à cette question.

Proposition 1.2.4. *Une fonction arithmétique a un élément inverse si et seulement si* $f(1) \neq 0$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que f possède un inverse. Alors

$$1 = E(1) = (f * f^{-1})(1) = f^{-1}(1)f(1),$$

et c'est pourquoi $f(1) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $f(1) \neq 0$, et en définissant de manière inductive la fonction g par

$$g(1) = \frac{1}{f(1)},$$

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \quad \text{pour tout } n > 1,$$

alors $f * g = E$, et par la proposition 1.2.2, g est l'inverse de f. □

Examinons maintenant la propriété de multiplicativité des fonctions inverses. En effet, il est important de se demander si l'inverse d'une fonction arithmétique multiplicative est lui-même multiplicatif puisque nous savons déjà par le théorème 1.1.5 que la convolution de Dirichlet de deux fonctions dans $\mathcal{M}$ est aussi dans $\mathcal{M}$. Nous ne démontrerons pas le théorème mais la démonstration se retrouve dans le livre de P.J. McCarthy [2] (voir p. 8-9).

Proposition 1.2.5. *Si $f \in \mathcal{M}$, alors $f^{-1} \in \mathcal{M}$.*

Finalement, la convolution de Dirichlet nous fournit une caractérisation des fonctions complètement multiplicatives qui nous sera utile au chapitre 3. Notons d'abord qu'une fonction $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si $f^{-1} = \mu f$. La démonstraton de ce résultat est donnée dans le livre de P.J. McCarthy [2] (voir p. 16-17).

Proposition 1.2.6. *Une fonction multiplicative f est complètement multiplicative si et seulement si*

$$f(g * h) = fg * fh$$

pour toutes fonctions arithmétiques g et h.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si f est complètement multiplicative alors, quelles que soient les fonctions g et h, pour tout n,

$$\begin{aligned}
(f(g * h))(n) &= f(n) \sum_{d|n} g(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} f(d) g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= (fg * fh)(n).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'équation tienne pour $g = 1$ et pour $h = \mu$. On a alors

$$E = fE = f(I * \mu) = fI * f\mu = f * \mu f,$$

et c'est pourquoi $f^{-1} = \mu f$, ce qui implique que f est complètement multiplicative. □

1.3 Principes de convolution généralisée

La convolution de Dirichlet est une notion qui peut être généralisée pour traiter les différents ensembles de diviseurs d'un entier sur lesquels portent l'étude. La convolution généralisée porte le nom de K-convolution. Ainsi, nous pouvons grâce à la K-convolution étudier le comportement d'une quantité de fonctions arithmétiques sur divers ensembles de diviseurs. Le livre de McCarthy [2] traite de ces principes d'une façon très claire.

Définition 1.3.1. Soit K une fonction à valeurs complexes définie sur l'ensemble des diviseurs d'un entier n. Si f et g sont deux fonctions arithmétiques, alors leur K-*convolution* est définie par

$$(f *_K g)(n) = \textstyle\sum_{d|n} K(n,d)f(d)g(\frac{n}{d}) \text{ pour tout } n,$$

et elle doit satisfaire les quatres propriétés suivantes :

(1) $K(n,n) = K(n,1) = 1$ pour tout n.

(2) $K(mn,de) = K(m,d)K(n,e)$ pour tout m,n,d et e tels que $d|m$, $e|n$ et $(m,n) = 1$.

(3) $K(n,d)K(d,e) = K(n,e)K(\frac{n}{e},\frac{d}{e})$ pour tout n,d et e tels que $d|n$ et $e|d$.

(4) $K(n,d) = K(n,\frac{n}{d})$ pour tout n et d tels que $d|n$.

Remarque 1. On pourrait démontrer que les propriétés $(1)-(4)$ nous assurent que nous sommes en présence d'une convolution commutative et associative. De plus, la propriété (2) nous indique que si nous effectuons la K-convolution de deux fonctions multiplicatives, alors la K-convolution sera elle aussi multiplicative, tandis que (1) nous assure que l'ensemble sur lequel la K-convolution portera contiendra au moins les diviseurs unitaires.

Pour une démonstration de ce théorème, voir P.J. McCarthy [2] (p. 149-154)

Définition 1.3.2. On appelle *diviseur unitaire*, un diviseur d de n tel que $(d,\frac{n}{d}) = 1$. Pour signifier que d est un diviseur unitaire de n, on écrira $d||n$.

Définition 1.3.3. Une K-convolution arithmétique est dite *régulière* si elle satisfait les conditions suivantes :

(i) les conditions $(1)-(4)$ sont valables pour la fonction K,

(ii) $K(n,d) = 0$ ou 1 pour tout n et d telle que $d|n$.

(iii) Si $\mu_K = I^{-1}$ alors $\mu_K(p^\alpha) = 0$ ou 1 pour tout p premier et tout $\alpha \geq 0$. On la notera par A.

Attardons-nous maintenant aux propriétés des inverses de fonctions multiplicatives ainsi qu'à l'élément neutre pour une K-convolution. D'abord, l'élément neutre pour toutes les K-convolutions respectant les conditions $(1)-(4)$ est la fonction $E(n)$ définie par

$$E(n) = \begin{cases} 1 & \text{si n} = 1\ , \\ 0 & \text{autrement}\ . \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des fonctions arithmétiques muni de l'addition et de la K-convolution respectant $(1)-(4)$ et de cette fonction E est un anneau commutatif. L'inverse g d'une fonction arithmétique f dans cet anneau doit satisfaire à la condition suivante :

$$1 = (f *_K g)(1) = (g *_K f)(1) = K(1,1)f(1)f^{-1}(1) = f(1)f^{-1}(1) = 1;$$

donc $f(1) \neq 0$. On définit f^{-1} récursivement par :

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

et

$$f^{-1}(n) = -\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} K(n,d)f(d)f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \text{ pour tout } n > 1.$$

Proposition 1.3.4. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative telle que $f(1) \neq 0$. Alors f^{-1} est multiplicative.*

On remarque facilement que les propriétés de la K-convolution sont pratiquement les mêmes que celle du produit de Dirichlet lorsque celle-ci respecte les conditions $(1)-(4)$. Il est important de mentionner le fait que si nous sommes en présence d'une convolution arithmétique régulière A, alors on a ceci :

$$U \subseteq A \subseteq D$$

où U est la convolution de Dirichlet seulement sur les diviseurs unitaires et D est la convolution de Dirichlet.

1.4 Les fonctions génératrices

L'étude des fonctions arithmétiques multiplicatives et complètement multiplicatives peut, en général, se faire plus aisément par l'analyse des séries de Dirichlet qui leur sont associées. Ainsi, étant donné une fonction arithmétique f, sa série de Dirichlet correspondante est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

où s est une variable complexe. Notons que dans le présent ouvrage, on se limitera au cas où s est réel.

Chaque série de Dirichlet possède une représentation unique pour chaque fonction arithmétique. Avant d'énoncer le théorème de représentation, nous allons définir ce qu'est une abscisse de convergence absolue fini α_a.

Définition 1.4.1. Soit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ une série de Dirichlet. L'*abscisse de convergence absolue* α_a est définie comme étant le plus petit nombre réel α_a tel que si $s > \alpha_a$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{f(n)}{n^s}|$ converge. Dans ce cas, on dit que $F(s)$ possède une abscisse de convergence absolue finie, notamment α_a.

Théorème 1.4.2. *Soient $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ deux séries de Dirichlet ayant la même abscisse de convergence absolue α_a. Supposons qu'il existe une suite divergente $s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \ldots$ telle que $F(s_k) = G(s_k)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Alors $f(n) = g(n)$ pour chaque entier positif n.*

Démonstration. Posons $h(n) = f(n) - g(n)$ et $H(s) = F(s) - G(s)$. Montrons que $h \equiv 0$. Pour ce faire, on procède par contradiction en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $h(n) \neq 0$. Soit alors N le plus petit entier positif tel que $H(N) \neq 0$. On aura alors, pour $s > \alpha_a$,

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

De cette relation on déduit que

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Puisque $H(s_k) = 0$, il en résulte que

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{s_k}}.$$

Soit $c > \alpha_a$. Choisissons k suffisamment grand pour que $s_k > c$. Alors

$$| h(N) | \leq N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{| h(n) |}{n^{s_k}} = N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{| h(n) |}{n^{c+(s_k-c)}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{N^{s_k}}{(N+1)^{s_k-c}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\mid h(n) \mid}{n^c} \\ &= \left(\frac{N}{N+1}\right)^{s_k} (N+1)^c \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\mid h(n) \mid}{n^c}. \end{aligned}$$

Or, pour N fixe, $\left(\frac{N}{N+1}\right)^{s_k} \to 0$ lorsque $k \to \infty$, alors que les expressions $(N+1)^c$ et $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^c}$ demeurent bornées. Cela veut dire que $h(N) = 0$, ce qui contredit le choix minimal de N. □

Les fonctions génératrices permettent parfois de représenter des séries de Dirichlet sous forme de produit infini. En effet, lorsque f est multiplicative ou complètement multiplicative, nous pouvons les représenter très facilement. Nous n'effectuerons pas le démonstration du théorème suivant que l'on pourra retrouver dans le livre De Koninck et Mercier [3] (voir p. 190-191).

Théorème 1.4.3. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative pour laquelle α_a est fini. Alors, si $s > \alpha_a$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots)$$

Si f est complètement multiplicative, alors pour $s > \alpha_a$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \frac{f(p)}{p^s})^{-1}.$$

Théorème 1.4.4. *Soient $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ deux séries de Dirichlet dont les abscisses de convergence absolue sont respectivement $\alpha_a(f)$ et $\alpha_a(g)$. Alors si $s > max(\alpha_a(f), \alpha_a(g))$, on a*

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

où $h = f * g$.

Démonstration. La démonstration provient du livre De Koninck et Mercier [3]. Puisque $s > \max\{\alpha_a(f), \alpha_a(g)\}$, on peut réarranger les termes. On écrit alors

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(m)g(n)}{(mn)^s}$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sum_{mn=r} f(m)g(n)}{r^s}$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(r)}{r^s}.$$

où $h(r) = \sum_{mn=r} f(m)g(n) = (f * g)(r)$.

□

Voyons deux exemples de fonctions génératrices très fréquents, mais auparavant regardons un dernier théorème sur les fonctions génératrices qui effectue un lien intéressant avec le produit de Dirichlet de fonctions multiplicatives.

Exemple 1.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad (s>1).$$

Exemple 2.

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \qquad (s>1).$$

1.5 Intégrale de Stieltjes et autres définitions

Dans le chapitre 3, nous allons étudier le terme d'erreur apparaissant dans certaines relations. Puisque ces relations comportent des sommes finies, nous devons définir l'intégrale de Stieltjes. De plus, nous devons également définir les fonctions $\pi(x)$ et $Li(x)$, la partie fractionnaire et la partie entière d'un nombre réel, le coefficient binomial ainsi que la notation $o(...), O(...)$ de Landau.

Il s'avère que certaines sommes finies sont plus faciles à évaluer si on les écrit comme des intégrales de Stieltjes. Ainsi, *l'intégrale de Stieltjes* I de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à la fonction g est notée par

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t)dg(t).$$

Ainsi, si l'on cherche à estimer l'expression

$$\sum_{\substack{a \leq x \\ a \in A}} f(a),$$

où $A \subset \mathbb{N}$, f est une fonction continue sur l'intervalle $[1, x]$ et $A(x)$ désigne la fonction de compte de l'ensemble A, i.e.,

$$A(x) = \#\{a \leq x : a \in A\},$$

alors il est facile de voir que

$$\int_{1^-}^{x} f(t) dA(t) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} f(n).$$

Définition 1.5.1. On définit la fonction $\pi(x)$ de la façon suivante :

$$\pi(x) = \#\{p \leq x : p \text{ est premier}\}.$$

Définition 1.5.2. On appelle $Li(x)$ la fonction suivante :

$$Li(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\log t}.$$

Définition 1.5.3. On écrit $[x]$ pour désigner la fonction *plus grand entier inférieur ou égal* à x. On écrit aussi $\{x\}$ pour signifier la *partie fractionnaire* de x c'est-à-dire $\{x\} = x - [x]$.

Définition 1.5.4. Soit n et k deux entiers positifs avec $k \leq n$. On écrit $\binom{n}{k}$ pour désigner le *coefficient binomial* défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Finalement, voyons ce qu'est la notation *o(...), O(...)* de Landau qui sera présente tout au long du chapitre 3.

Définition 1.5.5. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$ (où $a \geq 0$), on dit que $f(x) = O(g(x))$ s'il existe deux constantes $M > 0$ et x_0 telles que $\mid f(x) \mid < Mg(x)$ pour tout $x \geq x_0$. On écrit aussi parfois $f(x) \ll g(x)$.

Définition 1.5.6. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$ (où $a \geq 0$), on dit que $f(x) = o(g(x))$ si, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une constante $x_0 = x_0(\epsilon)$ telle que $\mid f(x) \mid < \epsilon g(x)$ pour tout $x \geq x_0$.

Définition 1.5.7. Étant donné deux fonctions f et g définies sur $[a, \infty)$ (où $a \geq 0$), on écrit $f(x) \sim g(x)$ pour signifier que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Chapitre 2

Opérateurs basés sur différents ensembles de diviseurs

Ce chapitre est consacré à l'étude d'opérateurs $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions arithmétiques, et plus particulièrement ceux basés sur des ensembles de diviseurs. Dans la première section, nous examinerons les propriétés des opérateurs étudiés par De Koninck et Grah [4]. La seconde section sera consacrée à l'étude des opérateurs inverses de la première section. Enfin, dans la troisième section, nous étudierons deux nouveaux opérateurs.

2.1 Opérateurs de moyenne $\overline{T}$, $\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$

L'étude des expressions de la forme

$$\sum_{d|n} f(d), \qquad \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ libre de carrés}}} f(d), \qquad \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} f(d),$$

où f est une fonction arithmétique, s'avère intimement liée à celle des fonctions arithmétiques $\overline{f}, \widehat{f}$ *et* $\widetilde{f}$, associées à la fonction arithmétique f et définies par

$$\begin{aligned}
\overline{f}(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d), \\
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ libre de carrés}}} f(d),
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} f(d).$$

On remarque que les fonctions $\overline{f}, \widehat{f}$ *et* $\widetilde{f}$ représentent respectivement la moyenne de la fonction f sur certains sous-ensembles de l'ensemble des diviseurs de l'entier n. Ainsi, $\overline{f}$ est la moyenne des valeurs de f sur les diviseurs de n, $\widehat{f}$ est la moyenne sur les diviseurs libres de carrés et $\widetilde{f}$ est celle sur les diviseurs unitaires. Dans un premier temps, nous mentionnerons quelques propriétés arithmétiques des fonctions $\overline{f}, \widehat{f}$ *et* $\widetilde{f}$. Ensuite, nous donnerons quelques exemples concrets de $\overline{f}, \widehat{f}$ *et* $\widetilde{f}$ lorsque $f = \sigma, \tau, \varphi, \sigma_k, \beta, \Omega$. Notons que σ_k est la fonction désignant la somme des puissances k-ièmes des diviseurs de l'entier n, β est la fonction désignant le produit des exposants dans la factorisation en premiers d'un entier n et Ω est la fonction désignant la somme des exposants dans la factorisation d'un entier n.

Définition 2.1.1. On définit sur $\mathcal{F}$ les opérateurs $\overline{T}, \widehat{T}$ *et* $\widetilde{T}$ par

$$\begin{aligned} \overline{T}(f) &:= \overline{f}, \\ \widehat{T}(f) &:= \widehat{f}, \\ \widetilde{T}(f) &:= \widetilde{f}. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.2. *L'opérateur $\overline{T}$ établit une bijection de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$. Il en est de même pour l'opérateur $\widetilde{T}$.*

Démonstration. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$,

$$\overline{T}(f) = \overline{f} = \frac{1}{\tau}(1 * f) \text{ si et seulement si } f = \mu * \tau \overline{f}$$

et

$$\widetilde{T}(f) = \widetilde{f} = \frac{1}{2^{\omega}}(1 *_{\mu} f) \text{ si et seulement si } f = (-1)^{\omega} *_{\mu} 2^{\omega} \widetilde{f}$$

où $*_{\mu}$ désigne la convolution unitaire. □

Exemples

(A) $\lambda(n) = \overline{\lambda(n)\tau(n^2)}$,

(B) $E(n) = \overline{\mu}(n) = \widehat{\mu}(n)$.

Il est très intéressant de constater que les opérateurs $\overline{T}, \widehat{T}$ *et* $\widetilde{T}$ préservent la multiplicativité et l'additivité.

Théorème 2.1.3. *Soit $f \in \mathcal{A}$ (respectivement $f \in \mathcal{M}$). Alors les fonctions $\overline{f}$, $\widehat{f}$ et $\widetilde{f}$ appartiennent toutes à $\mathcal{A}$ (respectivement à $\mathcal{M}$).*

Démonstration. Si f est dans $\mathcal{M}$, la démonstration est très simple. Nous n'établirons la preuve que pour $\overline{f}$ avec $f \in \mathcal{A}$, étant donné que les démonstrations des autres cas sont presque identiques.

Soit $f \in \mathcal{A}$ et m,n deux entiers positifs tels que $(m,n) = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\overline{f}(mn) &= \frac{1}{\tau(mn)} \sum_{d|mn} f(d), \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1 d_2), \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} (f(d_1) + f(d_2)), \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1) + \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_2), \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} 1 + \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_2|m} f(d_2) \sum_{d_1|n} 1, \\
&= \overline{f}(n) + \overline{f}(m).
\end{aligned}$$

□

Il est important de noter que la réciproque du théorème précédent est valable pour $\overline{f}$ *et* $\widetilde{f}$, alors qu'elle est fausse pour $\widehat{f}$; en effet, $\widehat{f} \in \mathcal{A}$ n'implique pas $f \in \mathcal{A}$. Par exemple, considérons la fonction suivante :

$$f(n) = \begin{cases} 2^{\Omega(n)} & \text{si } p^2|n \text{ pour un certain nombre premier p,} \\ \omega(n) & \text{autrement .} \end{cases}$$

Alors f n'est pas dans $\mathcal{A}$ puisque par exemple $f(2^2 \cdot 3^2) = 2^4 = 16 \neq f(2^2) + f(3^2) = 2^2 + 2^2 = 8$. Par contre, on a que $\widehat{f} = \widehat{\omega}(n) = \frac{\omega(n)}{2} \in \mathcal{A}$.

Voyons maintenant, sous forme de théorème, quelques caractéristiques de $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ *et* $\widehat{f}$ lorsque f est additive, complètement additive, fortement additive, multiplicative, complètement multiplicative et fortement multiplicative. On pourra trouver les démonstrations de ces théorèmes dans [4].

Théorème 2.1.4. *Si $f \in \mathcal{A}$, alors*

$$\begin{aligned} \overline{f}(n) &= \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m), \\ \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2} \sum_{p \mid n} f(p) = \frac{1}{2} f(\gamma(n)), \\ \widetilde{f}(n) &= \frac{1}{2} f(n). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.5. *Si $f \in \mathcal{CA}$, alors*

$$\overline{f}(n) = \widetilde{f}(n) = \frac{f(n)}{2}.$$

Théorème 2.1.6. *Si $f \in \mathcal{FA}$, alors*

$$\overline{f}(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{\alpha+1} f(p) = f(n) - \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{\alpha+1} f(p).$$

Théorème 2.1.7. *Si $f \in \mathcal{M}$, alors*

$$\begin{aligned} \overline{f}(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)), \\ \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + f(p)), \\ \widetilde{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + f(p^\alpha)). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.8. *Si $f \in \mathcal{FM}$, alors*

$$\begin{aligned} \overline{f}(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \alpha f(p)), \\ \widetilde{f}(n) &= \widehat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + f(p)). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.9. *Si $f \in \mathcal{CM}$, alors*

$$\widetilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + f(p)^\alpha).$$

On voit facilement que $\overline{T}$ préserve le caractère complètement additif tandis que $\widehat{T}$ envoie les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$ sur les ensembles $\mathcal{FA}$ et $\mathcal{FM}$ respectivement. Cela signifie que si f est une fonction additive (respectivement multiplicative), alors la fonction $\widehat{f}$ sera fortement additive (respectivement fortement multiplicative). De plus, $\widetilde{T}$ préserve les caractères totalement additif, fortement additif et fortement multiplicatif des fonctions arithmétiques qui ont ces propriétés avec la particularité que $\widetilde{T} = \widehat{T}$ sur $\mathcal{FA}$ et sur $\mathcal{FM}$.

Le résultat suivant précise que si $f \in \mathcal{M}$ alors $f(\gamma(n))$ est le quotient de deux fonctions chacune d'elles étant une moyenne sur les diviseurs libres de carrés.

Théorème 2.1.10. *Soit $f \in \mathcal{M}$ telle que $f(n) \neq 0$ pour tout entier positif n et posons $g = \frac{1}{f}$. Alors*

$$\widehat{f}(n) = f(\gamma(n))\widehat{g}(n),$$

alors que pour $\widetilde{f}$, on a la relation

$$\widetilde{f}(n) = f(n)\widetilde{g}(n).$$

Démonstration. En posant $g = \frac{1}{f}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}}\prod_{p|n}(1+f(p)),\\
&= \frac{f(\gamma(n))}{2^{\omega(n)}}\prod_{p|n}(1+\frac{1}{f(p)}),\\
&= \frac{f(\gamma(n))}{2}\sum_{d|n}\mu^2(d)g(d),\\
&= f(\gamma(n))\widehat{g}(n).
\end{aligned}$$

□

Exemple

Posons $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$. Alors $g(n) = \frac{n}{\phi(n)}$ et $\widehat{f}(n) = \frac{\phi(n)}{n}\hat{g}(n)$. Puisque $f(n) = \frac{\phi(n)}{n} \in \mathcal{FM}$, on a également $\widetilde{f}(n) = f(n)\widetilde{g}(n)$.

Nous présentons un dernier théorème relatif à la composition des opérateurs pour diverses fonctions arithmétiques.

Théorème 2.1.11. *Soit $g \in \mathcal{A} \cup \mathcal{M}$ et désignons par $\circ$ l'opérateur de composition habituelle des fonctions. Alors*

$$(\overline{T} \circ \widetilde{T})(g) = (\widetilde{T} \circ \overline{T})(g),$$

c'est-à-dire $\overline{\widetilde{g}} = \widetilde{\overline{g}}$.

Démonstration. Nous allons prouver ce résultat dans le cas où $g \in \mathcal{M}$. Pour ce qui est du cas $g \in \mathcal{A}$, il se traite de manière semblable et utilise le fait que les opérateurs $\overline{T}$ et $\widetilde{T}$ sont linéaires.

Soit $g \in \mathcal{M}$. Alors $\overline{T}(g) = \overline{g} \in \mathcal{M}$ et $\widetilde{T}(g) = \widetilde{g} \in \mathcal{M}$ avec

$$\overline{T}(g)(p^\alpha) = \overline{g}(p^\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m),$$

$$\widetilde{T}(g)(p^\alpha) = \widetilde{g}(p^\alpha) = \frac{1}{2}(1 + g(p^\alpha)).$$

(1) D'une part,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{T} \circ \overline{T})(g)(n) &= \widetilde{T}[\overline{T}(g)](n) = \widetilde{T}(\overline{g})(n) \\
&= \prod_{p^\alpha || n} \frac{1}{2}(1 + \overline{g}(p^\alpha)) \\
&= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha || n} (1 + \frac{1}{\alpha+1}\sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)) \\
&= \frac{2^{-\omega(n)}}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha || n} (1 + \alpha + \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)).
\end{aligned}$$

(2) D'autre part,

$$\begin{aligned}
(\overline{T} \circ \widetilde{T})(g)(n) &= \overline{T}[\widetilde{T}(g)](n) = \overline{T}(\widetilde{g})(n) \\
&= \prod_{p^\alpha || n} (\frac{1}{\alpha+1}\sum_{m=0}^{\alpha} \widetilde{g}(p^m)) \\
&= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha || n} (\sum_{m=0}^{\alpha} \frac{1}{2}(1 + g(p^m))) \\
&= \frac{2^{-\omega(n)}}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha || n} (1 + \alpha + \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)).
\end{aligned}$$

En comparant (1) et (2), le résultat suit. □

Exemple

Soit $f(n) = 2^{\omega(n)}$. Alors $\overline{f}(n) = \frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}$, et c'est pourquoi

$$\begin{aligned}\widetilde{\overline{f}}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \frac{\tau(p^{2\alpha})}{\tau(p^\alpha)}) \\ &= \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\widetilde{f}(n) = (\frac{3}{2})^{\omega(n)}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{f}}(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \frac{3}{2}\alpha) \\ &= \frac{\tau(n^3\gamma(n))}{2^{\omega(n)}\tau(n)}.\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème précédent, $\overline{\widetilde{f}}(n) = \widetilde{\overline{f}}(n)$, ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{\tau(n^3\gamma(n))}{2^{\omega(n)}\tau(n)} = \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}).$$

Pour compléter cette section, énumérons quelques exemples de $\overline{f}$, $\widehat{f}$ *et* $\widetilde{f}$ pour les fonctions suivantes : τ (nombre de diviseurs), Ω (somme des exposants dans la factorisation en premiers d'un entier n), φ (fonction d'Euler), σ (somme des diviseurs), β (produit des exposants) et σ_k (somme des puissances k-ièmes des diviseurs).

Exemples

1) Fonction diviseur :

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(n) &= \frac{\tau(n\gamma(n))}{2^{\omega(n)}}, \\ \widetilde{\tau}(n) &= \frac{\tau(n\gamma(n))}{2^{\omega(n)}}, \\ \widehat{\tau}(n) &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(n)}.\end{aligned}$$

C'est pourquoi, $\overline{\tau}(n) = \widetilde{\tau}(n)$.

2) Somme des exposants :

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}(n) &= \frac{\Omega(n)}{2},\\
\widetilde{\Omega}(n) &= \frac{\Omega(n)}{2},\\
\widehat{\Omega}(n) &= \frac{\Omega(\gamma(n))}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, $\overline{\Omega}(n) = \widetilde{\Omega}(n)$.

3) Fonction d'Euler :

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(n) &= \frac{n}{\tau(n)},\\
\widetilde{\varphi}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}}\prod_{p^\alpha||n}(p^\alpha - p^{\alpha-1} + 1),\\
\widehat{\varphi}(n) &= \frac{\gamma(n)}{2^{\omega(n)}}.
\end{aligned}$$

4) Somme des diviseurs :

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(n) &= \frac{1}{\tau(n)}\prod_{p^\alpha||n}(1 + \sum_{i=1}^{\alpha}\frac{p^{i+1}-1}{p-1}),\\
\widetilde{\sigma}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}}\prod_{p^\alpha||n}(\frac{p^{\alpha+1}+p-2}{p-1}),\\
\widehat{\sigma}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}}\prod_{p^\alpha||n}(p+2).
\end{aligned}$$

5) Produit des exposants dans la factorisation :

$$\begin{aligned}
\overline{\beta}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}\tau(n)}\prod_{p^\alpha||n}(\alpha^2+\alpha+2),\\
\widetilde{\beta}(n) &= \frac{\tau(n)}{2^{\omega(n)}},\\
\widehat{\beta}(n) &= 1.
\end{aligned}$$

6) une généralisation de la fonction σ :

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma_k}(n) &= \frac{1}{\tau(n)}\prod_{p^\alpha\|n}(1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{p^{(i+1)k}-1}{p^k-1}),\\
\widetilde{\sigma_k}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}}\prod_{p^\alpha\|n}(\frac{p^{(\alpha+1)k}+p-2}{p-1}),\\
\widehat{\sigma_k}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}}\prod_{p^\alpha\|n}(1+\frac{p^{2k}-1}{p-1}).
\end{aligned}$$

2.2 Opérateurs inverses de $\overline{T}$, $\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$

Dans la section précédente, nous avons étudié les propriétés ainsi que les différentes formes que prennent les fonctions arithmétiques sous l'application des opérateurs $\overline{T}$, $\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$. Cette section sera consacrée à l'étude des opérateurs inverses de $\overline{T}$, $\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$ appliqués à diverses fonctions. D'abord, on considérera le cas de la fonction $\overline{f}$, ensuite, celui de $\widetilde{f}$ et nous terminerons avec le cas de $\widehat{f}$. Pour ce faire, nous utiliserons les fonctions génératrices introduites dans le chapitre précédent.

D'abord on considère le cas de la fonction $\overline{f}$. Étant donné une fonction g, on veut trouver la fonction f telle que $\overline{T}^{-1}(g) = f$, ce qui revient à chercher la fonction f telle que

$$\overline{f} = g. \tag{2.1}$$

À la lumière de la définition de $\overline{f}$, il est facile de voir que résoudre l'équation (2.1) revient à trouver la fonction f qui satisfait à

$$(g\tau)(n) = (1 * f)(n),$$

ce qui revient à écrire

$$f = \mu * g\tau.$$

Voici quelques exemples d'opérateurs inverses pour $g = \tau$, $g = \phi$, $g = \sigma$, $g = \beta$, $g = \gamma$. Comme chacune de ces fonctions est multiplicative, il est clair que pour connaître f, il suffit de trouver sa valeur sur les puissances de nombres premiers. Et c'est ce que nous faisons dans chacun des cinq exemples ci-dessous. Les deux premiers sont davantage détaillés.

Exemples

1) $g = \tau \Rightarrow f = \mu * \tau^2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})(1 + \frac{2^2}{p^s} + \frac{3^2}{p^{2s}} + ...) \\
&= \prod_p (1 + \frac{2^2 - 1}{p^s} + \frac{3^2 - 2^2}{p^{2s}} + ...) \\
&= \prod_p (1 + \frac{3}{p^s} + \frac{5}{p^s} + ...).
\end{aligned}$$

De sorte que la fonction multiplicative f est définie implicitement par

$$f(p^\alpha) = 2\alpha + 1 \ (\alpha = 0, 1, 2, ...)$$

pour tous les premiers p.

2) $g = \phi \Rightarrow f = \mu * \phi\tau$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})(1 + \frac{2(p-1)}{p^s} + \frac{3p(p-1)}{p^{2s}} + ...) \\
&= \prod_p (1 + \frac{2(p-1) - 1}{p^s} + \frac{3p(p-1) - 2(p-1)}{p^{2s}} + ...).
\end{aligned}$$

D'où

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2p - 3 & \text{si } \alpha = 1\ , \\ p^{\alpha-2}(p-1)(\alpha p + p - \alpha) & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

3) $g = \sigma \Rightarrow f = \mu * \sigma\tau$, on obtient alors

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ \dfrac{2p^2 - p + 3}{p - 1} & \text{si } \alpha = 1, \\ \dfrac{(\alpha + 1)p^{\alpha+1} - \alpha p^\alpha + 1}{p - 1} & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

4) $g = \beta \Rightarrow f = \mu * \beta\tau$, on a

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 2\alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

5) $g = \gamma \Rightarrow f = \mu * \gamma\tau$, on a

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2p-1 & \text{si } \alpha = 1, \\ p & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Considérons maintenant le cas de la fonction $\widetilde{f}$. Nous voulons donc cette fois résoudre l'équation :

$$\widetilde{f} = g.$$

Résoudre cette équation revient à trouver la fonction f qui satisfait à

$$(2^\omega g)(n) = (1 *_\mu f)(n),$$

ce qui revient à écrire

$$f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega g.$$

Notons que $*_\mu$ est la convolution unitaire. Voyons comment évaluer celle-ci.

Étant donné une fonction multiplicative f, nous aurons à évaluer

$$(1 *_\mu f)(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} 1(d) f(\frac{n}{d})$$

pour $n = p^\alpha$ avec α un entier positif, ce qui nous facilitera la tâche car f est multiplicative. On a

$$(1 *_\mu f)(p^\alpha) = \sum_{\substack{i=0 \\ (p^i,p^{\alpha-i})=1}}^{\alpha} 1(p^i) f(p^{\alpha-i}).$$

Or, puisque nous sommes en présence d'une convolution unitaire, la sommation est réduite aux cas $i = 0$ et $i = \alpha$, et c'est pourquoi nous obtenons finalement que

$$(1 *_\mu f)(p^\alpha) = f(p^\alpha) + f(1) = f(p^\alpha) + 1.$$

Voyons quelques exemples pour certaines fonctions multiplicatives. Encore une fois, il suffit d'évaluer f sur les puissances de nombres premiers.

Exemples

(A) $g = \tau \Rightarrow f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega \tau$,

$$\begin{aligned} f(p^\alpha) = ((-1)^\omega *_\mu 2^\omega \tau)(p^\alpha) &= \sum_{\substack{i=0 \\ (p^i, p^{\alpha-i})=1}}^{\alpha} (-1)^{\omega(p^i)} \cdot 2^{\omega(p^{\alpha-i})} \tau(p^{\alpha-i}) \\ &= 2\alpha + 1. \end{aligned}$$

de sorte que la fonction multiplicative f est définie implicitement par

$$f(p^\alpha) = 2\alpha + 1 \ (\alpha = 0, 1, 2, \ldots).$$

On a vu dans l'exemple 1) de la section précédente que $\overline{\tau} = \widetilde{\tau}$. Or, on voit facilement que $(\overline{T})^{-1}(\tau) = (\widetilde{T})^{-1}(\tau)$, où nous avons utilisé le fait que les opérateurs $\overline{T}$ et $\widetilde{T}$ sont bijectifs.

(B) $g = \phi \Rightarrow f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega \phi$,

$$\begin{aligned} f(p^\alpha) = ((-1)^\omega *_\mu 2^\omega \tau)(p^\alpha) &= \sum_{\substack{i=0 \\ (p^i, p^{\alpha-i})=1}}^{\alpha} (-1)^{\omega(p^i)} \cdot 2^{\omega(p^{\alpha-i})} \varphi(p^{\alpha-i}), \\ &= 2(p^\alpha - p^{\alpha-1}) - 1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2(p^\alpha - p^{\alpha-1}) - 1 & \text{si } \alpha \geq 1\,. \end{cases}$$

(C) $g = \sigma \Rightarrow f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega \sigma$, on a que

$$f(p^\alpha) = \frac{2(p^{\alpha+1} - 1) - p + 1}{p - 1}.$$

(D) $g = \beta \Rightarrow f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega \beta$, on obtient

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2\alpha - 1 & \text{si } \alpha \geq 1\ . \end{cases}$$

(E) $g = \gamma \Rightarrow f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega \gamma$, on a

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2p - 1 & \text{si } \alpha \geq 1\ . \end{cases}$$

(F) $g = \Omega \Rightarrow f = (-1)^\omega *_\mu 2^\omega \Omega$, on a

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ 2\alpha & \text{si } \alpha \geq 1\ . \end{cases}$$

En ce qui a trait au dernier cas, celui où $\widehat{f} = g$, soit qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\widehat{f} = g$ ou soit, au contraire, qu'il en existe plus d'une seule. On a vu dans le théorème 2.1.3 que les opérateurs $\overline{T}$ et $\widetilde{T}$ sont bijectifs. Ainsi, on a pu établir assez facilement leurs inverses à l'aide des fonctions génératrices. Or, l'opérateur $\widehat{T}$ n'est pas bijectif. En effet, cet opérateur n'est pas injectif. Posons

$$\begin{aligned} g_1(n) &= \frac{2^{\omega(n)}}{n}, \\ g_2(n) &= \frac{\tau(n)}{n}, \\ g_3(n) &= \frac{2^{\Omega(n)}}{n}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{g_1}(n) = \widehat{g_2}(n) = \widehat{g_3}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + \frac{2}{p}) \\ &= \frac{1}{\gamma(n) 2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + \sigma(p)) \\ &= \frac{\widehat{\sigma}(n)}{\gamma(n)}. \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{T}$ n'est pas injectif, cela nous indique que l'opérateur inverse de $\widehat{T}$ possède plus d'une solution. Donc, plusieurs fonctions ne possèdent pas d'inverse.

De plus, on peut facilement s'apercevoir que dans les deux premiers cas traités ($\overline{T}$ et $\widetilde{T}$), nous étions en présence de convolutions arithmétiques régulières, définies à la section 1.3, comparativement au dernier cas ($\widehat{T}$) qui n'en était pas une.

2.3 Autres opérateurs de moyennes sur certains ensembles de diviseurs

Les deux premières sections traitaient des opérateurs $\overline{T}$,$\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$ étudiés par De Koninck et Grah [4]. Dans cette section, nous introduisons deux nouveaux opérateurs de moyennes. Ensuite, nous examinons l'allure que prennent certaines fonctions arithmétiques (additives et multiplicatives) sous l'application de ceux-ci. Pour finir, nous vérifions si les opérateurs préservent la multiplicativité et l'additivité et nous nous attarderons, quelque peu, à l'étude de leurs inverses.

D'abord, on définit deux nouveaux opérateurs de moyenne, soit les opérateurs $H_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ et $H_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ définis par

$$\begin{aligned} H_1(f)(n) &= \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} f(p), \\ H_2(f)(n) &= \frac{1}{\Omega(n)} \sum_{p^\alpha || n} f(p^\alpha). \end{aligned}$$

Examinons, dans un premier temps, l'allure que prennent quelques fonctions arithmétiques sous l'application de ces deux nouveaux opérateurs.

Exemples

(A) $f = \tau$:

$$\begin{aligned} H_1(\tau)(n) &= \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} \tau(p) \\ &= \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\cdot\omega(n)}{\omega(n)} = 2. \\
H_2(\tau)(n) &= \frac{1}{\Omega(n)}\sum_{p^\alpha\|n}\tau(p^\alpha) \\
&= \frac{1}{\Omega(n)}\sum_{p^\alpha\|n}(\alpha+1) \\
&= \frac{\Omega(n)+\omega(n)}{\Omega(n)}.
\end{aligned}$$

(B) $f=\beta$:

$$\begin{aligned}
H_1(\beta)(n) &= \frac{1}{\omega(n)}\sum_{p|n}\beta(p) \\
&= \frac{1}{\omega(n)}\sum_{p|n}1 \\
&= \frac{\omega(n)}{\omega(n)} = 1. \\
H_2(\beta)(n) &= \frac{1}{\Omega(n)}\sum_{p^\alpha\|n}\beta(p^\alpha) \\
&= \frac{1}{\Omega(n)}\sum_{p^\alpha\|n}\alpha \\
&= \frac{\Omega(n)}{\Omega(n)} = 1.
\end{aligned}$$

(C) $f=\phi$:

$$\begin{aligned}
H_1(\phi)(n) &= \frac{\sum_{p|n}p-\omega(n)}{\omega(n)}. \\
H_2(\phi)(n) &= \frac{1}{\Omega(n)}\sum_{p^\alpha\|n}(p^\alpha-p^{\alpha-1}).
\end{aligned}$$

(D) $f=\gamma$:

$$\begin{aligned}
H_1(\gamma)(n) &= \frac{\sum_{p|n}p}{\omega(n)}. \\
H_2(\gamma)(n) &= \frac{\sum_{p|n}p}{\Omega(n)}.
\end{aligned}$$

(E) $f = \sigma$:

$$\begin{aligned} H_1(\sigma)(n) &= \frac{\sum_{p|n} p + \omega(n)}{\omega(n)}. \\ H_2(\sigma)(n) &= \frac{1}{\Omega(n)} \sum_{p^\alpha \| n} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}. \end{aligned}$$

(F) $f = \omega$:

$$\begin{aligned} H_1(\omega)(n) &= 1. \\ H_2(\omega)(n) &= \frac{\omega(n)}{\Omega(n)}. \end{aligned}$$

(G) $f = \Omega$:

$$\begin{aligned} H_1(\Omega)(n) &= 1. \\ H_2(\Omega)(n) &= 1. \end{aligned}$$

Caractérisons les opérateurs H_1 et H_2 en fonction du fait qu'ils préservent ou non la multiplicativité et l'additivité. En fait, nous verrons qu'ils ne peuvent préserver l'additivité alors qu'ils préservent la multiplicativité dans certains cas marginaux.

Théorème 2.3.1. *Soit f une fonction multiplicative ou additive telle que $f(p) = 1$ pour tout p premier, alors $H_1(f)$ est multiplicative.*

Démonstration. Soient m et n deux entiers tels que $(m, n) = 1$. On a que

$$H_1(f)(n) = \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} f(p).$$

Puisque $f(p) = 1$ pour tout p premier, on obtient

$$\begin{aligned} H_1(f)(n) &= \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} 1, \\ &= \frac{1}{\omega(n)} \omega(n), \\ &= 1. \end{aligned}$$

Comme $H_1(f)(n) = 1$ quel que soit n, il est clair que $H_1(f)$ est une fonction multiplicative. $\square$

Il est évident que les fonctions β, Ω et ω satisfont aux hypothèses du théorème 2.3.1.

Voyons maintenant un théorème qui caractérise la multiplicativité de l'opérateur $H_2(f)$. Il est intéressant de remarquer que dans le cas des deux opérateurs, la fonction f peut être additive ou multiplicative et que cela n'affecte en rien la conclusion des théorèmes 2.3.1 ni de celui qui suit.

Théorème 2.3.2. *Soit f une fonction multiplicative ou additive telle que $f(p^\alpha) = \alpha$ pour tout p premier et α entier positif, alors $H_2(f)$ est multiplicative.*

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} H_2(f)(n) &= \frac{1}{\Omega(n)} \sum_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha) \\ &= \frac{1}{\Omega(n)} \sum_{p^\alpha \| n} \alpha \\ &= \frac{1}{\Omega(n)} \Omega(n) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $H_2(f)(n) \equiv 1$ et c'est pourquoi $H_2(f)$ est trivialement multiplicative. □

On peut prendre comme exemples de ce théorème les cas $f = \beta$ *et* Ω.

Énonçons le dernier théorème de cette section, lequel caractérise le caractère additif des opérateurs H_1 et H_2. Nous ne démontrerons le théorème que pour H_1 puisque la preuve pour H_2 est semblable.

Théorème 2.3.3. *Soit f une fonction additive. Alors les fonctions $H_1(f)$ et $H_2(f)$ ne peuvent être additives.*

Démonstration. Soit f une fonction additive et supposons que $H_1(f)$ est additive. Nous allons montrer que cela est impossible. En effet, si tel était le cas, alors on aurait, pour $(m, n) = 1$,

$$H_1(f)(mn) = H_1(f)(m) + H_1(f)(n). \tag{2.2}$$

Explicitement, ceci veut dire que

$$\frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|mn} f(p) = \frac{1}{\omega(m)} \sum_{p|m} f(p) + \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} f(p). \tag{2.3}$$

Comme $(m, n) = 1$ et comme f est additive, on aurait

$$\sum_{p|mn} f(p) = \sum_{p|m} f(p) + \sum_{p|n} f(p). \tag{2.4}$$

En combinant (2.3) et (2.4), on obtient

$$\frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|m} f(p) + \frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|n} f(p) = \frac{1}{\omega(m)} \sum_{p|m} f(p) + \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} f(p). \tag{2.5}$$

Mais comme

$$\frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|m} f(p) < \frac{1}{\omega(m)} \sum_{p|m} f(p) \tag{2.6}$$

et

$$\frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|n} f(p) < \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} f(p), \tag{2.7}$$

il suit de (2.5), (2.6) et (2.7) que

$$\frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|mn} f(p) = \frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|m} f(p) + \frac{1}{\omega(mn)} \sum_{p|n} f(p) < \frac{1}{\omega(m)} \sum_{p|m} f(p) + \frac{1}{\omega(n)} \sum_{p|n} f(p),$$

ce qui voudrait dire que

$$H_1(f)(mn) < H_1(f)(m) + H_1(f)(n),$$

contredisant ainsi la relation (2.2), i.e. le fait que $H_1(f)$ est additive. □

En ce qui concerne les inverses de H_1 et de H_2, nous nous rendons compte très facilement que les deux opérateurs ne sont pas injectifs. En effet, on a, par exemple, que $H_1(\beta)(n) = H_1(\omega)(n) = H_1(\Omega)(n) = 1$ et que $H_2(\beta)(n) = H_2(\Omega)(n) = 1$. Ainsi, les inverses de ces deux opérateurs n'existent pas. Encore une fois, on remarque, dans les deux cas, que nous ne sommes pas en présence de convolutions arithmétiques régulières.

Chapitre 3

Valeurs moyennes des fonctions $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$

Dans ce chapitre, nous porterons notre attention sur l'étude des valeurs moyennes des fonctions $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$ et améliorerons le terme d'erreur $O(\frac{1}{\log x})$ obtenu par De Koninck et Grah [4] en un terme $O(\frac{1}{\log^{m+1} x})$ avec un entier positif m arbitraire.

résultats obtenus par De

3.1 Terme d'erreur pour les valeurs moyennes de $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$

D'abord, définissons ce qu'est la valeur moyenne d'une fonction additive f.

Définition 3.1.1. Étant donné une fonction arithmétique $f(n)$, n un entier, s'il est possible de trouver une fonction $\varphi(n)$ croissante telle que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq\, x} f(n) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq\, x} \varphi(n),$$

on dit alors que la *valeur moyenne* de $f(n)$ est $\varphi(n)$.

Par exemple, il est facile de montrer que la valeur moyenne de la fonction $\omega(n)$

définie au chapitre 1 est :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\omega(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{p|n}1=\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right]=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

où $C:=\gamma+\sum_p\left(\log(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{p}\right)$ et γ est la constante d'Euler.

Continuons avec quelques autres définitions.

Définition 3.1.2. On dit qu'une fonction mesurable $R:[2,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ est une fonction à *variation régulière* s'il existe un nombre réel $\rho\geq 0$ tel que pour chaque $a>0$, on a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(ax)}{R(x)}=a^\rho.$$

Si $\rho=0$, on dit que R est à *oscillation lente.*

Il est important de noter que nous n'étudierons que les fonctions continument dérivables à variation régulière.

Définition 3.1.3. On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions continument dérivables à oscillation lente.

On peut montrer (voir le livre de Seneta [5] , p. 2) que toute fonction à variation régulière R peut s'écrire sous la forme $R(x)=x^\rho L(x)$, où $\rho\in\mathbb{R}$ et $L\in\mathcal{L}$.

Définition 3.1.4. On dit qu'une fonction arithmétique f possède une *valeur moyenne régulière* si la fonction φ de la définition 3.1.1 est une fonction régulière. On la note $VM(f)$. De plus, elle est unique.

Nous pouvons maintenant entreprendre l'étude des valeurs moyennes des fonctions $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$. Auparavant, voyons quelques théorèmes sur les valeurs moyennes régulières.

Théorème 3.1.5. *Soit $f\in\mathcal{FA}$. Alors :*

(i) la fonction f possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction $\widehat{f}$ en possède une ;

(ii) la fonction f possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction $\widetilde{f}$ en possède une.

De plus, si l'une ou l'autre de ces valeurs moyennes existe et est régulière, on a

$$VM(f)=2VM(\widehat{f}\,)=2VM(\widetilde{f}\,). \tag{3.1}$$

Démonstration. Les parties (i) et(ii) ainsi que les égalités (3.1) découlent immédiatement du fait que $\widehat{f} = \widetilde{f} = \frac{1}{2}f$ pour toute fonction $f \in \mathcal{FA}$. □

Nous ne ferons pas la démonstration du prochain théorème ; on peut cependant la retrouver dans l'article de De Koninck et Grah [4].

Théorème 3.1.6. *Soit $f \in \mathcal{FA}$ telle que $f(p) = R(p)$ pour chaque nombre premier p, où R est une fonction continument dérivable à variation régulière non décroissante qui possède la représentation $R(x) = x^\rho L(x)$, avec $\rho \geq 0$ et $L \in \mathcal{L}$. Alors la valeur moyenne régulière de la fonction f existe si et seulement si celle de la fonction $\overline{f}$ existe, auquel cas*

$$VM(f) = 2VM(\overline{f}\ ). \tag{3.2}$$

R.L. Duncan a montré (voir [6]) que la moyenne de la fonction $\omega(n)$ sur les diviseurs de n est égale à $\frac{1}{2}\log\log n$. De façon plus précise, Duncan a démontré qu'il existe une constante c telle que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left(\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n}\omega(d)\right) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\overline{\omega}(n) = \frac{1}{2}\log\log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

À cette fin, Duncan a utilisé la relation asymptotique

$$\sum_{n\leq x}\omega(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{p|n} 1 = \sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right] = x\log\log x + Cx + O\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{3.3}$$

où $C := \gamma + \sum_p \left(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\right)$ et γ est la constante d'Euler.

Étant donné $f \in \mathcal{F}$, il est normal d'examiner le comportement de la suite $\overline{f}$, $\overline{\overline{f}}$, $\overline{\overline{\overline{f}}}$,... Ainsi, pour un entier non négatif s fixé, on considère l'itération $\overline{T}_s$ définie par

$$\overline{T}_s(f) = \overline{T}(\overline{T}_{s-1}(f)) = ... = \overline{T}_{s-1}(\overline{T}_1(f)) = \overline{T}_{s-1}(\overline{f})$$

où $\overline{T}_1 = \overline{T}$, $\overline{T}_0(f) = f$, et où

$$(\overline{T}_s(f))(n) = \frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n}(\overline{T}_{s-1}(f))(d), n \geq 1.$$

On désigne par $\overline{f}_s$ l'image de f par $\overline{T}_s$ ainsi que par $\widehat{f}_s$ et $\widetilde{f}_s$ les images de f par $\widehat{T}_s$ et $\widetilde{T}_s$ respectivement. Ceci ayant pour but de simplifier la notation. Compte tenu des propriétés de $\overline{T}$, $\widehat{T}$ et $\widetilde{T}$, nous obtenons par induction sur s le théorème suivant.

Théorème 3.1.7. *Soit s et n deux entiers non négatifs et f une fonction arithmétique. Alors $\overline{T}_s$, $\widehat{T}_s$ et $\widetilde{T}_s$ préservent l'additivité et la multiplicativité. En particulier, si $f \in \mathcal{A}$ alors $\widetilde{f}_s(n) = f(n)/2^s$ et $\widehat{f}_s(n) = f(\gamma(n))/2^s$. Lorsque $f \in C\mathcal{A}$, $\overline{f}_s(n) = \widetilde{f}_s(n) = f(n)/2^s$. Enfin si $f \in \mathcal{FA}$, $\widehat{f}_s(n) = \widetilde{f}_s(n) = f(n)/2^s = f(\gamma(n))/2^s$.*

Avant de généraliliser le résultat de Duncan, nous avons besoin d'un lemme qui s'avère facile à démontrer.

Lemme 3.1.8. *Soit $f \in \mathcal{A}$. Supposons que f est constante sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers et qu'elle satisfait à $f(p^r) - f(p^{r-1}) = O(1)$ uniformément pour p premier et $r \geq 2$. Alors les expressions $\overline{f}_s(p^r) - \overline{f}_s(p^{r-1})$, $\widetilde{f}_s(p^r) - \widetilde{f}_s(p^{r-1})$ et $\widehat{f}_s(p^r) - \widehat{f}_s(p^{r-1})$ sont également bornées uniformément pour p premier et $r \geq 2$. De plus, les fonctions $\overline{f}_s$, $\widetilde{f}_s$ et $\widehat{f}_s$ sont constantes sur $\mathcal{P}$.*

À chaque fonction g constante sur $\mathcal{P}$, on associe les constantes suivantes

$$c_g := g(2) \quad \text{et} \quad D_g := c_g C + \sum_{n\leq x}\sum_{p} \frac{g(p^r) - g(p^{r-1})}{p^r},$$

où C est la constante de la relation (3.3) et γ est la constante d'Euler.

Voici maintenant le théorème que nous améliorerons dans la section suivante.

Théorème 3.1.9. *Soit f une fonction additive satisfaisant les hypothèses du lemme* 3.1.8. *Alors*

$$\begin{aligned} x^{-1}\sum_{n\leq x} \overline{f}_s(n) &= \frac{c_f}{2^s}\log\log x + D_{\overline{f}_s} + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \\ x^{-1}\sum_{n\leq x} \widehat{f}_s(n) &= \frac{c_f}{2^s}\log\log x + \frac{c_f}{2^s}C + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \\ x^{-1}\sum_{n\leq x} \widetilde{f}_s(n) &= \frac{c_f}{2^s}\log\log x + \frac{D_f}{2^s} + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Si $g \in \mathcal{A}$ et est constante sur $\mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} x^{-1}\sum_{n\leq x} g(n) &= x^{-1}\sum_{n\leq x}\sum_{p^r\| n} g(p^r) = x^{-1}\sum_{n\leq x}\sum_{\substack{p^r | n \\ r\geq 1}} \left(g(p^r) - g(p^{r-1})\right) \\ &= x^{-1}c_g\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right] + x^{-1}\sum_{\substack{p^r\leq x \\ r\geq 2}} \left(g(p^r) - g(p^{r-1})\right)\left[\frac{x}{p^r}\right]. \end{aligned}$$

Alors la relation (3.3) et le lemme 3.1.8 permettent d'obtenir les égalités du théorème si on prend soin de remplacer successivement g par $\overline{f}_s$, $\widetilde{f}_s$ et $\widehat{f}_s$. □

On remarque que le terme d'erreur pour les valeurs moyennes de $\overline{f}_s$, $\widetilde{f}_s$ et $\widehat{f}_s$ obtenus par De Koninck et Grah est $O(\frac{1}{\log x})$. Nous verrons, dans la prochaine section, que celui-ci peut être grandement amélioré.

3.2 Amélioration du terme d'erreur

Dans cette section, nous allons démontrer que le terme d'erreur $O(\frac{1}{\log x})$ apparaissant dans les égalités du théorème 3.1.9 peut être diminué en un terme $O(\frac{1}{\log^{m+1} x})$ pour un entier positif m arbitraire.

Il est important de noter que les prochains lemmes, corollaires et théorèmes proviennent de Mercier [7].

Lemme 3.2.1. *Soit k, j des entiers non-négatifs et soit a un nombre réel tel que $a > k - 1$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^j t}{t^{a+2}} dt &= \frac{j!}{(a-k+1)^{j+1}} + (-1)^{j+1} \sum_{m=1}^{k} ((-1)^m \tbinom{k}{m}) \\ &\times \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i i! \binom{j}{i}}{(a+m-k+1)^{i+1}} \sum_{l=1}^{m} (-1)^l \tbinom{m}{l} \zeta^{(j-i)}(a+l-k+1)),\end{aligned}$$

où $\zeta^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction zêta, et une somme vide est interprétée comme étant égale à zéro.

Démonstration. Puisque

$$\int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^j t}{t^{a+2}} dt = \int_1^\infty \frac{(t-[t])^k}{t^{a+2}} \log^j t \, dt,$$

alors pour obtenir le résultat, il suffit d'évaluer l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{[t]^i \log^j t}{t^{a+2}} dt, \qquad 0 \le i \le k.$$

Pour $i = 0$, on a

$$\int_1^\infty \frac{\log^j t}{t^{a+2}} dt = \frac{j!}{(a+1)^{j+1}},$$

et pour $1 \leq i \leq k$, on a

$$\int_1^\infty \frac{[t]^i \log^j t}{t^{a+2}} dt = \sum_{n=1}^\infty n^i \int_n^{n+1} \frac{\log^j t}{t^{a+2}} dt.$$

En utilisant l'intégration par parties nous obtenons

$$\int_n^{n+1} \frac{\log^j t}{t^{a+2}} dt = \sum_{r=0}^j \frac{r! \binom{j}{r}}{(a+1)^{r+1}} \left(\frac{\log^{j-r}(n+1)}{(n+1)^{a+1}} - \frac{\log^{j-r} n}{n^{a+1}} \right),$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^\infty n^i \int_n^{n+1} \frac{\log^j t}{t^{a+2}} dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N \left(-n^i \sum_{r=0}^j \frac{r! \binom{j}{r}}{(a+1)^{r+1}} \left(\frac{\log^{j-r}(n+1)}{(n+1)^{a+1}} - \frac{\log^{j-r} n}{n^{a+1}} \right) \right).$$

Le développement de $n^i = ((n+1)-1)^i$ nous permet finalement d'obtenir pour $a > i-1, i \geq 1$,

$$\int_1^\infty \frac{[t]^i \log^j t}{t^{a+2}} dt = (-1)^{j+1} \sum_{r=0}^j \left(\frac{(-1)^r r! \binom{j}{r}}{(a+1)^{r+1}} \sum_{l=1}^i (-1)^l \binom{i}{l} \zeta^{(j-r)}(a+1-i+l) \right).$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Corollaire 3.2.2. Pour tout entier non-négatif j, on a

$$\int_1^\infty \frac{\{t\} \log^j t}{t^2} dt = j! \left(1 + \sum_{i=0}^j (-1)^{i+1} \gamma_i \right),$$

où

$$\gamma_i = \frac{(-1)^i}{i!} \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\log^i n}{n} - \frac{\log^{i+1} N}{i+1} \right).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a pour $a > 0$,

$$\int_1^\infty \frac{\{t\} \log^j t}{t^{a+2}} dt = \frac{j!}{a^{j+1}} + (-1)^{j+1} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i i! \binom{j}{i}}{(a+1)^{i+1}} \zeta^{(j-i)}(a+1). \tag{3.4}$$

Or pour a dans un voisinage de 0, on a d'après un résultat de Ferguson [8]

$$\zeta(a+1) = \frac{1}{a} + \sum_{k=0}^\infty \gamma_k a^k,$$

où

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\log^k n}{n} - \frac{\log^{k+1} N}{k+1} \right)$$

et ainsi on obtient

$$\zeta^{(j)}(a+1) = \frac{(-1)^j j!}{a^{j+1}} + j!\gamma_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} k(k-1)...(k-j+1)\gamma_k a^{k-j}. \tag{3.5}$$

En remplaçant (3.5) dans (3.4), on obtient le résultat. □

Nous avons également besoin du résultat suivant.

Théorème 3.2.3. *Soit a un nombre réel avec $a > -1$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{p\leq x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = x^{a+1} \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\log^i x} + O\left(\frac{x^{a+1}}{\log^{m+1} x}\right),$$

où les constantes c_i sont définies par

$$c_i = \int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k \log^{i-1} t}{t^{a+2}} dt \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Démonstration. Pour $a > -1$ et $k > 0$, on a

$$\sum_{p\leq x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \int_{2^-}^{x^+} y^a \left\{\frac{x}{y}\right\}^k d\pi(y).$$

En utilisant l'intégrale de Stieltjes, on peut donc écrire

$$\sum_{p\leq x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \int_2^x \frac{y^a \{\frac{x}{y}\}^k}{\log y} dy + \int_{2^-}^{x^+} y^a \left\{\frac{x}{y}\right\}^k d(\pi(y) - Li(y)). \tag{3.6}$$

Or d'après le théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) - Li(x) = O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right),$$

pour chaque entier positif m, d'où l'on obtient

$$\int_{2^-}^{x^+} y^a \left\{\frac{x}{y}\right\}^k d(\pi(y) - Li(y)) \ll \int_{2^-}^{x^+} y^a d(\pi(y) - Li(y)) \ll \frac{x^{a+1}}{\log^{m+1} x}.$$

Maintenant l'équation (3.6) devient

$$\sum_{p\leq x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \int_2^x \frac{y^a \{\frac{x}{y}\}^k}{\log y} dy + O\left(\frac{x^{a+1}}{\log^{m+1} x}\right). \tag{3.7}$$

Puisque

$$\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}} \left(\frac{\log^m t}{\log^m x} + \frac{\log^{m+1} t}{\log^{m+1} x} + \ldots\right) dt = O\left(\frac{1}{\log^m x}\right),$$

on a d'une part

$$\int_2^x \frac{y^a\{\frac{x}{y}\}^k}{\log y}dy = \frac{x^{a+1}}{\log x}\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}dt + \frac{x^{a+1}}{\log^2 x}\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\log t\, dt + \ldots + \frac{x^{a+1}}{\log^m x}\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\log^{m-1} t\, dt + O\left(\frac{x^{a+1}}{\log^{m+1} x}\right),$$

et d'autre part pour $1 \leq i \leq m$ et pour x assez grand,

$$\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\log^{i-1} t\, dt = O(x^{-a-1+\epsilon}), \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

C'est pourquoi pour $a > -1$, on peut écrire

$$\int_2^x \frac{y^a\{\frac{x}{y}\}^k}{\log y}dy = \frac{x^{a+1}}{\log x}\int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}dt + \frac{x^{a+1}}{\log^2 x}\int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\log t\, dt + \ldots + \frac{x^{a+1}}{\log^m x}\int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\log^{m-1} t\, dt + O\left(\frac{x^{a+1}}{\log^{m+1} x}\right), \tag{3.8}$$

et en remplaçant (3.8) dans (3.7), le résultat suit. □

Une conséquence immédiate de ce résultat est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.4. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p \leq x} \left\{\frac{x}{p}\right\} = x\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\log^i x} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right),$$

où

$$d_i = \int_1^{\infty} \frac{\{t\}\log^{i-1} t}{t^2}dt.$$

Nous allons maintenant énoncer le théorème clé qui va nous permettre d'améliorer le terme d'erreur des relations du théorème 3.1.9. Ce théorème, obtenu par Mercier [7], est en réalité une généralisation d'un théorème de Segal [9].

Théorème 3.2.5. *Soit m un entier positif arbitraire et soit a un nombre réel plus grand que 1. Soit f une fonction additive telle que $\eta(f)$ est une constante pour chaque p et telle que, pour chaque $k \geq 2$, $f(p^k) = O(2^{k/a})$ uniformément en p. Alors on a*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \eta(f)x\log\log x + Ax - x\eta(f)\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\log^i x} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right),$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \eta(f)\left(\gamma + \sum_p \left(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\right)\right) + \sum_{k\geq 2}\sum_p \frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k}, \\
d_i &= (i-1)!(1+\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j+1}\gamma_j), \\
\gamma_j &= \frac{(-1)^j}{j!}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\log^j n}{n} - \frac{\log^{j+1} N}{j+1}\right),
\end{aligned}$$

et $\gamma = \gamma_0$ désigne la constante d'Euler.

Démonstration. Puisque

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 1}} \left(f(p^k) - f(p^{k-1})\right)\left[\frac{x}{p^k}\right],$$

alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} f(n) &= \sum_{p\leq x}\eta(f)\left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \left(f(p^k) - f(p^{k-1})\right)\left[\frac{x}{p^k}\right], \\
&= x\sum_{p\leq x}\frac{\eta(f)}{p} - \sum_{p\leq x}\eta(f)\left\{\frac{x}{p}\right\} + x\sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}}\frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k} \\
&\quad - \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \left(f(p^k) - f(p^{k-1})\right)\left\{\frac{x}{p^k}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Il faut maintenant trouver l'ordre de grandeur des deux sommes à l'extrême droite de (3.9). Puisque

$$\sum_{p\geq y}\frac{1}{p^k} \leq \frac{2}{y^{k-1}} \text{ pour } k\geq 2,$$

alors

$$\sum_{k\geq 2}\sum_{p^k>x}\frac{2^{k/a}}{p^k} \ll \frac{1}{x}\sum_{2\leq k\leq\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k} + \sum_{k>\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^k}. \tag{3.10}$$

Or d'une part, on a pour le second membre de droite de (3.10)

$$\sum_{k>\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^k} \ll \sum_{k>\frac{\log x}{\log 2}}\frac{2^{k/a}}{2^k} \ll x^{\frac{1}{a}-1} \ll \frac{1}{\log^{m+1} x} \tag{3.11}$$

et d'autre part, pour le premier membre de droite de (3.10)

$$\sum_{2\leq k\leq \frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k} = \sum_{2\leq k\leq \frac{a}{a-1}} 2^{k/a}x^{1/k} + \sum_{\frac{a}{a-1}<k\leq \frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k} \ll x^{\frac{1}{2}} + \frac{\log x}{\log 2}2^{\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{1}{a}}x^{\frac{a-1}{a}-\epsilon}$$

pour un certain $\epsilon > 0$. Puisque

$$\frac{\log x}{\log 2}2^{\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{1}{a}}x^{\frac{a-1}{a}-\epsilon} \ll \frac{x}{\log^{m+1}x},$$

alors

$$\sum_{2\leq k\leq \frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k} \ll \frac{x}{\log^{m+1}x}. \tag{3.12}$$

C'est pourquoi, on obtient en remplaçant (3.11) et (3.12) dans (3.10) que

$$\sum_{\substack{p^k>x\\ k\geq 2}} \frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k} \ll \sum_{k\geq 2}\sum_{p^k>x}\frac{2^{k/a}}{p^k} \ll \frac{1}{\log^{m+1}x}, \tag{3.13}$$

ce qui entraîne que

$$\sum_{p^k,\ k\geq 2} \frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k}$$

converge. De plus, nous avons également

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq k\leq \frac{\log x}{\log 2}}\sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a} &= \sum_{2\leq k\leq \frac{a}{a-1}}\sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a} + \sum_{\frac{a}{a-1}<k\leq \frac{\log x}{\log 2}}\sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a}\\ &\ll \pi(x^{\frac{1}{2}}) + \pi(x^{\frac{a-1}{a}-\epsilon})\frac{\log x}{\log 2}2^{\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{1}{a}}\\ &\ll \frac{x}{\log^{m+1}x},\end{aligned} \tag{3.14}$$

ce qui nous donne pour le quatrième membre de droite de (3.9)

$$\sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \left(f(p^k)-f(p^{k-1})\right)\left\{\frac{x}{p^k}\right\} \ll \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \mid f(p^k)\mid \ll \sum_{2\leq k\leq \frac{\log x}{\log 2}}\sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a} \ll \frac{x}{\log^{m+1}x}. \tag{3.15}$$

Finalement on obtient de (3.13), (3.14) et (3.15) que

$$\sum_{n\leq x} f(n) = x\eta_f\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} - \eta_f\sum_{p\leq x}\left\{\frac{x}{p}\right\} + x\sum_{\substack{p^k\\ k\geq 2}}\frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1}x}\right).$$

En utilisant le corollaire 3.2.2, le corollaire 3.2.4 ainsi que le comportement asymptotique de (voir [10])

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+\gamma+\sum_{p}\left(\log(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{p}\right)+O\left(\frac{1}{\log^{m+1}x}\right)\ \textit{pour tout } m>0,$$

nous obtenons le résultat. □

Voyons maintenant un corollaire de ce théorème qui s'avère crucial pour améliorer le terme d'erreur des relations de 3.1.9.

Corollaire 3.2.6. Soit $\omega(n)$ la fonction arithmétique définie au chapitre 1. On a alors

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=x\log\log x+x\left(\gamma+\sum_{p}\left(\log(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{p}\right)\right)-x\sum_{i=1}^{m}\frac{d_i}{\log^i x}+O\left(\frac{x}{\log^{m+1}x}\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 3.2.5. □

Afin d'effectuer la démonstration du prochain théorème, nous avons besoin du lemme qui suit.

Lemme 3.2.7. *Soit $f\in\mathcal{A}$ et a un nombre réel plus grand que 1. Supposons que f est constante sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers et est telle que, pour chaque $r\geq 2$, $f(p^r)-f(p^{r-1})=O(2^{\frac{r}{a}})$ uniformément pour p premier et $r\geq 2$. Alors les expressions $\overline{f}_s(p^r)-\overline{f}_s(p^{r-1})$, $\widetilde{f}_s(p^r)-\widetilde{f}_s(p^{r-1})$ et $\widehat{f}_s(p^r)-\widehat{f}_s(p^{r-1})$ sont également bornées uniformément pour p premier et $r\geq 2$. De plus, les fonctions $\overline{f}_s$, $\widetilde{f}_s$ et $\widehat{f}_s$ sont constantes sur $\mathcal{P}$.*

Notons qu'à chaque fonction g constante sur $\mathcal{P}$, on associe les constantes suivantes

$$c_g:=g(2)\quad\text{et}\quad D_g:=c_gC+\sum_{n\leq x}\sum_{p}\frac{g(p^r)-g(p^{r-1})}{p^r},$$

où

$$C:=\gamma+\sum_{p}\left(\log(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{p}\right)$$

et γ est la constante d'Euler.

Théorème 3.2.8 (Théorème d'amélioration). *Soit f une fonction additive satisfaisant les hypothèses du lemme 3.2.7 et m un entier positif arbitraire. Alors*

$$\begin{aligned}
x^{-1}\sum_{n\le x}\overline{f}_s(n) &= \frac{c_f}{2^s}\log\log x + D_{\overline{f}_s} + \frac{c_f}{2^s}\sum_{i=1}^{m}\frac{d_i}{\log^i x} + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x}\right),\\
x^{-1}\sum_{n\le x}\widehat{f}_s(n) &= \frac{c_f}{2^s}\log\log x + \frac{c_f}{2^s}C + \frac{c_f}{2^s}\sum_{i=1}^{m}\frac{d_i}{\log^i x} + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x}\right),\\
x^{-1}\sum_{n\le x}\widetilde{f}_s(n) &= \frac{c_f}{2^s}\log\log x + \frac{D_f}{2^s} + \frac{c_f}{2^s}\sum_{i=1}^{m}\frac{d_i}{\log^i x} + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x}\right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
d_i &= (i-1)!\left(1+\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j+1}\gamma_j\right),\\
\gamma_j &= \frac{(-1)^j}{j!}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\log^j n}{n} - \frac{\log^{j+1} N}{j+1}\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. Si $g\in\mathcal{A}$ et est constante sur $\mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned}
x^{-1}\sum_{n\le x} g(n) &= x^{-1}c_g\sum_{p\le x}\left[\frac{x}{p}\right] + x^{-1}\sum_{\substack{p^k\le x\\ r\ge 2}}\left(g(p^r)-g(p^{r-1})\right)\left[\frac{x}{p^r}\right],\\
&= c_g\sum_{p\le x}\frac{1}{p} - x^{-1}c_g\sum_{p\le x}\left\{\frac{x}{p}\right\} + \sum_{\substack{p^r\le x\\ r\ge 2}}\frac{g(p^r)-g(p^{r-1})}{p^r}\\
&\quad - x^{-1}\sum_{\substack{p^r\le x\\ r\ge 2}}\left(g(p^r)-g(p^{r-1})\right)\left\{\frac{x}{p^r}\right\}.
\end{aligned}$$

Alors le corollaire 3.2.6 et le lemme 3.2.7 permettent d'obtenir les égalités du théorème si nous prenons soin de remplacer successivement g par $\overline{f}_s$, $\widetilde{f}_s$ et $\widehat{f}_s$. □

Il est important de noter que nous aurions pu obtenir comme terme d'erreur $O(\frac{1}{\log^2 x})$ en utilisant un résultat de Rosser et Schoenfeld [11]. Ceux-ci avaient établi que

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + C + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Chapitre 4

Propriétés de certaines convolutions

Il est possible de caractériser les fonctions multiplicatives en se basant sur les convolutions impliquant la fonction noyau γ, définie au chapitre 1, comme fonction K dans les K-convolutions. En effet, Shonhiwa [12] étudie le cas pour la fonction noyau. Mais qu'en est-il pour d'autres fonctions apparaissant dans certaines convolutions ?

La première section portera donc sur les propriétés que nous fournit la fonction noyau. La section suivante traitera des convolutions impliquant d'autres fonctions arithmétiques comme restriction.

4.1 La fonction noyau

L'étude des convolutions incluant certaines conditions nous permet de caractériser les fonctions multiplicatives versus celles complètement multiplicatives en nous fournissant quelques identités et propriétés très simples. Entre autres, l'article de Shonhiwa traite des deux convolutions suivantes :

Définition 4.1.1. Soit f et g deux fonctions arithmétiques. On pose

$$(f \circ g)(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(\frac{n}{d})}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Définition 4.1.2. Soit f et g deux fonctions arithmétiques. On pose

$$(f \times g)(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ainsi, ces deux convolutions sont très intéressantes puisqu'elles préservent la multiplicativité. Voici d'ailleurs deux résultats bien connus de McCarthy [2] .

Lemme 4.1.3. *Soient $f, g \in \mathcal{M}$. Alors*
1) $f \circ g \in \mathcal{M}$,
2) $f \times g \in \mathcal{M}$.

Démonstration. Nous ne démontrerons le lemme que pour le premier cas puisque le second se traite de manière analogue. D'abord, remarquons que le produit $(f \circ g)$ est une convolution de la forme

$$(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} K(n,d) f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

où la fonction $K(n,d)$ est définie de la façon suivante :

$$K(n,d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma(d) = \gamma\left(\frac{n}{d}\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème 1.3.2 nous assure que la convolution de deux fonctions $f, g \in \mathcal{M}$ est aussi dans $\mathcal{M}$ si pour tout m,n,d et e tels que $d|m$, $e|n$ et $(m,n) = 1$, on a que $K(mn, de) = K(m,d) \cdot K(n,e)$. Ainsi, il s'agit de vérifier si les deux égalités suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} &1) \quad \gamma(de) = \gamma(d) \cdot \gamma(e), \\ &2) \quad \gamma\left(\frac{mn}{de}\right) = \gamma\left(\frac{m}{d}\right) \cdot \gamma\left(\frac{n}{e}\right). \end{aligned}$$

Puisque $d|m$, $e|n$ et $(m,n) = 1$ pour tout m,n,d et e, on a que $(d,e) = 1$ et $\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{e}\right) = 1$ et comme γ est une fonction multiplicative, le résultat suit. □

Il est important de noter que dans les théorèmes qui suivent, la fonction E qui intervient est la même que celle que l'on a définie à la section 1.2.

Le lemme précédent motive le théorème qui suit.

Théorème 4.1.4. *Soient f, g et $h \in \mathcal{M}$. Alors, pour tout entier $n > 1$, on a*

$$[(h * g) * f] = [(g + h - E) * f + (h \circ g) \times f].$$

Corollaire 4.1.5. Supposons que $f \in \mathcal{M}$. Alors $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si

$$[(f * f) * f)] = f(\tau * E).$$

Un autre résultat intéressant découle du théorème 3.1.4.

Corollaire 4.1.6. Soit $f = E$ dans le théorème précédent. Alors, pour tout entier $n > 1$ et g, $h \in \mathcal{M}$, on a

$$(h * g) = (g + h) + (h \circ g).$$

En particulier,

$$(f * f) = 2f + (f \circ f).$$

Examinons un exemple concret de ce dernier corollaire. En effet, supposons que $f \in \mathcal{M}$. Alors f est complètement multiplicative si et seulement si $(f\tau) = (f * f)$. Remarquons que nous aurions pu utiliser le corollaire 3.1.5 pour obtenir le même résultat, soit en vérifiant que $[(f * f) * f] = f(\tau * E)$.

De plus, on sait que $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si $f(g * h) = fg * fh$ pour toutes fonctions arithmétiques g et h (voir Shonhiwa [12]). Il existe un équivalent à ceci avec le produit $\circ$.

Corollaire 4.1.7. Supposons que $f \in \mathcal{M}$. Alors $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si

$$(f(g \circ h)) = fg \ \circ \ fh \textit{ pour toutes fonctions } g \textit{ et } h.$$

Ce résultat découle de la proposition 1.2.7 et du corollaire 3.1.6. Voyons un exemple.

Soit $f \in \mathcal{M}$. Alors $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si $(f * f\varphi) = fI$ où φ est la fonction d'Euler et $I(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le corollaire 3.1.6, $(f * f\varphi) = f + f\varphi + f \circ f\varphi$, et le résultat suit immédiatement. Mentionnons un dernier corollaire important.

Corollaire 4.1.8. Soient f, $G \in \mathcal{M}$ et $g = G * \mu$. Alors $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si

$$(f * fg) = fG.$$

En terminant, examinons deux derniers théorèmes. Le premier nous fournira une identité sur les opérations $\circ$ et $\times$. Le deuxième, par contre, nous révélera une caractérisation des fonctions complètement multiplicatives. Les deux théorèmes suivants proviennent de [12].

Théorème 4.1.9. *Soient f, g et $h \in \mathcal{M}$. Alors pour tout entier $n > 1$, on a*

$$[(h * g) * f] = [(f + g) - E] * h + [(g \times h) \circ f].$$

Théorème 4.1.10. *Soit $f \in \mathcal{M}$ et f^{-1} son inverse selon la convolution de Dirichlet. Alors $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si*

$$(f \circ f^{-1})(p^e) = (f^{-1} \times f)(p^e)$$

pour tous les nombres premiers p et tous les entiers $e \geq 2$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $f \in \mathcal{CM}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \times f)(n) &= \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= f(n) \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} \mu(d) \\
&= (-1)^{\omega(n)} f(n).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(n) &= \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(\frac{n}{d})}} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(\frac{n}{d})}} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= f(n) \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(\frac{n}{d})}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= (-1)^{\omega(n)} f(n),
\end{aligned}$$

ce qui établit la première implication.
($\Leftarrow$) Supposons que

$$(f \circ f^{-1})(p^e) = (f^{-1} \times f)(p^e).$$

Or

$$(f \circ f^{-1})(p^e) = \sum_{i=1}^{e-1} f(p^i) f^{-1}(p^{e-i}) \tag{4.1}$$

et

$$(f^{-1} \times f)(p^e) = \sum_{i=1}^{e} f^{-1}(p^i) f(p^{e-i}). \tag{4.2}$$

En combinant (4.1) et (4.2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{e-1} f(p^i)f^{-1}(p^{e-i}) = \sum_{i=1}^{e} f^{-1}(p^i)f(p^{e-i}),$$

impliquant que $f^{-1}(p^e) = 0$ si $e \geq 2$ et donc que $f \in \mathcal{CM}$. □

4.2 Autres fonctions comme condition de convolution

Nous allons maintenant étudier les cas où une autre fonction arithmétique, disons une fonction ρ, est utilisée dans les convolutions :

$$\begin{aligned}(f \circ_\rho g)(n) &:= \sum_{\substack{d|n \\ \rho(d)=\rho(\frac{n}{d})}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\ (f \times_\rho g)(n) &:= \sum_{\substack{d|n \\ \rho(d)=\rho(n)}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).\end{aligned}$$

Le cas où $\rho = \gamma$ ayant déjà été traité dans la section 4.1, nous examinerons les cas où $\rho = \varphi, \sigma, \omega, \Omega$ *et* μ^2. Notons que, tout au long de cette section, nous avons choisi de considérer uniquement le cas où f et g sont des fonctions multiplicatives puisque l'étude de telles fonctions se fait plus aisément en raison de leurs propriétés. Puisque nous nous attardons aux fonctions multiplicatives f, nous nous attarderons à leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers, c'est-à-dire aux valeurs de $f(p^e)$, p premier, e entier positif. Commençons d'abord par examiner $f \circ_\rho g$.

Théorème 4.2.1. *Si $\rho = \varphi, \sigma$ ou Ω, alors*

$$(f \circ_\rho g)(p^e) = \begin{cases} f(p^{\frac{e}{2}})g(p^{\frac{e}{2}}) & \text{si } e \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } e \text{ impair .} \end{cases}$$

Démonstration. Nous établirons seulement la preuve pour φ car celles pour σ et Ω se font de la même façon. On a

$$(f \circ_\varphi g)(p^e) = \sum_{\substack{i=0 \\ \varphi(p^i)=\varphi(p^{e-i})}}^{e} f(p^i)g(p^{e-i}).$$

Puisque $\varphi(p^i) = \varphi(p^{e-i})$, on a $i = e - i$, i.e. $i = \frac{e}{2}$. Il s'ensuit que

$$(f \circ_\varphi g)(p^e) = \begin{cases} f(p^{\frac{e}{2}})g(p^{\frac{e}{2}}) & \text{si } e \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } e \text{ impair .} \end{cases}$$

□

Théorème 4.2.2. *Si $\rho = \mu^2$, alors*

$$(f \circ_{\mu^2} g)(p^e) = \begin{cases} f(p)g(p) & si\ e = 2, \\ 0 & si\ e = 3, \\ \sum_{i=2}^{e-2} f(p^i)g(p^{e-i}) & e \geq 4\ . \end{cases}$$

Démonstration. Puisque $\mu^2(p^i) = \mu^2(p^{e-i})$ si $e = 2$ et $i = 1$ ou si $e \geq 4$ pour $i = 2, 3, \ldots, e-2$, le résultat suit. □

Théorème 4.2.3. *Si $\rho = \omega$, alors*

$$(f \circ_\omega g)(p^e) = \sum_{i=1}^{e-1} f(p^i)g(p^{e-i}).$$

Démonstration. Puisque $\omega(p^i) = \omega(p^{e-i})$ si $i \neq 0$ et si $i \leq e - i$, le résultat suit. □

Nous constatons facilement que pour $\rho = \omega$, cela nous ramène à l'étude de la fonction noyau étudiée par Shonhiwa. Voyons maintenant pour les convolutions de la forme $(f \times_\rho g)$.

Théorème 4.2.4. *Si $\rho = \varphi, \sigma$ ou Ω, alors*

$$(f \times_\rho g)(p^e) = f(p^e).$$

Démonstration. Nous considérons seulement le cas $\rho = \varphi$, puisque la même démonstration tient pour σ et Ω. On a

$$(f \times_\varphi g)(p^e) = \sum_{\substack{i=0 \\ \varphi(p^i)=\varphi(p^e)}}^{e} f(p^i)g(p^{e-i}).$$

Mais puisque $\varphi(p^i) = \varphi(p^e)$ seulement lorsque $i = e$, le résultat suit facilement. □

Théorème 4.2.5. *On a*

$$(f \times_\omega g)(p^e) = \sum_{i=1}^{e} f(p^i)g(p^{e-i}).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\omega(p^i) = \omega(p^{e-i})$ pour tout $i \geq 1$. $\square$

Encore une fois, on constate qu'avec $\rho = \omega$, on revient au cas étudié par Shonhiwa.

Théorème 4.2.6. *Pour* $\rho = \mu^2$,

$$(f \times_{\mu^2} g)(p^e) = \begin{cases} f(p) + g(p) & \text{si } e = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{e} f(p^i)g(p^{e-i}) & \text{si } e \geq 2\ . \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'observer que $\mu^2(p^i) = \mu^2(p^e)$ pour tout $i \geq 2$ si $e \geq 2$ ou pour $i = 0$ et $i = 1$ si $e = 1$. $\square$

La plupart des convolutions étudiées dans cette section fournissent des relations moins simples que celles obtenues dans la section précédente. Toutefois, on constate que celles avec $\rho = \omega$ coïncident avec celles établies par Shonhiwa.

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons entrepris l'étude des convolutions arithmétiques sous divers aspects.

Dans un premier temps, nous avons étudié les opérateurs de moyenne sur différents ensembles de diviseurs. On a vu que les opérateurs $\overline{T}$, $\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$ préservent la multiplicativité et l'additivité. Les opérateurs H_1 et H_2 ne préservent pas l'additivité. Pour ce qui est de préserver la multiplicativité, ceux-ci se comportent assez étrangement, en ce sens qu'ils préservent la multiplicativité de quelques rares fonctions multiplicatives et peuvent être aussi multiplicatifs avec quelques fonctions additives. Aussi, les fonctions génératrices nous ont permis de déterminer l'allure de quelques fonctions sous l'application des opérateurs inverses de $\overline{T}$ et $\widetilde{T}$. On a également vu que, comme les opérateurs $\widehat{T}$, H_1 et H_2 ne sont pas bijectifs, leurs inverses ne peuvent exister. De plus, $\overline{T}$ et $\widetilde{T}$ sont des convolutions arithmétiques régulières tandis que $\widehat{T}$, H_1 et H_2 ne le sont pas. Il semble donc que la possibilité de trouver l'inverse d'un opérateur repose sur le fait qu'on est en présence d'une convolution arithmétique régulière.

Ensuite, on a grandement amélioré le terme d'erreur intervenant dans l'étude des valeurs moyennes des fonctions $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$ qui avait, préalablement, été obtenu par De Koninck et Grah. Ainsi, nous avons établi que le terme d'erreur $O(\frac{1}{\log x})$ pouvait être en réalité $O(\frac{1}{\log^{m+1} x})$ pour un entier positif m arbitraire.

Finalement, on a constaté qu'il était possible de caractériser les fonctions multiplicatives en se basant sur des convolutions impliquant la fonction noyau comme fonction K dans les K-convolutions introduites à la section 1.3. On a tenté, ensuite, d'établir d'autres caractérisations en utilisant diverses fonctions arithmétiques en remplaçant la fonction noyau par celles-ci. Nous avons établi que la fonction ω nous procurait exactement les mêmes caractérisations que la fonction noyau, alors que pour les autres fonctions, on obtenait des propriétés plus complexes.

Bibliographie

[1] Apostol, T.M. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag. (New York), 1976.

[2] McCarthy, P.J. *Introduction to Arithmetical Functions.* Springer-Verlag (New York), 1986.

[3] De Koninck, J.M. et A. Mercier. *Introduction à la théorie des nombres.* Modulo Éditeur, 1994.

[4] De Koninck, J.M. et J. Grah. *Moyennes sur certains ensembles de diviseurs d'un entier.* L'enseignement mathématique **42** (1996), 97-123.

[5] Seneta, E. *Regularly varying functions.* Lecture Notes in Mathematics **508**, Springer-Verlag, 1976.

[6] Duncan, R.L. *Note on the divisors of a number.* Amer. Math. Monthly **68** (1961), 356-359.

[7] Mercier, A. *Comportement asymptotique de* $\sum_{p \leq x} p^a \{\frac{x}{p}\}^k$. Canad. Math. Bull. **30** (3) (1987), 309-317.

[8] Ferguson, R.P. *An application of Stieltjes integration to the power series coefficients of the Riemann zeta function.* Amer. Math. Monthly **70** (1963), 60-61.

[9] Segal, S.L. *On prime-independent additive functions.* Archiv der Mathematik **17** (1966), 329-332.

[10] Landau, E. *Primzahlen.* Chelsea Publishing company.

[11] Rosser, J.B. et Schoenfeld L. *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.

[12] Shonhiwa, T. *Core Function Based Characterisations of Number Theoretic Functions.* Quaestiones Mathematicae J. **27**(2004), 185 -194.