

PHILIPPE DESPRÉS

**CONTRÔLE ET DÉTECTION DU CHAOS**

Mémoire  
présenté  
à la Faculté des études supérieures  
de l'Université Laval  
pour l'obtention  
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de physique  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL

MAI 2000

©Philippe Després, 2000



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-53937-7

Canada

# Résumé

Ce travail porte sur le contrôle du chaos dans des systèmes dynamiques dissipatifs ou Hamiltoniens. Il s'attarde plus particulièrement au cas du système de Rössler. Ainsi, des orbites périodiques instables de l'attracteur de Rössler ont été stabilisées grâce à différentes méthodes sous diverses conditions : espace reconstruit, environnement bruité...etc. De nouvelles techniques de contrôle sont aussi explorées : l'apprentissage renforcé et les réseaux de neurones. Le contrôle du chaos dans les billards, systèmes conservatifs, est aussi abordé. Enfin, des tests visant à détecter des composantes déterministes sont appliqués à des séquences expérimentales issues du monde réel.

## Avant-propos

Je tiens à remercier Louis J. Dubé qui, par sa volonté d'aller toujours plus loin, a grandement contribué à la réalisation de ce travail. Je salue sa grande créativité scientifique, sa rigueur exemplaire et son remarquable sens de l'innovation. Je remercie aussi mes collègues de travail, Babak Pourbohloul, Frédéric Beaulieu et Bernard Doyon, qui ont été sources de conseils et d'inspiration tout au long de ma maîtrise. Merci aussi à Gabriel Bédard et Pierre Amiot, qui ont eu la gentillesse d'examiner ce travail. Enfin, je remercie mes parents, Gilles et Hélène, pour leurs encouragements soutenus et leur grand dévouement, ainsi que mes soeurs Véronique et Julie-Anne. Un clin d'oeil aux gars du bureau : Antoine B., Antoine P., Charles, Marie-Claire, Mel, Marie-Claude, Steph, Kursh, Asshvin, Nicolas, Fred, Pat, Bruno... et à tous ceux qui ont gravité, de près ou de loin, autour de ce noyau dur de la Physique.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contrôle d'un flot continu en 3D</b>	<b>4</b>
1.1 Contrôle OPF . . . . .	5
1.2 Contrôle OGY . . . . .	7
1.2.1 Détermination de la matrice jacobienne . . . . .	11
1.3 Contrôle MED . . . . .	12
1.4 Contrôle RPF . . . . .	13
1.5 Résultats . . . . .	16
1.5.1 Préliminaires . . . . .	16
1.5.2 Contrôle OPF . . . . .	18
1.5.3 Contrôle OGY . . . . .	20
1.5.4 Discussion . . . . .	23
1.6 Contrôle dans un espace reconstruit . . . . .	23

## TABLE DES MATIÈRES

ii

1.6.1	Reconstruction dynamique . . . . .	24
1.6.2	Dimension de recouvrement . . . . .	25
1.6.3	Délai temporel . . . . .	25
1.6.4	Le cas de Rössler . . . . .	26
1.7	Contrôle de Rössler avec les maxima de $z$ . . . . .	29
1.7.1	Résultats—Contrôle RPF . . . . .	30
1.8	Contrôle d'orbites d'ordre supérieur . . . . .	31
1.9	Stabilisation dynamique . . . . .	33
1.10	Discussion . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Contrôle du chaos : nouvelles tendances</b>	<b>38</b>
2.1	Le contrôle du chaos par les réseaux neuronaux . . . . .	38
2.1.1	La boucle de convection thermique . . . . .	39
2.1.2	Contrôle—méthode linéaire . . . . .	40
2.1.3	Contrôle—réseaux neuronaux . . . . .	44
2.1.4	Discussion . . . . .	52
2.2	Contrôle du chaos par apprentissage renforcé . . . . .	53
2.2.1	Stratégie de contrôle . . . . .	54
2.2.2	Application logistique . . . . .	57
2.2.3	Contrôle en ligne . . . . .	59

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	iii
2.2.4 Scénario de contrôle . . . . .	63
2.2.5 Discussion . . . . .	64
<b>3 Dynamique des billards classiques</b>	<b>65</b>
3.1 Les billards classiques . . . . .	65
3.1.1 Méthode numérique . . . . .	66
3.1.2 Contrôle du chaos dans les billards . . . . .	73
3.2 Discussion . . . . .	74
<b>4 Détection de déterminisme</b>	<b>76</b>
4.1 Préliminaires . . . . .	76
4.2 Description de l'expérience . . . . .	78
4.3 Analyse des données . . . . .	79
4.3.1 Approche linéaire . . . . .	80
4.3.2 À la recherche de non-linéarité et de déterminisme . . . . .	84
4.4 Discussion . . . . .	98
<b>Conclusion</b>	<b>100</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>
<b>A Un mot sur l'intégrateur</b>	<b>108</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

iv

**B Séquences expérimentales**

**110**

# Liste des tableaux

1.1	Notation utilisée. . . . .	5
1.2	Données pour le scénario de contrôle . . . . .	31
1.3	Résumé des résultats obtenus chez Rössler. . . . .	37
2.1	Poids et seuils obtenus, $\eta = 0.3$ . . . . .	48
2.2	Exemple d'une politique décisionnelle. . . . .	55
3.1	Paramètres de contrôle pour billard . . . . .	74
4.1	Paramètres de reconstruction . . . . .	87
4.2	Capacité de prédiction sur $2\tau_0$ . . . . .	90
A.1	Coefficients de Cash-Karp . . . . .	109
B.1	Temps transitoires des séquences expérimentales . . . . .	110

# Table des figures

1.1	Schéma du contrôle OPF . . . . .	6
1.2	Schéma de contrôle OGY . . . . .	10
1.3	Schéma de contrôle RPF . . . . .	15
1.4	Attracteur de Rössler . . . . .	17
1.5	Contrôle OPF dans un environnement bruité . . . . .	19
1.6	Détermination de la matrice jacobienne . . . . .	21
1.7	Contrôle OGY dans un environnement bruité . . . . .	22
1.8	Paramètres de reconstruction de Rössler . . . . .	27
1.9	Contrôle MED dans l'espace reconstruit . . . . .	28
1.10	Contrôle avec les maxima de $z$ . . . . .	30
1.11	Rössler—Scénario de contrôle . . . . .	32
1.12	Relaxation vers le point fixe . . . . .	34
1.13	Stabilisation dynamique chez Rössler . . . . .	36

TABLE DES FIGURES

vii

2.1	Analyse de stabilité du système augmenté . . . . .	42
2.2	Contrôle linéaire de la boucle de convection . . . . .	43
2.3	Description schématique du contrôle par réseau de neurones . . . . .	45
2.4	Diminution de l'erreur pendant l'entraînement du RN . . . . .	49
2.5	Courbes de réponse comparée . . . . .	50
2.6	Contrôle du flot dans la boucle de convection par RN . . . . .	51
2.7	Différents profils de refroidissement . . . . .	57
2.8	Contrôle du point fixe de l'application logistique . . . . .	58
2.9	Contrôle en ligne du point fixe de l'application logistique . . . . .	60
2.10	Stabilisation dynamique en ligne . . . . .	61
2.11	<i>Tracking</i> en ligne . . . . .	62
2.12	Scénario de contrôle . . . . .	63
3.1	Description schématique du billard . . . . .	67
3.2	Déformation du cercle en cardioïde . . . . .	68
3.3	Géométrie pour déterminer la matrice jacobienne analytique . . . . .	71
3.4	Espace des phases du billard cardioïde . . . . .	72
3.5	Scénario de contrôle pour billard . . . . .	75
4.1	Spectres de Fourier I . . . . .	81

TABLE DES FIGURES

viii

4.2	Spectres de Fourier II . . . . .	83
4.3	Spectres de Fourier III . . . . .	84
4.4	Données synthétiques : comparaison . . . . .	86
4.5	Prédictions non-linéaires . . . . .	89
4.6	Comparaison des capacités de prédiction . . . . .	90
4.7	Séquences synthétiques et barres d'erreur . . . . .	91
4.8	Caricature pour Rössler . . . . .	93
4.9	Caricature pour Lorenz . . . . .	95
4.10	Test de cohésion . . . . .	96
4.11	Caricature des séquences à 250 et 275 mW . . . . .	97
4.12	$L_n$ pour les séquences à 250 et 275 mW . . . . .	98
B.1	225 mW . . . . .	111
B.2	250 mW . . . . .	112
B.3	275 mW . . . . .	113
B.4	300 mW . . . . .	114
B.5	300 mW (suite) . . . . .	115
B.6	325 mW . . . . .	116
B.7	350 mW . . . . .	117
B.8	375 mW . . . . .	118

*TABLE DES FIGURES*

B.9 400 mW . . . . .	119
B.10 425 mW . . . . .	120
B.11 450 mW . . . . .	121
B.12 500 mW . . . . .	122

# Introduction

Un bond prodigieux a été fait dans les années 60 et 70 dans l'analyse des systèmes dynamiques ; pour la première fois, on réussissait à reconnaître et à quantifier un comportement nouveau, le chaos. Poincaré, au début du siècle, a bien pressenti ce concept mais n'a pas pu aller jusqu'au bout, faute de moyens techniques. Birkhoff, Kolmogorov, Arnol'd et Moser ont aussi été des précurseurs mais il faut attendre l'arrivée des ordinateurs rapides, dans les années 50-60, pour voir s'édifier la *théorie du chaos*. Lorenz [33], en 1963, pose la première brique importante en mettant en évidence la sensibilité aux conditions initiales de son modèle atmosphérique. Cette sensibilité deviendra la définition moderne du chaos. Par la suite, des contributions de Ruelle, Takens, May, Feigenbaum, Winfree et Mandelbrot ont consolidé les acquis et élargi le cadre d'applicabilité de la théorie. La dernière percée importante date de 1990 et continue encore aujourd'hui à faire des remous : le contrôle du chaos par Ott, Grebogi et Yorke (OGY) [36].

Depuis lors, de nombreux ajouts, modifications et améliorations ont été apportés à la méthode de contrôle originelle. Ces variations sur un même thème sont nées d'un besoin d'adapter la technique à différentes situations. En particulier, les expérimentateurs en sont venus à simplifier au maximum l'algorithme de contrôle de façon à pouvoir l'incor-

porer facilement dans un montage. Aussi, cette capacité nouvelle de contrôler le chaos a engendré une réorganisation de l'échelle d'appréciation des systèmes dynamiques. Avant 1990, un comportement chaotique signifiait l'échec, du moins en ingénierie. Aujourd'hui, ce même comportement est synonyme de versatilité et de souplesse.

Le cadre de ce travail repose sur l'existence d'attracteurs chaotiques. Ceux-ci, engendrés par des systèmes d'équations **déterministes** non-linéaires, possèdent la propriété de faire diverger deux trajectoires arbitrairement près l'une de l'autre initialement. L'étude de ces attracteurs permet de comprendre qu'ils sont en fait constitués d'une infinité d'orbites périodiques instables (*unstable periodic orbit, UPO*) [17]. Une trajectoire typique sur l'attracteur passe d'une orbite à l'autre, s'approchant d'une UPO par sa variété stable et s'en éloignant par sa variété instable. La caractérisation de ces variétés permet de tirer l'information nécessaire au contrôle d'une trajectoire.

Le chapitre 1 de ce travail présentera donc différentes techniques de contrôle du chaos. L'exploration sera poussée jusque dans des espaces reconstruits, qui sont généralement plus accessibles aux expérimentateurs. Les principales propriétés de ces espaces et les façons de les obtenir seront aussi revues. Il sera démontré que le contrôle du chaos est possible à partir de variables peu orthodoxes. Ainsi, la stabilisation d'une orbite de l'attracteur de Rössler sera réalisée à partir de la valeur des maxima de la variable  $z$  de ce système. Pour finir le chapitre, un scénario de contrôle viendra démontrer la souplesse des systèmes chaotiques et une expérience de stabilisation dynamique (*tracking*) révélera la capacité d'adaptation des algorithmes de contrôle.

Le chapitre 2 s'aventure quant à lui dans des avenues nouvelles de la théorie du contrôle. Les réseaux de neurones seront mis à contribution pour le contrôle d'un système s'appa-

rentant à celui de Lorenz. Parmi les avantages d'une telle réalisation, on note une capacité d'autonomie accrue, i.e. que le contrôleur se construit lui-même, par essais et erreurs. Ceci peut être d'une aide précieuse dans certaines situations expérimentales. L'apprentissage machine, issu du domaine de l'intelligence artificielle (AI), sera aussi revu. Dans ce cas, le contrôleur s'édifie avec un système de récompenses/punitions et est aussi plus autonome que les contrôleurs standards.

D'un point de vue général, le chaos tend à entrer dans les moeurs. Il est malheureusement handicapé par sa consonance apocalyptique. Pourtant, un modèle aussi banal que l'application logistique permet même aux non-initiés d'apprécier toute la richesse de ce type de système. Les billards classiques constituent aussi d'excellents exemples pédagogiques ; il suffit de déformer quelque peu un billard circulaire pour passer d'un comportement régulier à un comportement complètement chaotique [2]. Les billards ont aussi l'avantage de représenter quelque chose de concret, très près de la vie de tous les jours. Le chapitre 3 proposera donc une exploration de ces objets qui, du statut de simple jouets numériques, sont maintenant essentiels à la compréhension du chaos quantique et du rayonnement laser de micro-cavités. En particulier, il sera démontré qu'il est possible de stabiliser une trajectoire simplement en déformant très faiblement le contour. Ceci est conceptuellement très intuitif mais mathématiquement plus compliqué. Cependant, les techniques de contrôle du chaos s'adaptent très bien à ce genre de situation et permettent une compréhension mathématique simple basée sur la géométrie.

Par la suite, le chapitre 4 résumera l'ensemble de la procédure nécessaire à la détection du chaos dans des séquences expérimentales. Dans bien des cas expérimentaux, il est impossible de dire quelle est la nature du système à l'étude. Linéaire ou non ? Déterministe ou complètement stochastique ? Différentes techniques permettent aujourd'hui de répondre partiellement à ces questions. Quelques-unes d'entre elles seront revues et appliquées à l'étude de séquences issues d'un système physique réel : le moteur moléculaire [58, 11].

# Chapitre 1

## Contrôle d'un flot continu en 3D

**Ce chapitre propose le contrôle du chaos dans des systèmes dissipatifs tridimensionnels. Les techniques standards (OPF, OGY) seront revues et testées dans différentes situations. D'autres méthodes plus exotiques (MED, RPF) seront aussi présentées.**

Les sections suivantes présentes les méthodes de contrôle qui seront utilisées au cours de ce travail. Le tableau 1.1 résume la notation utilisée. Nous mentionnons que la revue *Chaos* de décembre 1997 (vol. 7) présentait une excellente collection d'articles sur le contrôle et la synchronisation du chaos. Nous invitons le lecteur intéressé à s'y référer pour de plus amples détails. Il peut aussi être intéressant de consulter [8], un article issu en partie de ce chapitre.

TAB. 1.1 – Notation utilisée.

$\mathbf{X}_F$	point fixe (PF)
$p$	paramètre de contrôle
$\mathbf{J}$	matrice jacobienne
$\mathbf{g}$	vecteur de sensibilité paramétrique $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{X}_F(p_0 + \delta p) - \mathbf{X}_F(p_0)}{\delta p}$
$u$	pente locale

## 1.1 Contrôle OPF

**OPF (Occasional Proportional Feedback), 1991.** Quand il est possible de réduire un attracteur à une application unidimensionnelle autour d'un PF, la stratégie de contrôle se réduit à un schème élémentaire. La technique OPF<sup>1</sup>, introduite par Hunt [22], est très simple et s'implémente facilement. La simplicité de la méthode en fait un outil de choix pour le contrôle expérimental du chaos.

Tout d'abord, la coordonnée d'un PF  $X_F$  doit être connue. L'application de  $i$ -ième retour peut être décrite par

$$X_{n+i} = u(X_n - X_F(p_n)) + X_F(p_n) \quad (1.1)$$

autour du PF. Ici,  $p$  est un paramètre accessible du système. Le PF est instable si la grandeur de la pente  $|u|$  est plus grande que 1. Il peut être stabilisé si l'on déplace le PF actuel du système,  $X_F(p_0)$ , à un autre situé à

$$X'_F = X_F(p_0 + \delta p) = u(u - 1)^{-1}(X_n - X_F(p_0)) + X_F(p_0). \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>L'appellation SPF (Simple Proportional Feedback) est équivalente.

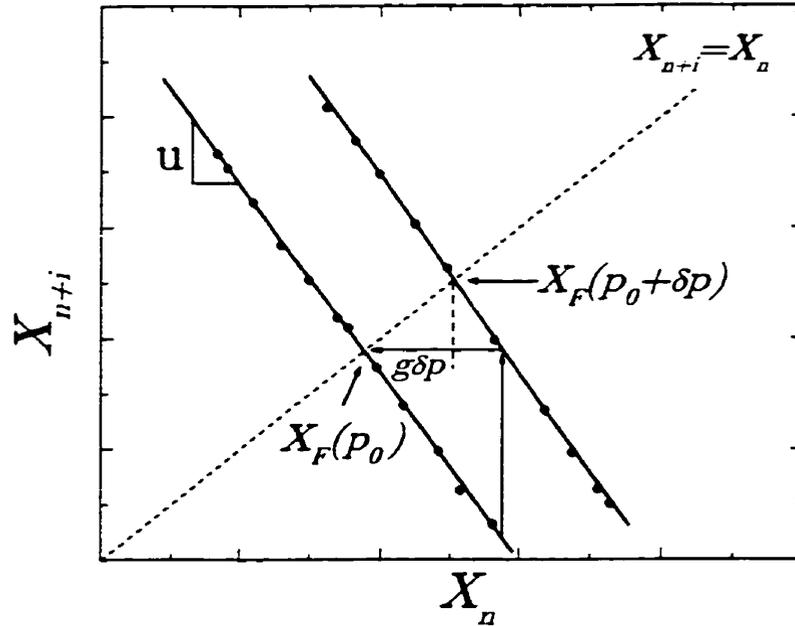


FIG. 1.1 – Schéma du contrôle OPF. La variation paramétrique  $\delta p$ , calculée à partir de  $X_n - X_F$ ,  $u$  et  $g$ , permet de déplacer verticalement le point  $X_n$  sur l'application  $X_{n+i}(X_n, p_0 + \delta p)$  qui l'amènera sur  $X_F(p_0)$  au prochain retour.

En effet, l'introduction de  $X'_F$  dans l'expression (1.1) donne  $X_{n+i} = X_F(p_0)$ . Le déplacement du point fixe est effectué par perturbation paramétrique, i.e. que

$$X'_F = X_F(p_0 + \delta p_n) = X_F(p_0) + \delta p_n \left. \frac{dX_F(p)}{dp} \right|_{p=p_0}. \quad (1.3)$$

On devra donc mesurer la sensibilité du point fixe sous une (légère) variation du paramètre  $p$ . Pour un petit écart  $\|X_n - X_F\|$ , on suppose que le déplacement de l'application  $X_{n+i}$  vs  $X_n$  est proportionnel au changement de paramètre. Ceci nous permet d'écrire que

$$\delta p_n = \frac{u}{(u-1)dX_F/dp}(X_n - X_F(p_0)) \equiv \frac{(X_n - X_F(p_0))}{k}. \quad (1.4)$$

Le facteur de proportionnalité  $k$  est déterminé par la translation horizontale de l'application (et non du PF) à la hauteur de  $X_F$ , sous une perturbation paramétrique  $\delta p$  (voir FIG.

1.1). En fonction de quantités faciles à mesurer,  $k = \frac{u-1}{u} \left( \frac{X'_F - X_F}{\delta p} \right)$  et

$$\delta p_n = \frac{u}{(ug - g)} [X_n - X_F(p_0)]. \quad (1.5)$$

La simplicité du contrôle par OPF en fait un excellent outil pour les expérimentateurs. Comme la seule quantité requise au contrôle en temps réel est l'écart entre deux scalaires, il est possible de développer un circuit analogique qui effectuera le calcul perturbatif. C'est d'ailleurs ce qu'a fait Hunt avec un résonateur à diode [22]. Un avantage certain de l'implémentation matérielle est la possibilité de s'attaquer au contrôle de systèmes oscillant à hautes fréquences. Le principal désavantage réside dans le fait que la méthode ne s'applique qu'aux systèmes globalement unidimensionnels autour d'un PF. Pour des exemples d'application, voir [40, 41, 43].

## 1.2 Contrôle OGY

**OGY (Ott, Grebogi et Yorke), 1990.** La méthode OGY constitue la première démonstration formelle du contrôle du chaos. Elle est inspirée du placement de pôles utilisé en ingénierie. Dans le papier original [36], l'application de Hénon est contrôlée. Cependant, les résultats restent valides pour un système chaotique continu en 3D dont on tire une surface de Poincaré (SP) en 2D. La dynamique sur cette surface autour d'un PF doit être décrite par un point de selle, i.e. qu'il existe une direction stable et une autre instable. Mathématiquement, la dynamique sur la surface est décrite par

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n, p) \quad (1.6)$$

avec  $\mathbf{X}_n \in \mathcal{R}^2$  et  $p \in \mathcal{R}$ .

Pour le contrôle, les coordonnées de l'orbite de période  $m$  à contrôler

$$\mathbf{X}(1, p_0) \rightarrow \mathbf{X}(2, p_0) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{X}(m, p_0) \rightarrow \mathbf{X}(m+1, p_0) = \mathbf{X}(1, p_0) \quad (1.7)$$

doivent être connues. Dans un voisinage  $\delta$  de  $\mathbf{X}(i, p_0)$ , la dynamique est linéarisée par

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}(i+1, p_0) \sim \mathbf{J}_i [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(i, p_0)] + \mathbf{K}_i \delta p_n \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice jacobienne  $2 \times 2$  et  $\mathbf{K}$  est le vecteur  $2 \times 1$  de variation paramétrique

$$\mathbf{J} \equiv D_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(\mathbf{X}, p) \quad \text{and} \quad \mathbf{K} \equiv D_p \mathbf{F}(\mathbf{X}, p) \quad (1.9)$$

avec les dérivées partielles évaluées à  $[\mathbf{X} = \mathbf{X}(i, p_0), p = p_0]$ . La matrice jacobienne<sup>2</sup> permet d'établir les directions stable  $\mathbf{e}_{s,i}$  et instable  $\mathbf{e}_{u,i}$ , les valeurs propres correspondantes ( $\lambda_{s,i}$  et  $\lambda_{u,i}$ ) de même que les vecteurs contravariants associés, définis par

$$\mathbf{f}_{u,i} \cdot \mathbf{e}_{u,i} = \mathbf{f}_{s,i} \cdot \mathbf{e}_{s,i} = 1 \quad \mathbf{f}_{u,i} \cdot \mathbf{e}_{s,i} = \mathbf{f}_{s,i} \cdot \mathbf{e}_{u,i} = 0 \quad (1.10)$$

Il est alors possible de calculer une perturbation  $\delta p_n$  telle que le prochain passage sur la SP tombe sur la direction stable de  $\mathbf{X}_F(p_0)$ , i.e.

$$\mathbf{f}_{u,i+1} \cdot [\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}(i+1, p_0)] = 0 \quad (1.11)$$

(critère de contrôle OGY)

Donc, de la linéarisation (1.8),

$$\mathbf{f}_{u,i+1} \cdot \{\mathbf{J}_i [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(i, p_0)] + \mathbf{K}_i \delta p_n\} = 0 \quad (1.12)$$

la perturbation calculée est

$$\delta p_n = - \frac{\mathbf{f}_{u,i+1} \cdot \{\mathbf{J}_i [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(i, p_0)]\}}{\mathbf{f}_{u,i+1} \cdot \mathbf{K}_i} \quad (1.13)$$

<sup>2</sup>La section 1.2.1 montre comment obtenir cette matrice.

Avec cette approche, il est possible d'appliquer une perturbation à chaque point de l'orbite. La stabilisation en sera peut-être meilleure, mais elle aura nécessité beaucoup de calculs étant donné que les  $\mathbf{J}_i$  et les  $\mathbf{K}_i$  doivent être connus partout. De plus, les  $\mathbf{K}_i$  ne sont pas des quantités facilement mesurables. Au cours du présent travail, nous avons préféré une approche plus simple où la linéarisation est

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}(i+1, p_n) \sim \mathbf{J}_i [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(i, p_n)] \quad (1.14)$$

et le vecteur de sensibilité paramétrique des PFs est

$$\mathbf{g}_i \equiv \left. \frac{d}{dp} \mathbf{X}(i, p) \right|_{p=p_0} \sim \frac{\mathbf{X}(i, p_0 + \delta p) - \mathbf{X}(i, p_0)}{\delta p} \quad (1.15)$$

ou, de façon équivalente,

$$\mathbf{X}(i, p_0 + \delta p) \sim \mathbf{X}(i, p_0) + \mathbf{g}_i \delta p \quad (1.16)$$

Avec le critère de contrôle OGY (1.11), la perturbation requise à la stabilisation est

$$\delta p_n = - \frac{\mathbf{f}_{u,i+1} \cdot \{\mathbf{J}_i [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(i, p_0)]\}}{\mathbf{f}_{u,i+1} \cdot (\mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{J}_i \mathbf{g}_i)} \quad (1.17)$$

Dans ce cas, les  $\mathbf{g}_i$  sont obtenus simplement en mesurant le déplacement des PFs sous une légère perturbation. Une autre simplification est possible en n'intervenant qu'une seule fois par période sur la dynamique. La linéarisation et la sensibilité paramétrique doivent alors être estimées autour d'une seule composante de l'orbite. L'équation (1.14) devient

$$\mathbf{X}_{n+m} - \mathbf{X}_{F,i}(p_n) \sim \mathbf{J}_i^{(m)} [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{F,i}(p_n)] \quad (1.18)$$

où la notation fait en sorte que  $\mathbf{X}_{F,i}(p) = \mathbf{X}(i, p)$  est un PF de  $\mathbf{F}^{(m)}$  ( $m$  fois l'application  $\mathbf{F}$ ). De plus, la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_i^{(m)} = D_{\mathbf{X}} \mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{X}, p)$ , évaluée à  $[\mathbf{X}_{F,i}(p_0), p_0]$ , peut

être exprimée en termes de ses vecteurs et valeurs propres  $(\lambda_{u,i} \mathbf{e}_{u,i} \mathbf{f}_{u,i} + \lambda_{s,i} \mathbf{e}_{s,i} \mathbf{f}_{s,i})$ .

L'équation (1.17) devient

$$\delta p_n = - \frac{\lambda_{u,i}}{(1 - \lambda_{u,i})} \frac{\mathbf{f}_{u,i} \cdot [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{F,i}(p_0)]}{\mathbf{f}_{u,i} \cdot \mathbf{g}_i} \quad (1.19)$$

La figure 1.2 montre la géométrie de la méthode.

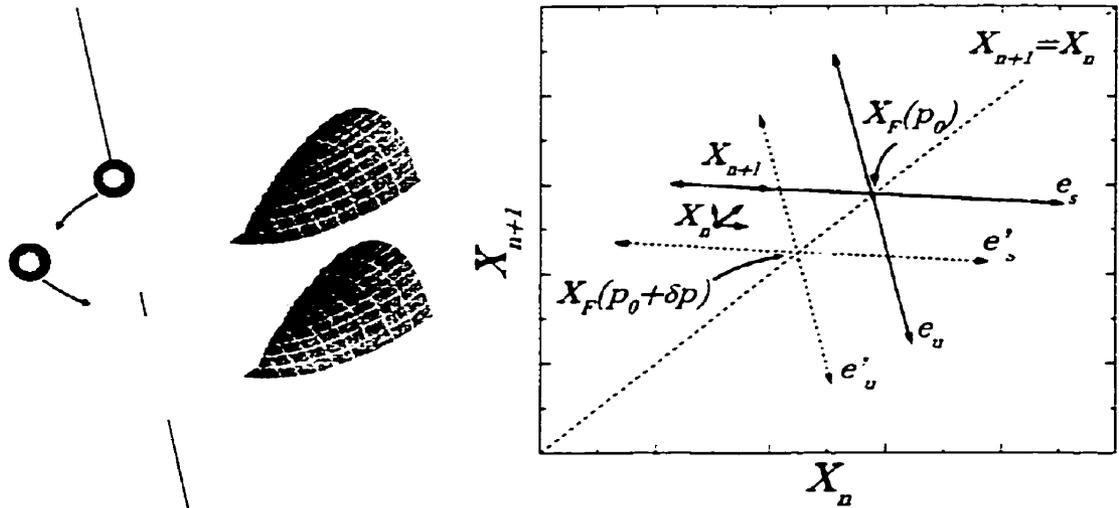


FIG. 1.2 – Schéma de contrôle OGY. (gauche) Fonctionnement imagé de la technique OGY. (droite) L'état du système est poussé sur la variété stable de  $\mathbf{X}_F(p_0)$  par l'action combinée de  $\mathbf{e}'_s$  et  $\mathbf{e}'_u$  associés à  $\mathbf{X}_F(p_0 + \delta p)$ .

Une des premières améliorations à l'algorithme vient de Dressler et Nitsche [7, 35] qui adaptent le calcul de la perturbation aux coordonnées à délai [1] (voir section 1.6 sur la reconstruction dynamique). Une première généralisation par Romeiras *et al.* [54] permet l'implémentation dans des systèmes de plus haute dimension et présentant plusieurs directions instables [67].

### 1.2.1 Détermination de la matrice jacobienne

Le contrôle OGY est légèrement plus complexe que celui de type OPF car il nécessite la détermination de quantités plus difficilement accessibles. Entre autres, le contrôleur OGY a besoin d'une linéarisation de l'espace autour du PF. Dans le cas de Rössler, comme dans celui d'à peu près tous les systèmes réels, il n'existe pas de description analytique de la dynamique sur la surface de Poincaré<sup>3</sup>. Il faut donc reconstruire la matrice jacobienne à partir des observations. L'approche utilisée ici consiste à résoudre un système de plusieurs équations et peu d'inconnues. On cherche la matrice  $\mathbf{J}$  qui sera la meilleure approximation de la dynamique, au sens du moindre carré. Le système à résoudre, en  $2D$ , ressemble à

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \cdots & x_{n+1}^{(M)} \\ y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & \cdots & y_{n+1}^{(M)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(M)} \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(M)} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

où les  $M$  points sont collectés autour du PF, soit dans la région à linéariser. On peut réécrire l'équation (1.20) en deux systèmes d'équations distincts

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_n^{(1)} & y_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} & y_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots \\ x_n^{(M)} & y_n^{(M)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \\ \cdots \\ x_{n+1}^{(M)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_n^{(1)} & y_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} & y_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots \\ x_n^{(M)} & y_n^{(M)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{n+1}^{(1)} \\ y_{n+1}^{(2)} \\ \cdots \\ y_{n+1}^{(M)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (1.21)$$

et les résoudre séparément. La meilleure façon de solutionner un tel système, contenant beaucoup plus d'équations que d'inconnues, est d'utiliser la décomposition en valeurs singulières. Ceci évite généralement les problèmes de matrices singulières pouvant survenir

<sup>3</sup>En fait, il est possible d'obtenir les caractéristiques de stabilité à un point sur l'attracteur en intégrant les équations variationnelles du système, si les équations du mouvement sont connues [39].

avec les méthodes de résolution standards (élimination de Gauss, décomposition  $LU$ )<sup>4</sup>.

La solution du système est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1^{-1} & & \\ & \dots & \\ & & w_N^{-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}^{-1}} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

où les matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  proviennent de la décomposition de la matrice  $\mathbf{A}$  selon

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \quad (1.23)$$

La matrice  $\mathbf{W}$  est diagonale et ses entrées  $w_1, w_2, \dots, w_N$  sont les valeurs singulières. Il est possible d'annuler les valeurs singulières trop petites, correspondant à des sous-espaces peu significatifs. Cette façon de faire est aussi à la base d'algorithmes de réduction non-linéaire du bruit [19].

### 1.3 Contrôle MED

**MED (Minimal Expected Deviation), 1993.** En travaillant avec un laser-NMR, Reyl *et al.*[47] ont découvert que des valeurs propres complexes survenaient pour des orbites de période 3 ou plus. Le même problème apparaissait quand plusieurs stations de contrôle étaient disséminées le long de l'orbite. Aussi, il fallait revoir l'algorithme OGY pour qu'il puisse s'accommoder de plusieurs directions instables. L'identification de l'orbite périodique instable et la détermination de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  associée

<sup>4</sup>Pour une revue de la méthode, on consultera le chapitre 2 de [46].

sont nécessaires à ce type de contrôle et s'obtiennent comme d'habitude. La sensibilité du PF par rapport au changement de paramètre doit aussi être connue (vecteurs  $\mathbf{g}_i$  (1.15), voir section 1.2). Cependant, le calcul des propriétés de stabilité n'est plus requis. Le critère de contrôle est changé et devient

$$\|\mathbf{X}_{n+m} - \mathbf{X}_{F,i}\| = \text{minimum} \quad (1.24)$$

(critère de contrôle MED)

où la valeur estimée de  $\mathbf{X}_{n+m}$  provient de la linéarisation (1.18) et du vecteur  $\mathbf{g}_i$  (1.15), i.e.

$$\mathbf{X}_{n+m} \sim \mathbf{X}_{F,i}(p_0) + \mathbf{J}_i^{(m)} [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{F,i}(p_0)] + (\mathbf{g}_i - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_i) \delta p_n \quad . \quad (1.25)$$

La solution au problème de minimisation (1.24) est alors

$$\delta p_n = - \frac{(\mathbf{g}_i - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_i) \cdot \{\mathbf{J}_i^{(m)} [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{F,i}(p_0)]\}}{\|(\mathbf{g}_i - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_i)\|^2} \quad . \quad (1.26)$$

Cette méthode élimine la nécessité du calcul des valeurs propres, des vecteurs propres et contravariants; ceci peut aider à éliminer des sources d'erreur. Cependant, elle introduit une prédiction qui peut elle aussi être entachée d'incertitude. Les auteurs suggèrent d'utiliser une fonction générique polynomiale pour déterminer la matrice jacobienne plutôt qu'une fonction simplement linéaire. La prédiction s'en trouve améliorée. On trouvera une généralisation dans [60].

## 1.4 Contrôle RPF

**RPF (Recursive Proportional Feedback), 1993.** Habituellement, une application sur une surface de Poincaré (SP) se déplace sous un changement paramétrique. Cepen-

dant. l'algorithme de contrôle par OPF ne tient pas compte de ce déplacement. Dans l'esprit de l'article de Dressler et Nitsche [7], qui corrigeaient OGY, Rollins *et al.* [53] ont amélioré la technique par OPF. Les systèmes chez qui le succès du contrôle dépend du choix du paramètre sont spécifiquement ciblés. Ceux-ci peuvent être de haute dimension et les UPOs à contrôler peuvent être complètement instables [48].

Ce qu'il faut comprendre, c'est que la perturbation  $\delta p_n$  appliquée au système à l'origine autonome transforme celui-ci en un système non-autonome. Une façon d'intégrer cette dépendance supplémentaire est d'inclure dans l'application l'effet des perturbations passées [7],

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}_c(\mathbf{X}_n, p_n, p_{n-1}) \quad , \quad (1.27)$$

où l'influence des deux dernières perturbations est retenue. Dans la plupart des cas, c'est suffisant. La linéarisation de l'espace autour d'un PF peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+m} \sim & \mathbf{X}_{F,i}(p_0, p_0) + \mathbf{J}_i^{(m)} [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{F,i}(p_0, p_0)] \\ & + (\mathbf{g}_{u,i} - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_{u,i}) \delta p_n + (\mathbf{g}_{b,i} - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_{b,i}) \delta p_{n-1} \quad . \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec

$$\mathbf{g}_u = \left. \frac{d}{dp} \mathbf{X}_F(p, p') \right|_{p=p'=p_0} \quad \mathbf{g}_b = \left. \frac{d}{dp'} \mathbf{X}_F(p, p') \right|_{p=p'=p_0} \quad . \quad (1.29)$$

Ceci se ramène à l'équation (1.25) avec la dépendance sur la perturbation précédente en plus. Il ne reste qu'à déterminer un critère de contrôle qui permettra d'isoler  $\delta p_n$  facilement dans (1.28). Le choix

$$[\mathbf{X}_{n+2m} - \mathbf{X}_{F,i}(p_0, p_0)] = 0 \quad \text{et} \quad \delta p_{n+1} = 0 \quad (1.30)$$

**(critère de contrôle RPF)**

est raisonnable et conduit, après un peu d'algèbre, à

$$\delta p_n = - \frac{\mathbf{Z}_i^{(m)} \cdot \{ \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{J}_i^{(m)} [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{F,i}(p_0, p_0)] \}}{\|\mathbf{Z}_i^{(m)}\|^2} - \frac{\mathbf{Z}_i^{(m)} \cdot (\mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{W}_i^{(m)})}{\|\mathbf{Z}_i^{(m)}\|^2} \delta p_{n-1} \quad (1.31)$$

avec  $\mathbf{Z}_i^{(m)} = \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{V}_i^{(m)} + \mathbf{W}_i^{(m)}$ ,  $\mathbf{V}_i^{(m)} = \mathbf{g}_{u,i} - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_{u,i}$  and  $\mathbf{W}_i^{(m)} = \mathbf{g}_{b,i} - \mathbf{J}_i^{(m)} \mathbf{g}_{b,i}$ .

La figure 1.3 illustre comment tirer l'information nécessaire au contrôle RPF. On se doit d'abord d'obtenir une séquence où le paramètre de contrôler passe de  $p_0$  à  $p_0 + \delta p$ . De cette séquence, deux applications ( $F_u$  et  $F_b$ ) pourront être discernées si le système est réellement sensible à l'influence de la perturbation précédente. Pour une application unidimensionnelle,  $\mathbf{J}$  est la pente locale  $u$  de l'application originale ( $F_c$ ),  $g_u \delta p$  et  $g_b \delta p$  sont les déplacements des points fixes aux positions  $X_{F,u}(p_0 + \delta p, p_0) \sim X_F(p_0) + g_u \delta p$  et  $X_{F,b}(p_0, p_0 + \delta p) \sim X_F(p_0) + g_b \delta p$ .

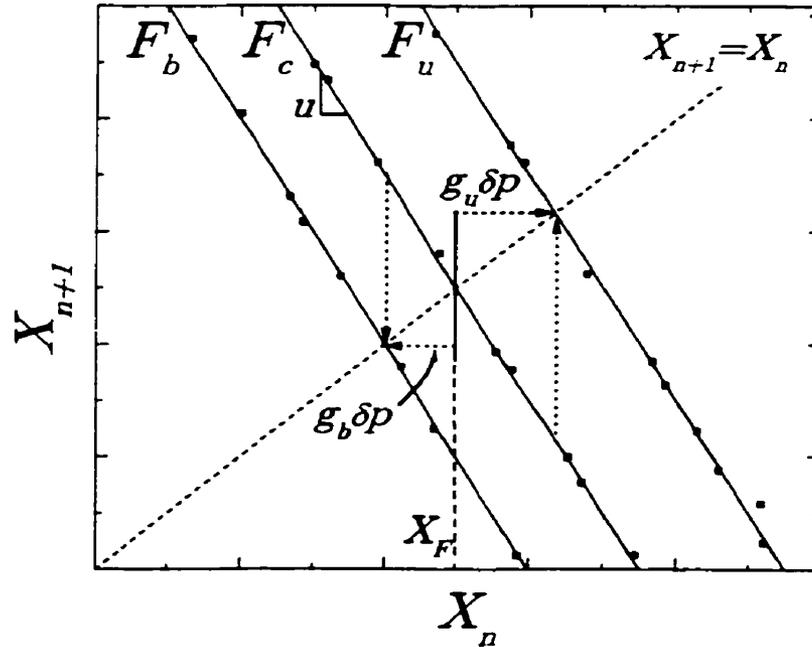


FIG. 1.3 – Schéma de contrôle RPF. Les différentes quantités nécessaires au contrôle sont indiquées.

Aussi, en termes de quantités facilement mesurables (écart entre les PFs et pente), la perturbation est

$$\delta p_n = \frac{u^2}{(u-1)(ug_u + g_b)} [X_n - X_F(p_0, p_0)] - \frac{ug_b}{ug_u + g_b} \delta p_{n-1} \quad (1.32)$$

Pour  $g_b = 0$  (sensibilité en  $\delta p_{n-1}$  nulle), le résultat devient

$$\delta p_n = \frac{u}{(ug - g)} [X_n - X_F(p_0)], \quad (1.33)$$

soit le même que pour le contrôle OPF (1.5). L'amélioration à l'algorithme de base est majeure et quiconque souhaite utiliser l'OPF devrait la considérer. On trouvera une généralisation de la méthode dans [48] et un exemple d'application dans [49].

## 1.5 Résultats

### 1.5.1 Préliminaires

#### Le système de Rössler

Otto Rössler [55] a introduit en 1976 un système d'équations différentielles décrivant un processus qui peut s'apparenter aux tâches d'étirement et de repliement de la pâte en boulangerie. L'intégration numérique du système de Rössler (1.34) conduit à des trajectoires en spirales croissantes dans le plan  $xy$  et qui se replient sans se croiser dans la troisième dimension ( $z$ ) pour être réinjectées sur le disque principal. La géométrie de l'attracteur de Rössler (FIG. 1.4) a un caractère pédagogique indéniable; elle démontre comment

l'enchaînement successif d'étirements et de repliements engendre une caractéristique fondamentale du chaos, la sensibilité aux conditions initiales. Ce système sera à la base des expériences numériques qui suivent. L'information sur l'intégrateur numérique utilisé est située à l'annexe A.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{1.34}$$

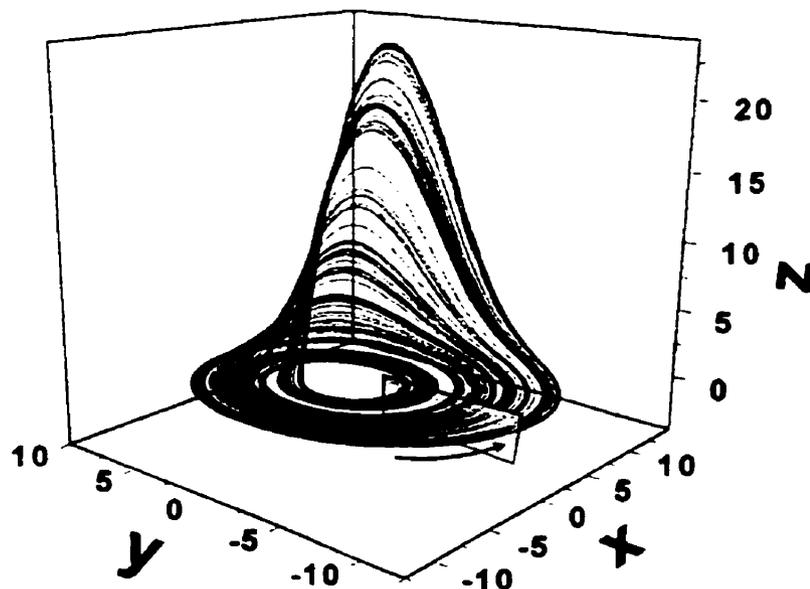


FIG. 1.4 - **Attracteur de Rössler** avec les paramètres standards ( $a = b = 0.2$ ,  $c = 5.7$ ). La trajectoire plus foncée correspond à une orbite instable de période 3. L'emplacement d'une section de Poincaré ( $x = 2, \dot{x} > 0$ ) utilisée comme station de contrôle est aussi montrée.

La section de Poincaré utilisée comme station de contrôle est définie par

$$\Sigma = \{x = 2, \dot{x} > 0\} \quad (1.35)$$

Les coordonnées de l'intersection entre la trajectoire et le plan  $\Sigma$  sont obtenues numériquement par interpolation linéaire entre deux points situés de part et d'autre de la surface. Ces deux points devront idéalement être très près de  $\Sigma$  pour que l'estimation soit précise. Ceci est accompli en passant et repassant à travers la surface avec un pas d'intégration de plus en plus petit, jusqu'à la précision désirée. D'autres méthodes plus élégantes existent, comme celle de Hénon [21] par exemple, mais elles ne sont pas nécessairement moins coûteuses en calcul.

Les coordonnées d'un PF sont obtenues par récurrence. Il s'agit de rechercher sur l'application de Poincaré des points appartenant à  $\{(y, z) : \|(y_{n+1} - y_n, z_{n+1} - z_n)\| < \epsilon\}$ . Pour  $\epsilon$  suffisamment petit et une accumulation statistiquement intéressante de points, le centre de masse de l'ensemble a été établi à  $y_F = -8.5579 \pm 0.0005$  et  $z_F = 0.03888 \pm 0.00005$ .

### 1.5.2 Contrôle OPF

Le système de Rössler, très dissipatif et presque unidimensionnel sur une surface de Poincaré, se prête bien à la méthode OPF. Le coefficient de proportionnalité  $k$  a été calculé avec  $\delta p = 0.05$  et vaut -1.6, dans le cas particulier du PF trouvé précédemment. Le voisinage de contrôle est défini par

$$B_\epsilon = \{y : |y - y_F| < \epsilon\} \quad (1.36)$$

Le contrôleur modifiera le paramètre  $c$  du système seulement si la trajectoire intercepte la surface de Poincaré dans ce voisinage. Aussi, la perturbation est calculée à partir de

$$\hat{y}_n = y_n + A\xi_n \quad (1.37)$$

où  $\xi_n$  est un générateur de nombres gaussiens (moyenne 0, variance 1)<sup>5</sup> et  $A$  l'amplitude du bruit. Cette imprécision volontaire sur la mesure est ajoutée par souci de réalisme (le contrôleur a accès à une valeur bruitée). On espère ainsi se rapprocher des conditions qui prévalent dans les systèmes réels, i.e. les montages expérimentaux. Par contre, l'intégration se poursuit à partir de  $y_n$ , soit selon la vraie dynamique. On parlera donc de bruit de mesure. La figure 1.5 montre le résultat d'une expérience de contrôle où le niveau de bruit est augmenté graduellement. Dans ce cas, la grandeur du voisinage

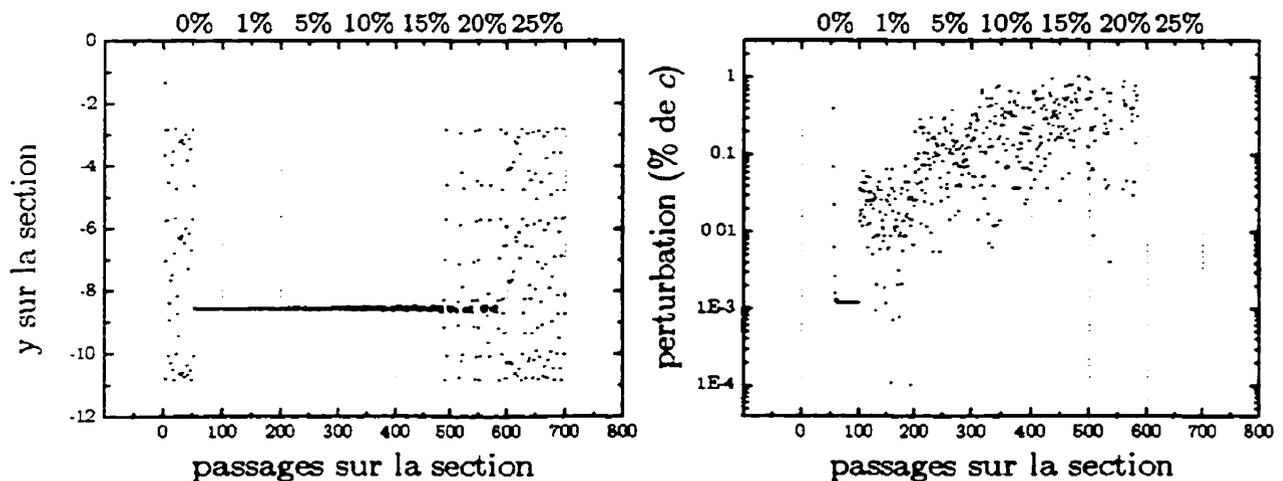


FIG. 1.5 – Contrôle OPF dans un environnement bruité. Le niveau de bruit gaussien est augmenté tous les 100 itérés. Il est exprimé sous forme de fraction ( $A/\epsilon$ ) du voisinage de contrôle utilisé ( $\epsilon = 0.1$ ). Le comportement chaotique à 0% n'est pas dû à une mauvaise performance; c'est le temps requis pour que la trajectoire atteigne le voisinage de contrôle.

<sup>5</sup>Les nombres retenus ne dépassent jamais 3 fois la variance.

a été fixée arbitrairement à  $\epsilon = 0.1$  et l'amplitude du bruit est exprimée en terme de fraction de  $B_\epsilon$ . Aucune limite quant à la grandeur maximale de la perturbation n'a été appliquée. Dans un contexte où l'on veut diminuer la force de l'intervention, on ajustera la grandeur du voisinage en conséquence (plus celui-ci est petit, plus la perturbation nécessaire au contrôle est petite). Le temps d'attente, sans procédure de ciblage, augmente considérablement par contre. Généralement, on s'accommodera d'un voisinage admettant des temps transitoires raisonnables<sup>6</sup>. Les deux ou trois premières interventions peuvent être un peu plus musclées mais pas au point de modifier profondément le système. Une fois la stabilisation établie, les perturbations calculées sont infimes si les paramètres de contrôle sont adéquats.

### 1.5.3 Contrôle OGY

En travaillant avec 79 points dans un voisinage  $\epsilon = 0.01$  autour du PF ( $y_F = -8.5579$ ,  $z_F = 0.03888$ ), la matrice jacobienne suivante a été obtenue

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1.844 & -626.0 \\ -0.00262 & 0.4242 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

La figure 1.6 montre que cette matrice projette les points de façon très semblable à la vraie dynamique. Dans le cas particulier du point PF trouvé précédemment, la valeur du vecteur de contrôle  $\mathbf{g}$  a été établie à

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1.24 \\ -0.006 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

---

<sup>6</sup>Voir [36] et [51] pour des discussions sur les temps transitoires.

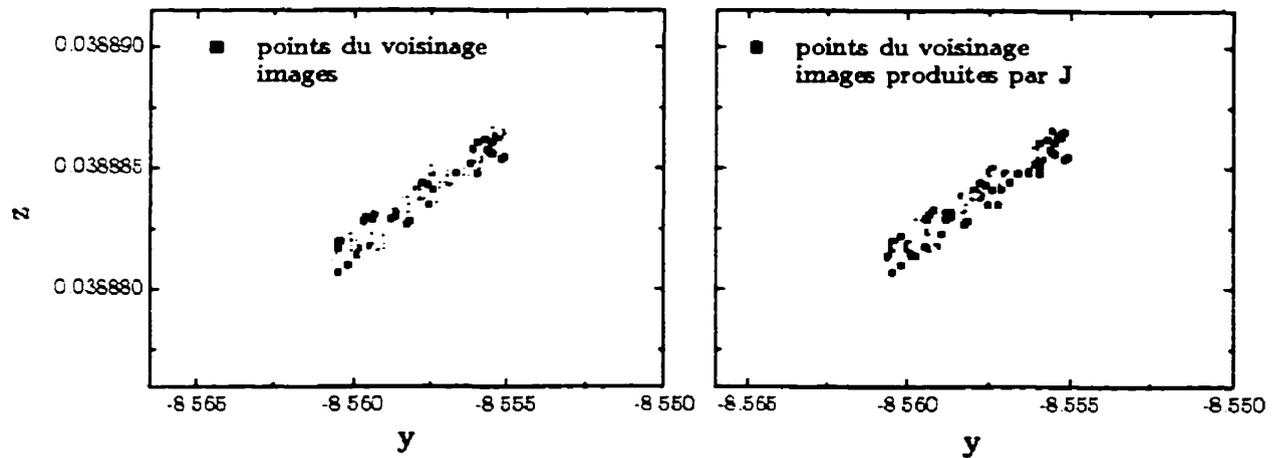


FIG. 1.6 - **Détermination de la matrice jacobienne.** (gauche) Les données originales qui ont servi à construire numériquement la matrice jacobienne (79 points et leurs images). (droite) Les points originaux et leurs images projetées par la matrice jacobienne construite. La direction de la variété instable est de toute évidence bien reproduite.

Encore une fois, le contrôleur travaille avec des valeurs bruitées ( $\hat{y}$  et  $\hat{z}$  (1.37)). Les résultats sont montrés à la figure 1.7. Ils sont très semblables à leurs équivalents OPF. En fait, parce que l'attracteur est plat à l'endroit où le contrôle est appliqué, les techniques OPF et OGY opèrent sensiblement de la même façon.

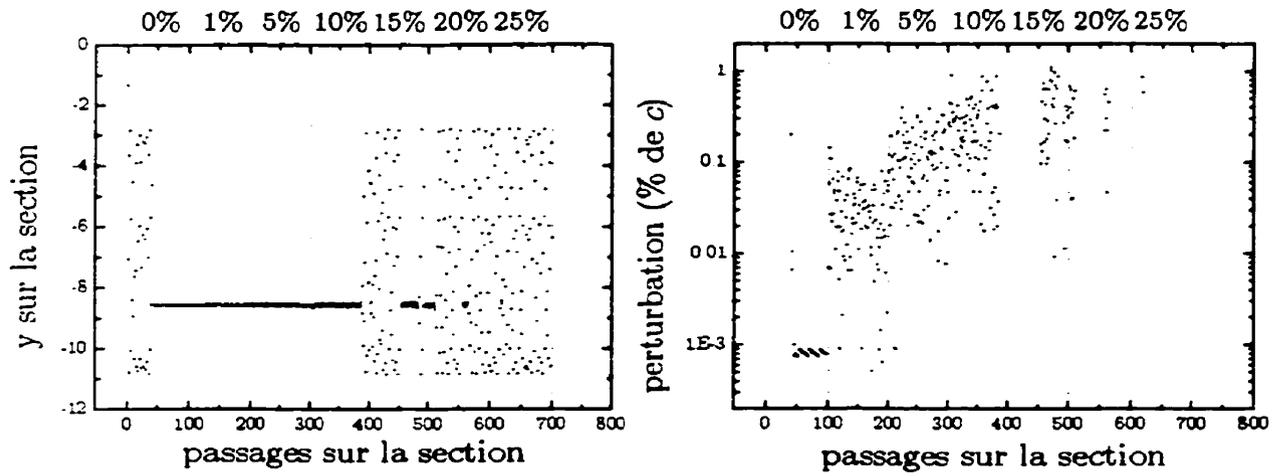


FIG. 1.7 - Contrôle OGY dans un environnement bruité. Le niveau de bruit gaussien est augmenté tous les 100 itérés. Il est exprimé sous forme de fraction ( $A/\epsilon$ ) du voisinage de contrôle utilisé ( $\epsilon = 0.1$ ).

### 1.5.4 Discussion

À première vue, il semble que la méthode OPF soit plus robuste dans un environnement bruité que OGY. L'expérience numérique montre en effet que le contrôle est perdu plus tard, quand l'amplitude atteint 15% de la valeur du voisinage (contrairement à 10% pour OGY). Les deux simulations ont été faite avec la même précision sur les calculs ( $10^{-14}$ ), les mêmes conditions initiales ( $x = y = z = 1$ ), le même voisinage de contrôle ( $\epsilon = 0.1$ ) et le même générateur de nombres aléatoires (`ran1` de [46]) avec le même point de départ (`seed=-13`). Ceci laisse croire que la méthode la plus simple, celle qui nécessite le moins de calculs préliminaires, est plus performante face au bruit. Ceci est raisonnable, du fait que l'erreur sur l'estimation de la matrice jacobienne est un bruit supplémentaire dans le cas d'OGY. Le contrôle de type MED produit des résultats très semblables et ils ne sont pas reproduits ici. Cependant, ce sera la méthode de contrôle utilisée dans la prochaine section.

## 1.6 Contrôle dans un espace reconstruit

La preuve a été faite dans les sections précédentes qu'il est possible de contrôler un système chaotique. Cependant, connaître simultanément toutes les variables d'un système est un luxe qui n'est pas à la portée de tous. Les expérimentateurs, par exemple, doivent souvent se débrouiller avec des séquences temporelles d'une seule mesure scalaire. Cette section propose donc de contrôler le système de Rössler à partir de l'information d'une seule variable, soit  $x$ .

### 1.6.1 Reconstruction dynamique

Les éléments nouveaux de cette section sont issus de la théorie du recouvrement (*embedding*) [59]. Celle-ci a vu le jour dans les années 80 après que quelques expérimentateurs eurent l'idée de reconstruire des attracteurs chaotiques avec des coordonnées à délai. Les pionniers de la reconstruction, Glass *et al.*[14], Roux *et al.*[56] et Packard *et al.*[38] (reproduit dans [37]), ont vu leurs travaux légitimés par les fondements mathématiques érigés par Takens[73], Mañé[34] et Sauer *et al.*[59]. Les chapitres 5 et 6 de *Coping with Chaos* [37] rapportent les principaux résultats de la théorie et reproduisent les articles clés. Nous donnerons ici quelques généralités sur les techniques de recouvrement, qui permettent la reconstruction d'attracteurs.

Soit une fonction de mesure  $\mathbf{F}$  retournant une quantité  $\mathbf{Y}$  qui dépend de l'état du système à l'instant  $t$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \quad (1.40)$$

S'il est possible de mesurer simultanément  $m$  variables, alors la quantité  $\mathbf{Y}$  est vectorielle [ $\mathbf{Y}(t) = Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ ] et l'espace dans lequel se déploient ces vecteurs est l'espace de reconstruction. Si  $m$  est suffisamment grand ( $m > 2D_0$  où  $D_0$  est la dimension de capacité de l'attracteur sous-jacent), alors la fonction de mesure  $\mathbf{F}$  définit une correspondance biunivoque entre un attracteur  $A$  et l'espace reconstruit  $\mathbf{F}(A)$ . Toute l'information sur un état  $\mathbf{X}$  est alors transférée dans le vecteur de mesure  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ . L'idée ici consiste à déplier un attracteur  $A$  suffisamment pour que ses propriétés dans l'espace reconstruit soient les mêmes que dans l'espace original. À l'aide d'une séquence temporelle contenant un nombre suffisant de points, on peut espérer reconstruire un objet  $\mathbf{F}(A)$  qui sera une copie de  $A$  dont on pourra extraire l'information dynamique (exposants de Lyapunov,

dimensions, stabilité locale, etc...).

### 1.6.2 Dimension de recouvrement

Pour s'assurer d'une correspondance biunivoque entre l'objet original et l'objet reconstruit, on doit choisir la dimension de recouvrement  $m > 2D_0$ . Cette condition a une origine géométrique et est nécessaire pour que l'objet  $\mathbf{F}(A)$  n'ait pas d'intersections avec lui-même. Évidemment, ceci est simple lorsqu'on connaît le système à l'étude, i.e. lorsque  $D_0$  est connue. C'est beaucoup moins évident dans le cas expérimental où il n'est même pas certain qu'on ait affaire à un processus dynamique de dimension peu élevée. On doit alors s'en remettre à une analyse dite de faux voisins. Il s'agit d'établir la position de points de références dans un espace reconstruit dans  $m$  dimensions et d'identifier les points voisins de ceux-ci dans un certain voisinage de rayon  $\epsilon$ . Si, dans un espace à  $m + 1$  dimensions, un point voisin s'éloigne d'un certain seuil de tolérance, alors il est considéré comme un faux voisin. La dimension de recouvrement est jugée suffisamment grande quand une certaine fraction (évidemment faible) de faux voisins est atteinte. La technique a été introduite par Kennel *et al.* [28] (aussi dans [37]). On trouvera une implémentation efficace dans [19] et une discussion sur l'influence du bruit dans [50].

### 1.6.3 Délai temporel

Il est possible de définir plusieurs variables à partir d'une séquence temporelle unidimensionnelle dans le but de reconstruire l'objet  $\mathbf{F}(A)$ . Ces nouvelles variables sont les coordonnées à délai et prennent la forme de  $Y_i(t), Y_i(t+\tau), Y_i(t+2\tau), \dots, Y_i(t+(m-1)\tau)$ ,

où  $i$  renvoie à la composante du vecteur choisie. Le choix du délai est important et la séquence temporelle originale est porteuse de l'information quant à son choix. Un bon point de repère, largement utilisé, est le premier zéro de la fonction d'autocorrélation.

$$F(\tau, i) = \sum_{t=0}^{N-\tau} (Y_i(t) - \langle Y_i \rangle)(Y_i(t + \tau) - \langle Y_i \rangle) \quad (1.41)$$

Ceci permet d'obtenir des variables qui sont suffisamment différentes les unes des autres tout en n'étant pas complètement indépendantes. On peut aussi utiliser l'approche de Fraser et Swinney [9], qui utilise le concept d'information mutuelle moyenne issu de la théorie de l'information de Shannon

$$I(\tau) = \sum_{Y(t), Y(t+\tau)} P(Y(t), Y(t+\tau)) \log_2 \left[ \frac{P(Y(t), Y(t+\tau))}{P(Y(t))P(Y(t+\tau))} \right]. \quad (1.42)$$

Dans cette expression,  $P(X)$  est une probabilité et  $P(X, Y)$  une probabilité conjointe, toutes deux déterminées à partir d'une discrétisation de la séquence temporelle. L'idée est de mesurer l'indépendance générale de deux variables. Fraser et Swinney suggèrent de choisir le délai correspondant au premier minimum de la courbe d'information mutuelle moyenne de la séquence (1.42). En général, ces deux méthodes donnent des résultats semblables. Ce n'est évidemment pas une garantie que le choix est correct ; en fait, les paramètres de reconstruction sont optimaux relativement à l'usage souhaité [16, 26, 61]. La reconstruction est différente, par exemple, si c'est la réduction du bruit qui est souhaitée.

#### 1.6.4 Le cas de Rössler

Notre but ici est de développer un contrôleur qui n'utilisera que la variable  $x$  du système de Rössler pour calculer la perturbation nécessaire à la stabilisation de l'orbite de période

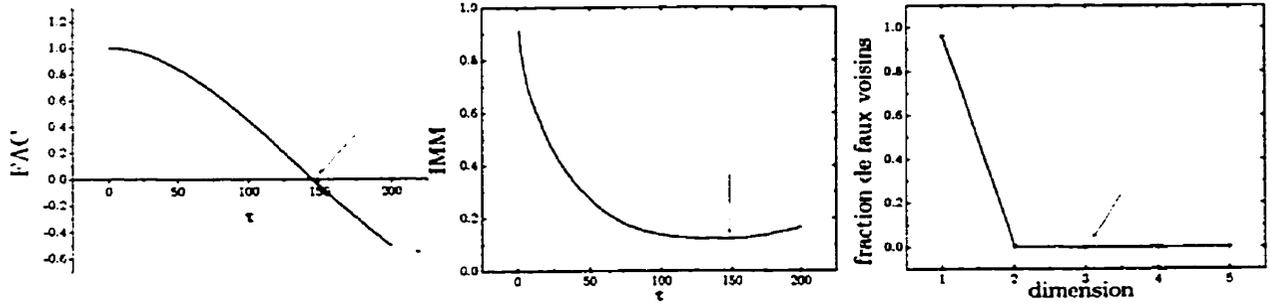


FIG. 1.8 - Paramètres de reconstruction de Rössler. (gauche) Fonction d'auto-corrélation. (milieu) Information mutuelle moyenne. (droite) Faux voisins. La séquence test contenait 60000 points échantillonnés à tous les 0.01 unités de temps. Un délai de 150 correspond donc à un temps de  $\tau = 1.5$  (sans dimension). Les routines algorithmiques proviennent de [19].

1. Le premier zéro de la fonction d'autocorrélation indique qu'un délai de 1.5 est adéquat (FIG. 1.8). L'information mutuelle moyenne corrobore ce résultat. La dimension de recouvrement a été fixée à  $m = 3$ , comme le prescrit le test de faux voisins. Ceci n'est pas une surprise car l'attracteur original *vit* dans un espace à 3 dimensions. Les coordonnées du système seront donc  $x_1 = x(t)$ ,  $x_2 = x(t - 1.5)$  et  $x_3 = x(t - 3)$ . Sur la surface de Poincaré définie par

$$\Sigma = \{x_1 = 2, \dot{x}_1 > 0\} \quad (1.43)$$

on trouve la position du PF ( $x_{2F} = -7.045 \pm 0.001$ ,  $x_{3F} = -2.429 \pm 0.001$ ). Un contrôle de type OPF a été réussi avec la variable  $x_2$ . Le  $k$  estimé dans l'espace reconstruit vaut -1.6. De même, le contrôle OGY fonctionne dans l'espace reconstruit avec la linéarisation suivante autour du PF

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2.41 & -0.072 \\ -0.31 & -0.011 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Le vecteur de sensibilité du PF sous perturbation a été calculé pour  $\delta p = 0.005$  et vaut ici

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1.09 \\ -0.00196 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Comme  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{g}$  sont connus, le contrôle de type MED (section 1.3) est aussi possible. Il a été réalisé et les résultats, dans un scénario sans bruit, sont montrés à la figure 1.9. On

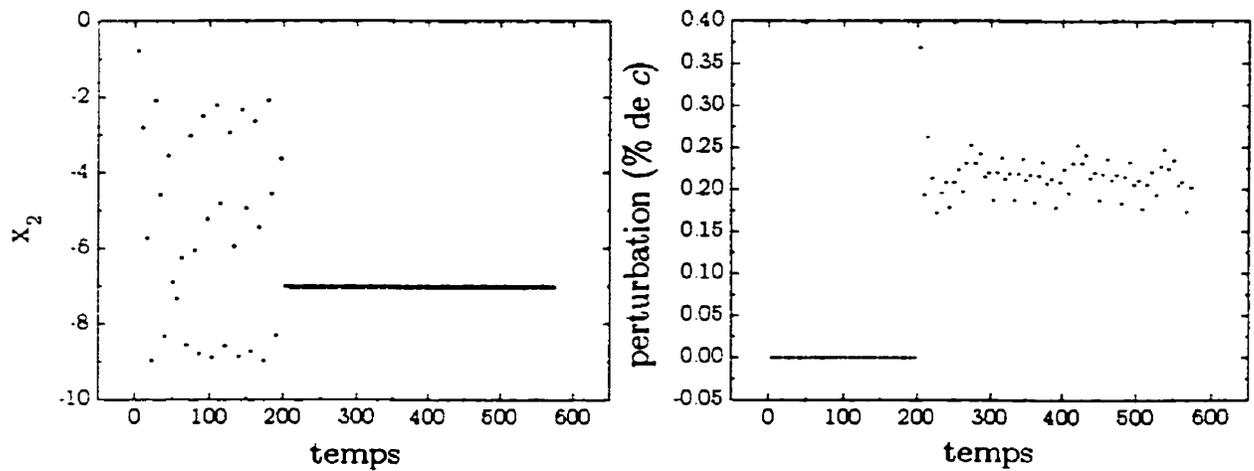


FIG. 1.9 – Contrôle MED dans l'espace reconstruit. (gauche) Le contrôle est établi à  $t = 200$  environ. (droite) La perturbation requise à la stabilisation.

note tout de suite que la perturbation requise ( $\langle \delta c/c \rangle = 0.218\%$ ), bien que minime, est plus grande de deux ordres de grandeur environ que son équivalent de l'espace réel. En effet, les cas non bruités de OPF et OGY nécessitaient une perturbation autour de  $10^{-3}\%$ . Une cause possible et très probable est que la matrice jacobienne soit empreinte d'erreur dû à la piètre précision de la surface de Poincaré. Dans le cas de l'espace physique, la section était obtenue précisément grâce à une intégration à pas infimes. Ici, pour respecter le paradigme expérimental, seule une interpolation linéaire sert à déterminer les croisements à la surface. L'erreur sur les coordonnées est plus importante et il s'en

suit que l'estimation de  $J$  est moins bonne. L'état instantané du système, qui entre dans le calcul de la perturbation, est aussi affecté par ce vice. Les techniques OGY ( $\langle \delta c/c \rangle = 0.213\%$ ) et OPF ( $\langle \delta c/c \rangle = 0.179\%$ ) subissent aussi le phénomène. La méthode OPF est moins sensible parce qu'elle ne nécessite pas de linéarisation. Quoiqu'il en soit, le contrôle est établi dans l'espace reconstruit et cela constitue un atout majeur pour les expérimentateurs. C'est en quelque sorte une preuve tangible que l'objet reconstruit reproduit bien les qualités dynamiques de son alter ego physique.

## 1.7 Contrôle de Rössler avec les maxima de $z$

Pour compléter l'exploration du contrôle chez Rössler, la stabilisation de l'orbite de période 1 a été tentée en utilisant comme unique variable les maxima de  $z$ . Ceci revient à recueillir l'ensemble

$$\Sigma = \{z : \dot{z} = 0, \ddot{z} < 0\}. \quad (1.46)$$

L'application des  $z_{n+1}$  vs  $z_n$  (dite application de Lorenz) tirée de cet ensemble est tout ce qu'il y a de plus unidimensionnel (FIG. 1.10), ce qui laisse croire qu'un contrôle de type OPF serait tout approprié. Le calcul de la sensibilité se fait facilement ( $k = -2$ ) mais l'orbite échappe rapidement au contrôle. En fait, on assiste à une dérive relativement lente de la variable puis le contrôle est perdu tout à fait. Même en balayant une large plage de valeurs de  $k$ , la stabilisation ne dure jamais très longtemps, ce qui exclut une erreur possible sur la détermination de  $k$ . Quelque chose, de toute évidence, ne va pas. Or, Petrov *et al.* [43] s'étaient plaints de ne pouvoir contrôler par OPF un système présentant une belle application unidimensionnelle. Rollins *et al.* [53] ont réglé leur problème, et le nôtre, en introduisant le contrôle RPF.

### 1.7.1 Résultats—Contrôle RPF

La technique de la section 1.4 a été appliquée ici en ne tenant compte que de l'influence de la perturbation précédente. Cette influence est évidente à la figure 1.10. Les quantités estimées  $k_u = -3.46$  et  $k_b = 1.52$ , de même que la pente  $u = -2.42$  de l'application réussissent à stabiliser l'orbite. La figure 1.10 montre les résultats. On y voit un test démontrant l'importance de la perturbation précédente sur le calcul de la rétroaction : le contrôle par RPF est obtenu puis l'influence de  $\delta p_{n-1}$  est ignorée, ce qui équivaut à un contrôle OPF. La stabilisation est perdue très rapidement. Le contrôle avec les  $z_{max}$  est donc plus sensible qu'avec  $x$  et  $y$ . Dans ces derniers cas, l'influence des perturbations précédentes ne réussit pas à miner la performance de l'OPF. Il est intéressant de savoir que le contrôle du chaos peut s'effectuer même avec une information instantanée minimale de l'état du système. Cela demande seulement un peu plus de travail.

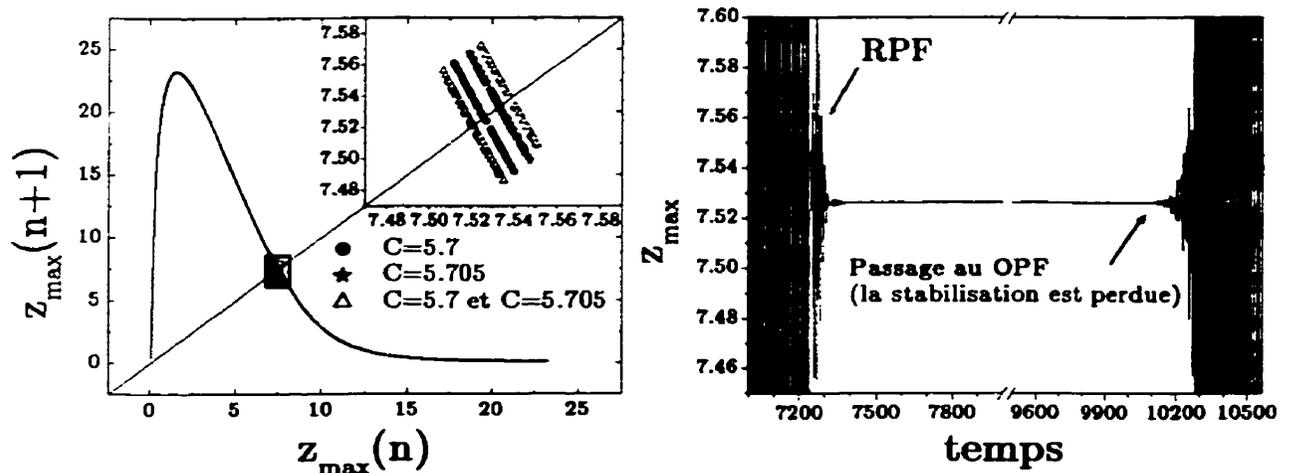


FIG. 1.10 – Contrôle avec les maxima de  $z$ . (gauche) L'application de premier retour des  $z_{max}$  avec agrandissement autour du PF. (droite) Contrôle RPF activé puis passage à un contrôle de type OPF.

## 1.8 Contrôle d'orbites d'ordre supérieur

Jusqu'à maintenant, seule l'orbite instable de période 1 a été contrôlée. Or, la beauté d'un système chaotique réside dans la richesse des comportements possibles. En effet, de nombreuses orbites cohabitent sur l'attracteur pour des valeurs paramétriques données. Le dynamiqueien peut changer à loisir le mode d'oscillation du système à l'aide du contrôle. La démonstration en est faite ici avec un contrôle de type OPF dans l'espace des variables réelles. La figure 1.11 montre ce genre d'exercice. Le tableau 1.2 résume les coordonnées et les paramètres de contrôle utilisés pour ce scénario.

	$y_F$	$k$
$P1$	-8.55798	-1.6
$P3$	-4.08215	-0.66
$P4$	-7.88037	-1.4

TAB. 1.2 – Données pour le scénario de contrôle.



## 1.9 Stabilisation dynamique

Il peut être intéressant de maintenir le contrôle tout en variant un paramètre. Il faut, dans ce cas, ajuster les quantités nécessaires au calcul de la perturbation. En effet, comme le paramètre est changé, ainsi en sera-t-il de la position d'un point fixe par exemple. Schwartz et Triandaf [65] ont jeté les bases de la théorie de la stabilisation dynamique (*tracking*), que nous proposons d'explorer dans cette section. Un article paru en 1997 [64], faisant une bonne revue de la question, servira de base aux expériences numériques. L'espace des phases sera reconstruit à partir de la variable  $x$  de Rössler. La surface de Poincaré et les paramètres de reconstruction sont les mêmes que précédemment ( $\tau = 1.5, m = 3$ ).

La théorie de la stabilisation dynamique se base sur l'existence d'une courbe de points fixes  $X_F(p)$  dans l'espace paramétrique d'un système. L'idée est de se rapprocher le plus possible de cette courbe en ajustant la position d'un PF. Tout d'abord, nous obtenons précisément la position de deux PFs par récurrence. Ces deux points, correspondant à des valeurs paramétriques rapprochées ( $c = 5.7$  et  $c = 5.705$  ici), serviront de départ pour des étapes successives de prédiction et de correction.

À toutes les 1000 unités de temps, nous augmentons/diminuons le paramètre  $p$  ( $c$  chez Rössler) de 0.005. Nous faisons alors une projection linéaire de la valeur du point fixe

$$X_{F_{n+1}} = X_{F_n} + \left( \frac{dX_F}{dp} \right)_{X_n} \Delta p. \quad (1.47)$$

Parce que nous évaluons la dérivée comme  $(X_{F_n} - X_{F_{n-1}})/\Delta p$ , on estime que  $X_{F_{n+1}} = 2X_{F_n} - X_{F_{n-1}}$ . Cette projection ne sera pas nécessairement sur la courbe des points fixes et elle demande une correction. Schwartz *et al.* [64] ont démontré que la perturbation

moyenne à appliquer pour garder le contrôle est un indice de l'éloignement à cette courbe. Intuitivement, ceci est raisonnable. Aussi, la prédiction sera corrigée comme

$$X_{F_{corr}} = X_F - \frac{dX_F}{dp} \langle p \rangle \quad (1.48)$$

où  $\langle p \rangle$  est la perturbation moyenne que nous calculons sur les 10 derniers itérés. Durant les 1000 unités de temps suivantes, le PF relaxe vers sa valeur optimale. La figure 1.12 montre une telle relaxation. Le temps de relaxation peut être réduit; en fait, il a été déterminé tout à fait arbitrairement et nous aurions pu demander à l'algorithme d'augmenter/diminuer  $c$  dès que  $\langle p \rangle$  devenait suffisamment petit.

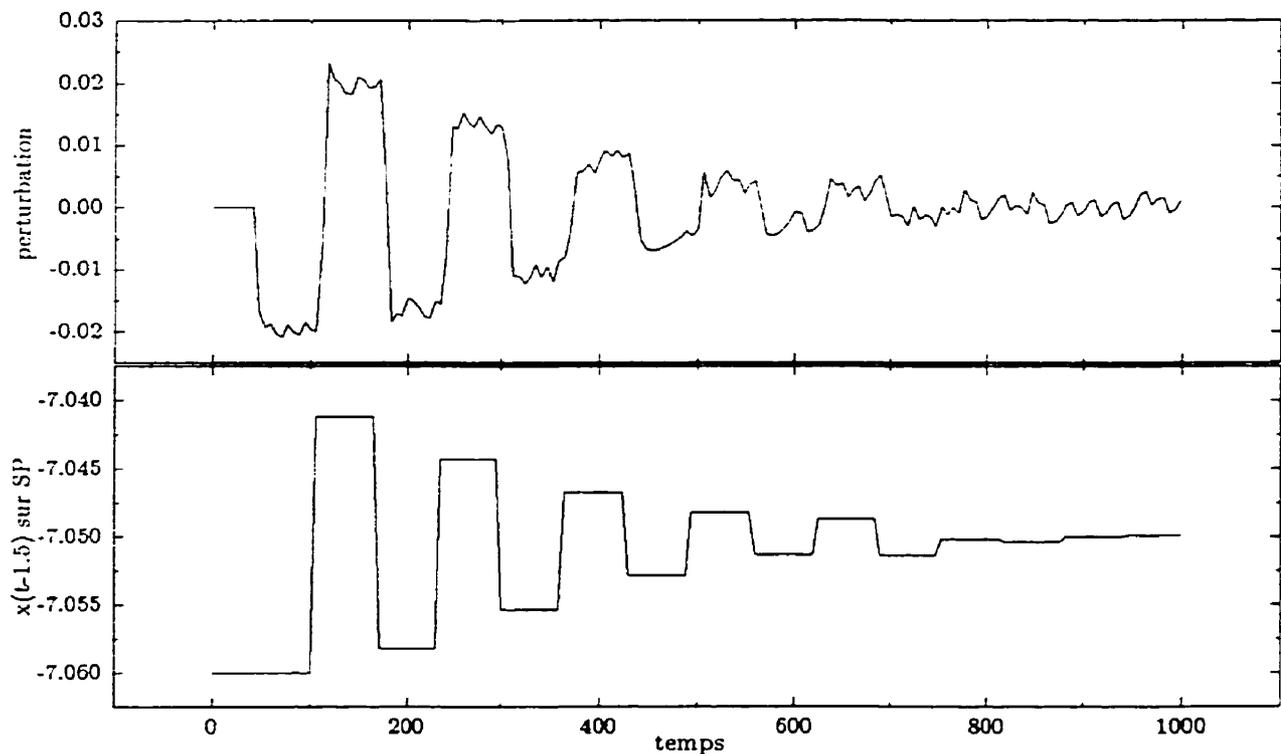


FIG. 1.12 - **Relaxation vers un point fixe.** Le temps de relaxation est assez long ici, pour éviter de brusquer le système et de perdre le contrôle.

La figure 1.13 montre l'orbite stabilisée dans le diagramme de bifurcation. Notons que ce diagramme de même que la stabilisation se fait dans un espace reconstruit à partir de la variable  $x$  de Rössler. Le diagramme a été construit en accumulant les valeurs de  $x_2$  à la SP (1.43) pour plusieurs valeurs du paramètre  $c$ . Les premiers points sont retranchés pour éliminer la période transitoire et 100 points par tranche de paramètre sont utilisés pour tracer le diagramme. Le point de départ a été la valeur de paramètre  $c = 5.7$ . Puis, la trajectoire a été stabilisée de part et d'autre. Vers les valeurs plus grandes, aucun problème n'a été rencontré jusqu'à  $c = 8.3757$  où nous avons mis fin volontairement à l'essai. Vers les valeurs plus petites, le contrôle est perdu autour de  $c = 5.3$ . Ceci s'explique par le fait que les paramètres de contrôle (de type MED ici) ne sont pas valables sur toute l'étendue balayée. Bien que la position du PF soit constamment remise jour, il n'en est pas de même pour le vecteur  $\mathbf{g}$  ni pour la matrice jacobienne nécessaires au contrôle. Pour s'assurer que l'orbite suivie est bien réelle, nous avons comparé le PF à  $c = 7.5$  de la stabilisation dynamique avec celui trouvé par récurrence pour la même valeur de paramètre et avons trouvé la concordance recherchée ( $x(t - 1.5) = x_2 \cong -8.89$  dans les deux cas). La caractéristique la plus utile de la stabilisation est sans doute le maintien du contrôle dans les régions paramétriques où la dynamique est stable. Ainsi, il est possible de passer allègrement à travers une région de stabilité de période 4 sans que la trajectoire  $y$  soit attirée. Il est intéressant de noter que la stabilisation dynamique est effectuée ici dans des conditions hostiles : espace reconstruit et contrôle MED. Le même procédé avec un contrôle plus simple (OPF) et dans l'espace réel devrait donc être plus facile. Il est même possible de penser à un mécanisme qui corrigerait le PF et le paramètre de contrôle  $k$ , ce qui permettrait une stabilisation dynamique couvrant une large plage.

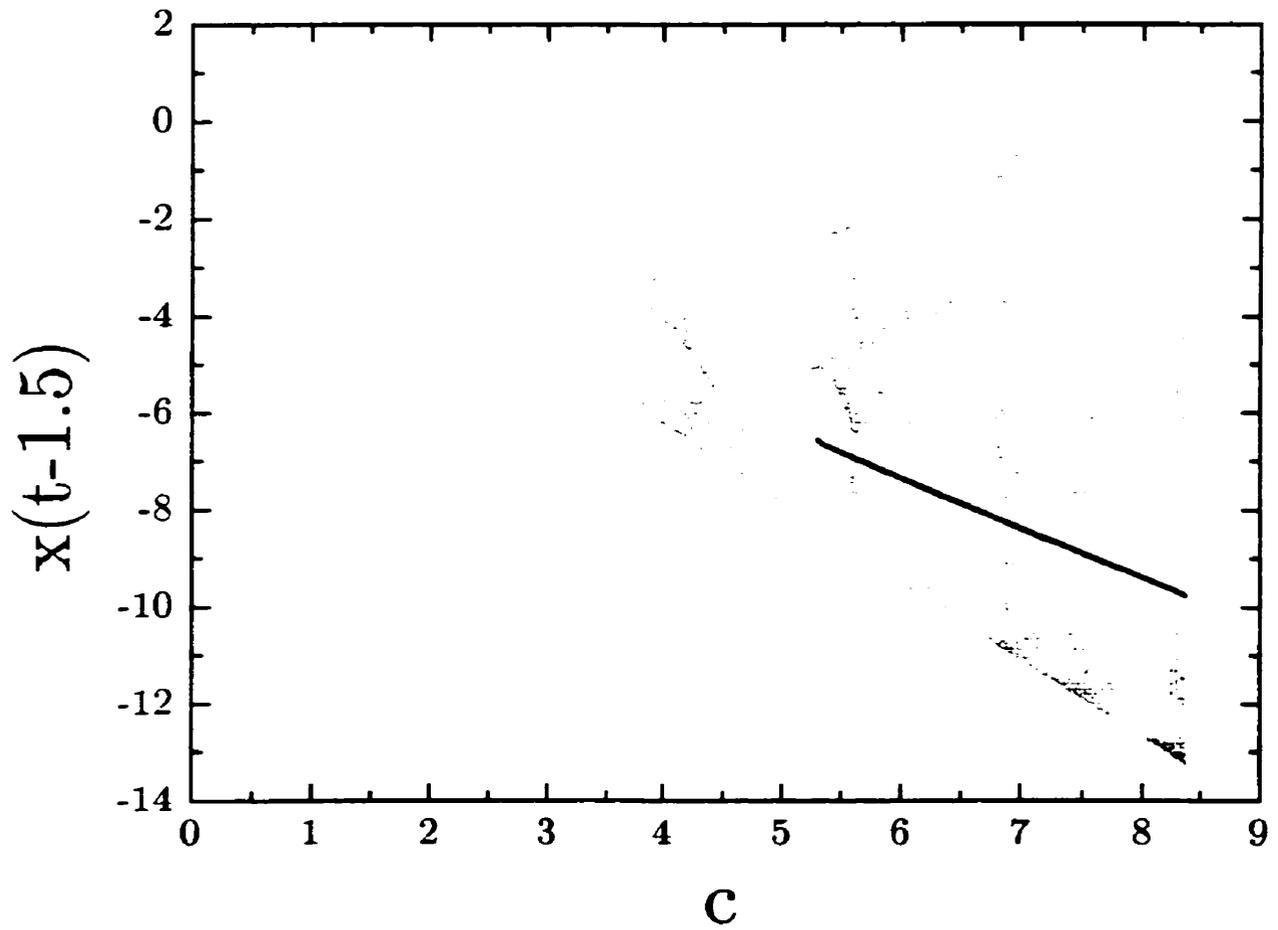


FIG. 1.13 – **Stabilisation dynamique de P1 chez Rössler.** Le contrôle de l'orbite P1 de Rössler est maintenu sur une large plage paramétrique avec les mêmes paramètres de contrôle.

TAB. 1.3 – Résumé des résultats obtenus chez Rössler.

Orbite	Méthode	Variable	Paramètre
P1-P3-P4	OPF	$y$	$c$ autour de 5.7
P1	OGY	$y, z$	$c$ autour de 5.7
P1	MED	(reconstr.) $x(t + \tau), x(t + 2\tau)$ $m=3$ et $\tau = 1.5$	$c$ autour de 5.7
P1	RPF	maxima de $z$	$c$ autour de 5.7
P1 (Stabilisation dynamique)	MED	(reconstr.) $x(t + \tau), x(t + 2\tau)$ $m=3$ et $\tau = 1.5$	$c$ de 5.3 à 8.3757

## 1.10 Discussion

La grande souplesse du contrôle du chaos a été démontrée au cours de ce chapitre. Le tableau 1.3 résume les différents résultats obtenus jusqu'ici. Peu importe les variables accessibles, il est possible d'établir une stratégie qui mènera à la stabilisation. Les techniques de reconstruction permettent le contrôle à partir d'une seule variable, ce qui ouvre la voie vers de multiples applications expérimentales. Aussi, la relative robustesse des méthodes face au bruit prouve qu'il est possible et même souhaitable de déborder du cadre numérique. C'est ce qui sera fait au chapitre 4, qui explore le contrôle du chaos dans les systèmes réels. Le chapitre suivant s'attaque à d'autres méthodes de contrôle moins traditionnelles.

## **Chapitre 2**

# **Contrôle du chaos : nouvelles tendances**

**Au cours des dernières années, plusieurs concepts nouveaux ayant trait à l'intelligence artificielle ont vu le jour. Ils se sont vite étendus au domaine de la dynamique non-linéaire et à celui du contrôle du chaos. Ce chapitre propose donc une revue de deux méthodes de contrôle qui sortent du cadre traditionnel : les réseaux neuronaux et l'apprentissage renforcé.**

### **2.1 Le contrôle du chaos par les réseaux neuronaux**

Récemment, Yuen et Bau ont publié un article dans la revue *Neural Networks* portant sur le contrôle de convection chaotique par réseaux neuronaux (RN) [80]. Le système à

l'étude n'est pas nouveau ; il a d'ailleurs été contrôlé dans le passé par d'autres méthodes [66, 75, 79]. Nous reverrons donc brièvement ce système en faisant le parallèle entre la théorie et l'expérience. Le contrôle standard sera revisité dans le but d'établir une base de comparaison des performances de chaque méthode. Puis, nous présenterons la procédure à suivre pour créer un RN qui sera en mesure de stabiliser un processus chaotique. Ensuite, la robustesse du contrôle par RN sera testée par quelques simulations numériques. Enfin, les avantages et inconvénients de cette nouvelle méthode seront énumérés.

### 2.1.1 La boucle de convection thermique

L'objet d'intérêt ici est un tube de verre recourbé en tore et rempli d'eau, se tenant dans le plan vertical. Il est chauffé uniformément sur sa moitié inférieure et est refroidi de la même façon sur sa moitié supérieure. La dynamique du fluide à l'intérieur du tube a été largement étudiée dans le passé [75] et elle peut se résumer aux équations suivantes

$$\dot{x} = P(y - x) \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = -xz - y \quad (2.2)$$

$$\dot{z} = xy - z + W_1 Ra. \quad (2.3)$$

Ici,  $y$  et  $z$  sont respectivement proportionnels aux différences de température entre les position 3 et 9 heures et 6 et 12 heures sur la boucle. Le terme  $W_1$  est quant à lui le seul coefficient survivant d'un développement en série de Fourier de la température de la paroi du tube qui a mené aux équations (2.1-2.3). Celles-ci, avec  $W_1 = -1$ , sont équivalentes aux équations développées par Lorenz en 1963 [33] pour modéliser des rouleaux de convection atmosphérique. Les paramètres  $P$  et  $Ra$  sont respectivement les nombres de Prandtl et de Rayleigh. Pour le présent système, on estime que  $P = 4$ . Les solutions de ces

équations, qui dépendent de la valeur des paramètres, sont variées ; on retrouve des états immobiles ( $x = y = 0, z = -Ra$ ), stationnaires ( $x = y = \pm\sqrt{Ra-1}, z = -1$ ), chaotiques et périodiques. Dans ce qui suit, on s'intéressera aux solutions stationnaires i.e. au cas où le fluide tourne à vitesse constante dans le tube dans le sens horaire ( $B_-$ ) et antihoraire ( $B_+$ ). On désire plus particulièrement obtenir ces états dans des régions paramétriques où les solutions *non-contrôlées* sont chaotiques. Les solutions stationnaires sont stables dans la région  $1 < Ra < P(P+4)/(P-2) = 16$ . Au-delà de cette limite, la stabilité est perdue à travers une bifurcation de Hopf sous-critique [71].

### 2.1.2 Contrôle—méthode linéaire

Le contrôle du comportement irrégulier du fluide passe ici par le calcul d'une rétroaction en réponse à l'état actuel du système. Physiquement, il s'agit de varier, selon une certaine loi de contrôle, la température de la paroi du tube. Ceci est fait directement en ajustant la puissance de l'appareil servant à chauffer le bas du tube. Dans le modèle mathématique, on dictera la température de la paroi par l'entremise de

$$W_1 = -1 - \frac{K}{Ra}(y(t) - y_D). \quad (2.4)$$

Donc, il s'agit simplement d'augmenter ou de diminuer le chauffage proportionnellement à l'écart existant entre l'état actuel du système  $y(t)$  et l'état désiré  $y_D$ . Ce type de contrôle linéaire est quelque peu différent dans son essence de celui développé par Ott, Grebogi et Yorke [36]. En effet, ces derniers misent beaucoup sur l'utilisation de la dynamique intrinsèque du système pour stabiliser un état. La perturbation appliquée est très fine et le système dans son intégrité n'est pas changé. Ici, au contraire, il faut composer avec un

nouveau système augmenté, l'équation (2.3) devenant

$$\dot{z} = xy - z - \underbrace{Ra - K(y - y_D)}_{Ra_{eff}}. \quad (2.5)$$

La solution  $B_+$  est la même pour ce système augmenté, sauf qu'il est maintenant possible d'altérer la stabilité à l'aide de  $K$ . Il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de  $K$  pour lesquelles la solution est stable au-delà de  $Ra = 16$ , i.e. dans la région chaotique. La figure 2.1 montre les résultats d'une analyse de stabilité pour le nouveau système (voir [75]). La partie ombragée correspond aux combinaisons possibles de  $Ra$  et de  $K$  qui stabilisent  $B_+$ . La courbe supérieure, définissant les points de bifurcation, est donnée par

$$Ra(P, K) = 1 + \left( \frac{[(P^2 - 4)(P + 1) + K^2]^{\frac{1}{2}} - K}{P - 2} \right)^2. \quad (2.6)$$

Sans entrer dans les détails, mentionnons que d'autres parties de l'espace paramétrique de la figure 2.1 sont associées à d'autres comportements (immobilité, mouvement périodique, chaos). Pour vérifier si effectivement il est possible de stabiliser la solution  $B_+$  pour des valeurs de  $Ra > 16$ , quelques tests numériques ont été effectués. Dans le but d'obtenir une simulation plus près de la réalité, du bruit a été ajouté au système. L'équation (2.2) devient

$$\dot{y} = -xz - y + \xi \quad (2.7)$$

où  $\xi$  est un nombre aléatoire situé entre -1 et +1 avec une probabilité uniforme. Il est tiré à chaque pas d'intégration. Celle-ci est effectuée avec un intégrateur de type Runge-Kutta (voir annexe A).

La valeur  $Ra = 26$  a été utilisée, ce qui correspond à une solution  $B_+$  instable où  $y_F = 5$ . Le contrôleur linéaire mesure en temps réel l'écart à l'état désiré ( $y_D = 5$ ) et corrige le  $Ra_{eff}$  selon l'équation (2.5). Pour ajouter au réalisme, la correction n'est pas appliquée si

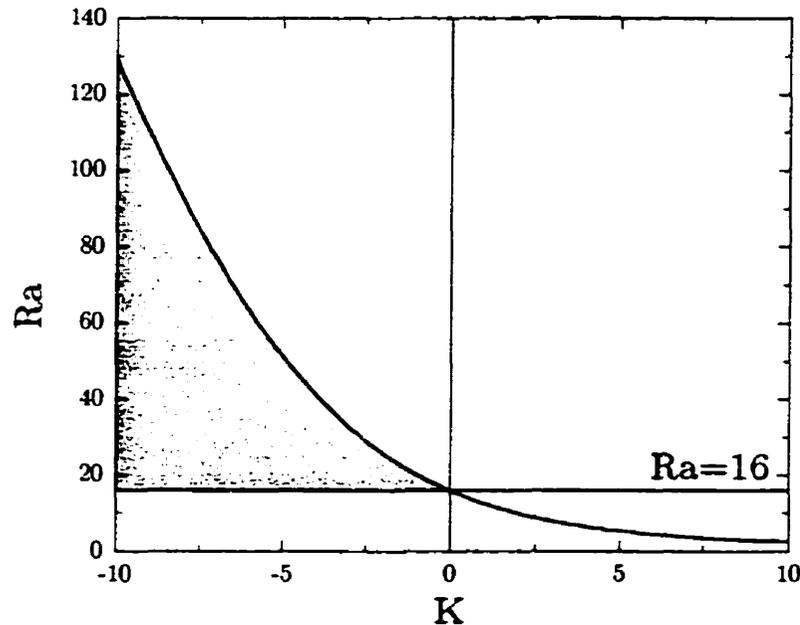


FIG. 2.1 – **Analyse de stabilité du système augmenté.** La région ombragée engendre des solutions stables.

elle dépasse 50% de la valeur de  $Ra$ , soit 13 ici. Ceci rend compte du fait qu'il est en réalité impossible de changer instantanément la température de la paroi. La figure 2.2 montre un contrôle réussi. La perturbation ne dépasse jamais  $\pm 13$ , comme prescrit. Cette valeur pourrait être abaissée davantage mais il faudrait alors attendre plus longtemps pour obtenir le contrôle. Il est intéressant de noter que la perturbation requise devient très faible lorsque le système est sous contrôle.

### Système réel

Wang *et al.* [75] ont réussi à stabiliser le flot dans la boucle de convection de façon expérimentale avec le contrôle linéaire. Pour bien comprendre pourquoi le mouvement

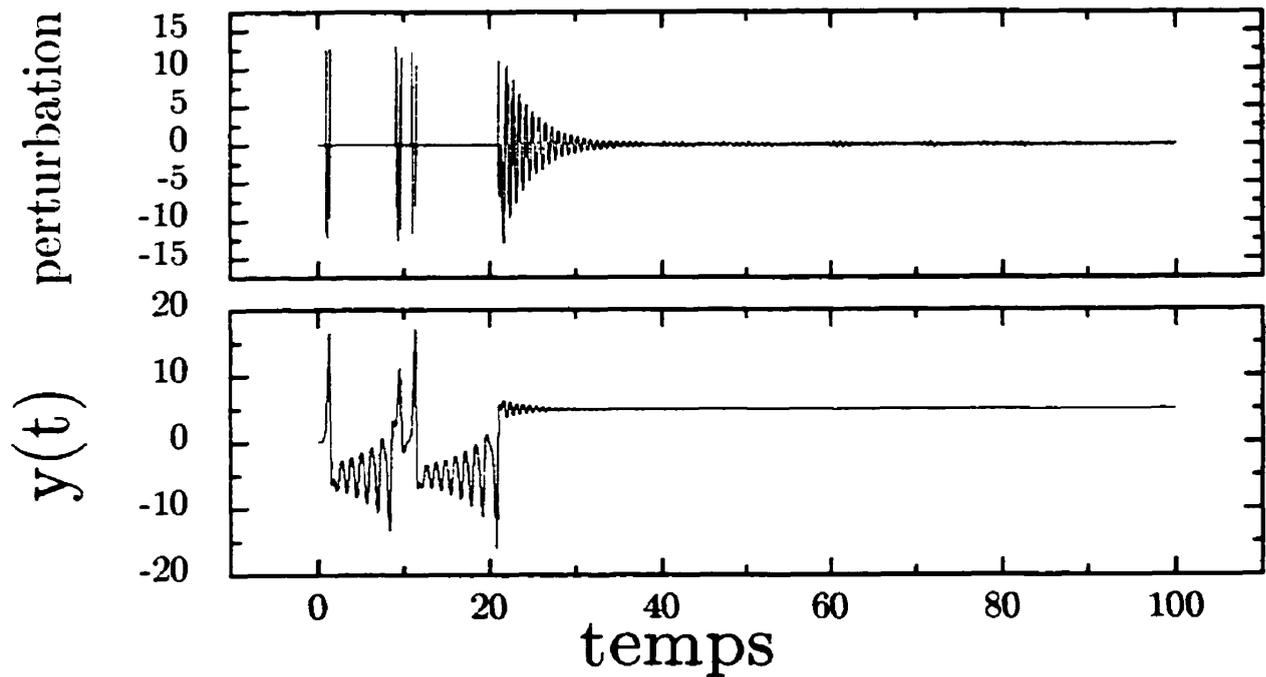


FIG. 2.2 – **Contrôle linéaire de la boucle de convection.** Après quelques tentatives infructueuses, le contrôle est établi vers  $t = 20$ .

du liquide est chaotique dans la boucle, imaginons une petite perturbation venant ralentir le fluide qui tournait alors de façon constante. Ce petit ralentissement fait en sorte que le liquide passe plus de temps dans la section chauffante/refroidissante, gagne/perd alors plus/moins de chaleur et émerge de la partie chauffante/refroidissante avec une température plus/moins élevée que d'habitude. L'eau sortant du refroidisseur a donc une masse volumique plus grande et tombera plus vite vers le bas. De la même façon, l'eau plus chaude montera plus vite ce qui, globalement, cause une augmentation de la vitesse du fluide. Le processus décrit ici se renverse alors et le comportement global est fait d'oscillations. Sous certaines conditions, ces oscillations s'amplifient et causent le comportement chaotique observé. Le rôle du contrôleur ici est de détecter l'apparition des

petites perturbations et d'en contrer l'effet en temps réel. Dans l'expérience, la variable d'intérêt est l'écart en température entre les positions 3 et 9 heures sur la boucle.

### 2.1.3 Contrôle—réseaux neuronaux

Maintenant que le contrôle linéaire est connu, voyons comment un réseau de neurones peut aider à stabiliser le même système<sup>1</sup>. L'utilisation de ces objets mathématiques en repousse plus d'un; le principal reproche fait aux RN est qu'ils incorporent très peu de physique quand il s'agit de modéliser ou de contrôler. Pourtant, cette faiblesse peut très bien être un avantage, surtout dans le cas de systèmes dynamiques où aucun modèle n'est disponible. Ici, nous nous accommoderons du caractère *boîte noire* de la démarche tout en essayant d'en tirer profit le plus possible.

Nous nous sommes intéressés à un réseau simple constitué d'une seule entrée, de 10 neurones cachés et d'une seule sortie. La figure 2.3 montre l'ensemble du système contrôlé. La quantité  $u$  calculée à la sortie du réseau vient dicter la température des parois par l'entremise de

$$W_1 = -\frac{u}{Ra} \quad (2.8)$$

Aussi, durant l'entraînement du réseau,  $Ra$  n'intervient pas. Le réseau apprendra implicitement qu'une valeur de sortie désirée ( $y_D$ ) correspond au point fixe d'une valeur spécifique de  $Ra$  et convergera naturellement vers celle-ci. Les neurones cachés trans-

---

<sup>1</sup>Le lecteur intéressé pourra consulter [18] ou tout autre livre pour connaître la base du vocabulaire et du fonctionnement général des réseaux neuronaux.

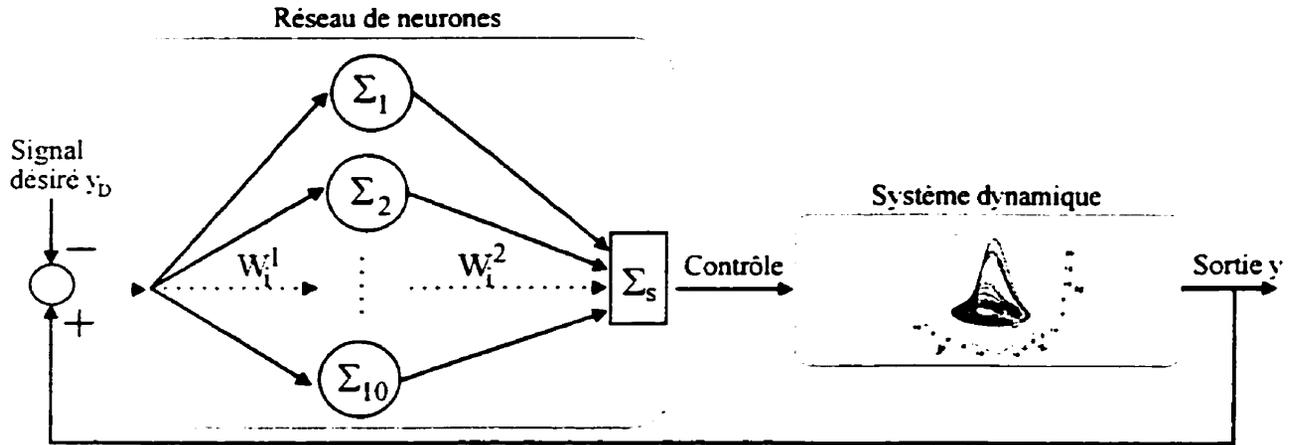


FIG. 2.3 – Description schématique du contrôle par réseau de neurones.

mettent leur signal à travers la fonction d'activation sigmoïdale

$$f(v) = \frac{1}{1 + e^{-v}} \quad (2.9)$$

tandis que le neurone de sortie génère le signal de contrôle par la fonction identité  $f(v) = v$ . Ce choix est arbitraire quoique la fonction sigmoïdale mime un comportement des neurones biologiques en rapport avec le taux de décharge. D'un point de vue plus pragmatique, cette fonction est continue, lisse et dérivable. Ceci sera utile quand viendra le temps d'implémenter l'algorithme d'apprentissage par propagation inverse (*Back Propagation Algorithm*). Mathématiquement, le contrôle calculé est

$$u = b_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{10} w_i^{(2)} f(v_i) \quad (2.10)$$

avec  $v_i = b_i^{(1)} + w_i^{(1)}(y - y_D)$ . Ici, les  $b_i$  sont les seuils propres aux neurones  $\Sigma_i$  et les  $w_i$  sont les poids synaptiques. Les suffixes réfèrent à la couche.

### Apprentissage par propagation inverse

L'entraînement du réseau consiste à ajuster les  $w_i^{(j)}$  et les  $b_i^{(j)}$  de façon à réduire la fonction d'erreur (2.18). Ceci peut être fait par la technique de descente de gradient où les poids et seuils sont ajustés proportionnellement à la grandeur du gradient dans la direction opposée à celui-ci.

$$(w_i^{(j)})_{t+1} = (w_i^{(j)})_t - \eta \left( \frac{\partial E}{\partial w_i^{(j)}} \right)_t. \quad (2.11)$$

Ici,  $\eta$  est le taux d'apprentissage. Il détermine la vitesse à laquelle l'erreur tombe sous le seuil d'acceptabilité. De façon générale, un apprentissage plus lent ( $\eta$  petit) favorise l'obtention d'une fonction de transfert où l'écart entre le maximum et le minimum est plus petit [78]. Concrètement, ceci se traduit par des perturbations plus faibles. On peut aussi ajouter le terme  $m \left( (w_i^{(j)})_t - (w_i^{(j)})_{t-1} \right)$  à l'équation (2.11). Cette quantité est la *momentum* et détermine l'effet des changements passés sur la mise à jour actuelle des poids. Il n'est pas utilisé ici ( $m = 0$ ).

La principale difficulté dans la détermination des nouveaux poids et seuils vient du calcul de la dérivée partielle. Dans le cas d'un réseau à une seule couche, le calcul est facile car l'erreur dépend explicitement des poids. Pour les réseaux multicouches, il faut procéder par dérivées en chaîne. Nous référons le lecteur à [18] pour plus de détails. Nous mentionnons simplement ici les relations d'apprentissage propres à notre réseau. La sensibilité de la couche de sortie est

$$s^{(2)} = -2(y_d - y) \quad (2.12)$$

qui est propagée dans la couche cachée

$$s_i^{(1)} = [1 - f(w_i^{(2)}y + b_i^{(1)})]f'(w_i^{(2)}y + b_i^{(1)})w_i^{(2)}s^{(2)}. \quad (2.13)$$

Par la suite, les poids et seuils sont ajustés par les relations suivantes :

$$(w_i^{(2)})_{t+1} = (w_i^{(2)})_t - \eta s^{(2)} f(y(w_i^{(1)})_t + (b_i^{(1)})_t) \quad (2.14)$$

$$(b_i^{(2)})_{t+1} = (b_i^{(2)})_t - \eta s^{(2)} \quad (2.15)$$

$$(w_i^{(1)})_{t+1} = (w_i^{(1)})_t - \eta y s_i^{(1)} \quad (2.16)$$

$$(b_i^{(1)})_{t+1} = (b_i^{(1)})_t - \eta s_i^{(1)} \quad (2.17)$$

Dans les équations précédentes, la fonction  $f$  est celle de l'équation 2.9.

Concrètement, l'entraînement débute par l'attribution au hasard des poids et seuils. La probabilité est uniforme et s'étend sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Ensuite, l'ensemble contrôleur/système d'équations est intégré pendant une époque de 15 unités de temps sans dimension. Nous utilisons les conditions initiales  $\{x = 0.1, y = 0.1, z = -0.1\}$ . À la fin de chaque époque, l'erreur

$$E(w, b) = \frac{1}{2\Omega} \sum_{i=1}^{\Omega} (y - y_D)^2 \quad (2.18)$$

est calculée. Ici,  $\Omega$  est le nombre de données recueillies pendant une époque ( $\Omega = 15/\text{pas d'intégration}$ ). Pour un système non bruité, l'erreur  $E$  peut être réduite indéfiniment. Si du bruit est présent, le réseau est dit entraîné quand l'erreur tombe en-deçà d'un certain seuil d'acceptabilité. La figure 2.4 montre un exemple d'apprentissage. Le tableau 2.1 résume les valeurs de poids et seuils obtenus à la fin de l'essai. Plusieurs tests ont été faits avec des taux d'apprentissage et des poids/seuils initiaux différents et la courbe de transfert obtenue après l'atteinte d'une erreur satisfaisante a l'allure de la figure 2.5. Avant l'entraînement, la courbe est très quelconque. En fait, on peut entraîner ce type de réseau pour imiter à peu près n'importe quelle fonction. Plus elle est complexe, plus de neurones cachés seront nécessaires. Dans notre cas, 10 neurones suffisent à l'atteinte

TAB. 2.1 – Poids et seuils obtenus,  $\eta = 0.3$ .

$w_1^{(1)}$	-7.45262	$b_i^{(1)}$	1.80416	$w_1^{(2)}$	2.70578
$w_2^{(1)}$	-10.2029	$b_2^{(1)}$	1.72614	$w_2^{(2)}$	3.06094
$w_3^{(1)}$	-1.54103	$b_3^{(1)}$	-0.740236	$w_3^{(2)}$	1.15026
$w_4^{(1)}$	-4.81865	$b_4^{(1)}$	1.40726	$w_4^{(2)}$	6.21654
$w_5^{(1)}$	2.63294	$b_5^{(1)}$	-0.480286	$w_5^{(2)}$	-2.22328
$w_6^{(1)}$	-3.06643	$b_6^{(1)}$	0.0345074	$w_6^{(2)}$	5.99174
$w_7^{(1)}$	2.44753	$b_7^{(1)}$	-0.661505	$w_7^{(2)}$	-2.299
$w_8^{(1)}$	-5.35653	$b_8^{(1)}$	0.231088	$w_8^{(2)}$	2.07538
$w_9^{(1)}$	-11.006	$b_9^{(1)}$	1.66775	$w_9^{(2)}$	4.55164
$w_{10}^{(1)}$	-2.73018	$b_{10}^{(1)}$	0.736982	$w_{10}^{(2)}$	6.37635
		$b_i^{(2)}$	5.13161		

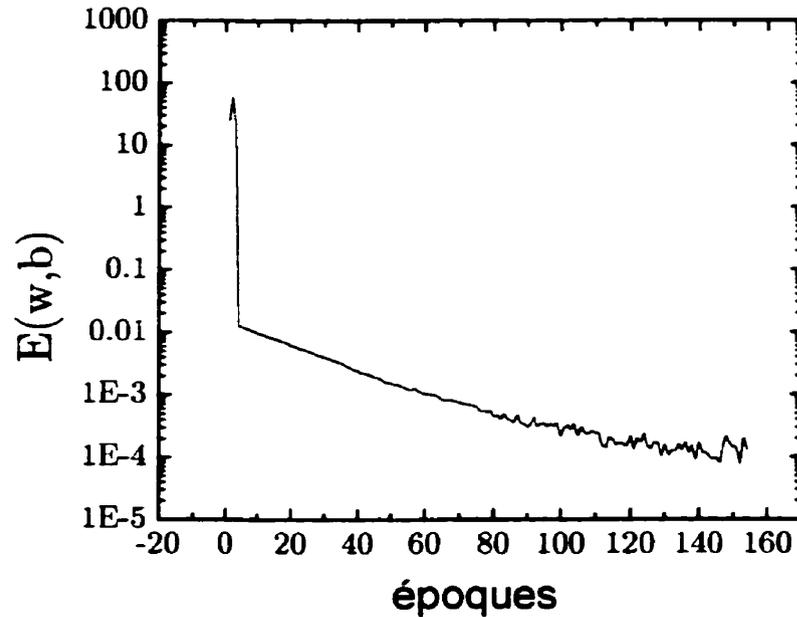


FIG. 2.4 - Diminution de l'erreur pendant l'entraînement du RN. Le réseau de neurones devient de plus en plus performant. Le bruit stoppe la progression de la performance. ( $Ra = 26$ ,  $\eta = 0.3$  et  $y_D = 5$ )

du but. La figure 2.5 montre clairement que la fonction de transfert apprise par le réseau est très semblable à la fonction qui sert au contrôle linéaire. Une analyse plus poussée du comportement du réseau (influence du taux d'apprentissage, convergence) est disponible au chapitre 6 de la thèse de doctorat de M. P.K. Yuen [78]. Mentionnons simplement qu'un taux d'apprentissage faible favorisera la convergence vers un minimum de l'erreur possiblement plus bas. Par contre, il demandera plus de données (entraînement plus long) pour y arriver.

Maintenant que le réseau est entraîné, il peut être utilisé pour stabiliser le flot dans la boucle de convection. Quelques tests concluants ont été effectués. En maintenant les conditions qui prévalaient pour le contrôle linéaire (perturbation maximale=13, bruit),

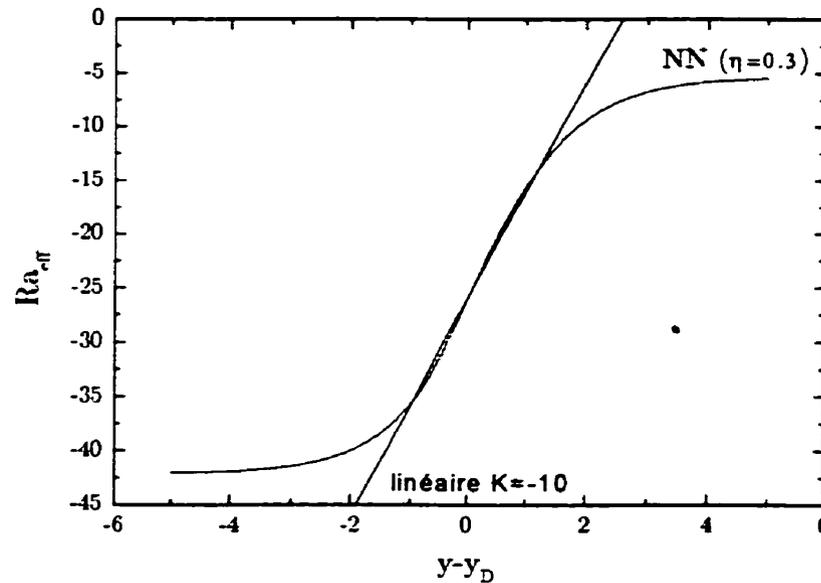


FIG. 2.5 – **Courbes de réponse comparées.** Dans la limites des petites écarts  $y - y_D$ , la perturbation calculée est la même pour le contrôleur linéaire et par RN. Ici,  $Ra = 26$  et  $y_D = 5$ .

nous obtenons des résultats très semblables. Il fallait s'y attendre, vu l'extrême ressemblance entre la réaction du contrôleur linéaire et celle du contrôleur RN (FIG. 2.5). Ici, cependant, nul besoin de spécifier le  $Ra$  d'opération car le réseau a appris par lui-même. Aussi, une fois la stabilité atteinte, le  $u$  calculé varie autour de 26, valeur de  $Ra$  correspondant à l'état stable  $y_D = 5$ . La figure 2.6 montre le contrôle obtenu. Le temps nécessaire pour atteindre le contrôle peut varier selon le réseau utilisé et les contraintes spécifiées mais n'est pas plus long, en général, que le temps requis au contrôle linéaire.

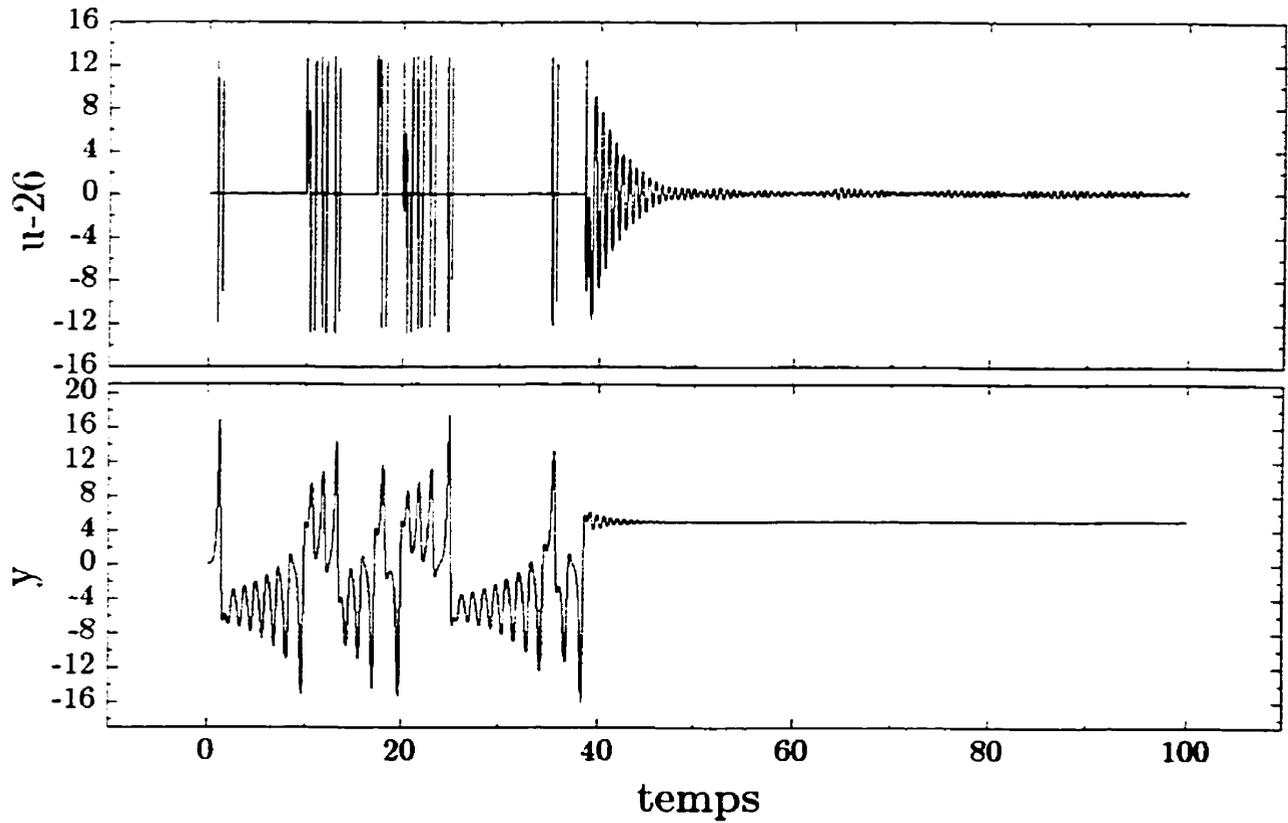


FIG. 2.6 - Contrôle du flot dans la boucle de convection par RN. Résultats très semblables au contrôleur linéaire (figure 2.2).

### 2.1.4 Discussion

Plusieurs types d'architecture de réseau peuvent être utilisés pour tenter le contrôle; couches cachées multiples, connexions récurrentes...etc. Quelques-uns d'entre eux ont été testés dans [80, 78] et il ne semble pas qu'il y ait une dépendance très forte entre le type de réseau retenu et la performance du contrôleur. La règle d'or est que l'entraînement doit être assez long pour pouvoir diminuer suffisamment l'erreur. Dans un cadre expérimental, il semble que le contrôleur par RN ait un avantage sur sa version linéaire. Le fait que l'entraînement dirige le réseau vers la valeur de  $Ra$  désirée (correspondante au  $y_D$  souhaité) peut être très utile. Si on utilise un contrôleur linéaire, il faut avoir une idée de la relation entre la quantité de chaleur  $Q$  que l'on fournit à la boucle (correspondant au  $Ra$  théorique) et la variable d'intérêt ( $\Delta T_{3-9}$ , différence de température entre la position 3 et 9 heures par exemple). Dans le cas du RN, en commençant avec un chauffage bas, le contrôleur dirige tranquillement  $Q$  vers la valeur associée à l'état de sortie désiré. Cette caractéristique vaut son pesant d'or, surtout en mécanique des fluides où une relation entre  $Q$  et  $\Delta T_{3-9}$  n'est pas connue *a priori*.

En termes de performance brute, il n'est pas vraiment possible de dire lequel des deux contrôleurs est le plus efficace. La valeur RMS des oscillations de  $y$  dans l'état stabilisé peut servir d'indicateur mais il sera à peu près toujours possible d'optimiser le contrôleur linéaire pour qu'il agisse comme le contrôleur RN dans la limite des petites perturbations (FIG. 2.5). En présence de bruit, l'erreur ne peut pas être diminuée indéfiniment. Ceci indique qu'une performance maximale doit éventuellement être atteinte. Reste à savoir si le contrôleur linéaire peut surpasser le contrôleur RN. Encore faut-il l'optimiser; or, il n'existe pas vraiment de règles d'optimisation...

Les réseaux de neurones peuvent donc être utilisés pour contrôler le chaos. Ils constituent un outil de plus dans l'arsenal du dynamiqueur quand vient le temps de s'attaquer à un système chaotique. La capacité d'apprentissage semble être un avantage, plus particulièrement dans les cas expérimentaux. Le principal désavantage est le fait qu'aucune ligne de conduite n'est disponible pour déterminer l'architecture et les paramètres d'apprentissage optimaux. Reste aussi à savoir si on peut adapter les réseaux neuronaux au contrôle de style OGY. L'idéal serait d'avoir un réseau qui détecterait les orbites périodiques instables et qui les stabiliserait par la suite.

## 2.2 Contrôle du chaos par apprentissage renforcé

L'apprentissage renforcé (*reinforcement learning*, RL) est un concept issu du domaine de l'intelligence-machine. C'est une façon de solutionner des problèmes d'optimisation et de contrôle. En fait, l'apprentissage renforcé (AR) est la combinaison de deux disciplines : la programmation dynamique et l'apprentissage supervisé. Bien que très près conceptuellement des réseaux neuronaux, l'AR demeure une approche indépendante de ceux-ci. Elle se distingue notamment par le fait qu'elle ne nécessite pas de banques de données pour l'apprentissage, comme chez les RN. Ceci en fait un outil beaucoup plus général, capable de réagir à des situations plus complexes. Une introduction à l'apprentissage renforcé est présentée dans le *Journal of Artificial Intelligence Research* [25].

De façon générale, le processus d'apprentissage consiste en l'élaboration d'une politique d'action face à une situation. L'édification de cette politique est basée sur l'interaction du système AR avec son environnement. Il s'agit ni plus ni moins d'expériences du type essai-

erreur jumelées à un système de récompenses et de punitions. L'utilisateur du système AR n'a qu'à spécifier un but et le contrôleur se chargera de l'atteindre le plus efficacement possible.

Cette approche est très intéressante dans un contexte de contrôle du chaos et elle a été exploitée par S. Gadaleta et G. Dangelmayr [10]. Le contrôleur qu'ils ont développé remplit simultanément les cinq conditions suivantes :

1. ne nécessite aucune description analytique du système ni aucune connaissance préalable de la position de points fixes ou d'orbites périodiques instables (UPOs).
2. robuste sous l'influence du bruit et de la non-stationnarité.
3. permet la stabilisation de n'importe laquelle UPO.
4. permet le ciblage (*targeting*)
5. permet un contrôle en temps réel

Ceci se traduit concrètement par des avantages certains par rapport aux méthodes traditionnelles ; contrairement à OGY [36] par exemple, il n'est pas nécessaire d'attendre d'approcher une UPO pour agir. Nul besoin d'estimer la dynamique localement ni de trouver les UPOs à partir d'une séquence temporelle. Bref, les auteurs croient que leur contrôleur peut agir comme une *boîte noire intelligente* dans des situations expérimentales.

### 2.2.1 Stratégie de contrôle

Soit un système dynamique

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n, p) \quad (2.19)$$

où  $F$  est supposée inconnue. La seule hypothèse faite est qu'il existe un paramètre accessible  $p$  dont le système dépend, du moins dans un voisinage autour de  $p_0$ . Le système doit aussi être chaotique pour  $p = p_0$ . Comme pour les méthodes traditionnelles, le contrôle est établi en appliquant de petites perturbations  $\delta p$  sur  $p$ . Celles-ci sont choisies dans un ensemble fini de valeurs discrètes :  $\delta p \in \Delta = \{\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_M\}$ . Le problème du contrôle se réduit alors à trouver une politique qui associe à chaque état  $\mathbf{X}_n$  une action  $\delta p_n$  qui fera en sorte que le but est approché efficacement.

C'est ici qu'intervient l'apprentissage renforcé. Il s'agit d'apprendre à partir de l'interaction entre un contrôleur (qui prend des décisions) et l'environnement sur lequel il agit. À chaque temps  $n = 1, 2, \dots$ , le contrôleur reçoit une représentation  $\mathbf{w}_n(\mathbf{X}_n) \in W$  de l'état du système. Ici  $W$  est l'ensemble fini de tous les états possibles. À partir de  $\mathbf{w}_n$ , le contrôleur choisit  $\delta p \in \Delta$  à partir d'une politique décisionnelle  $\pi_n(\mathbf{w}, \delta p)$  (probabilité de choisir  $\delta p_n$  si  $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}$ ) . Une récompense numérique  $r_{n+1}$  lui est accordée en fonction de la conséquence de sa décision. Concrètement, la politique décisionnelle est une table sur laquelle le contrôleur se fie pour prendre sa décision. Les entrées  $Q(\mathbf{w}, \delta p)$  de la politique

	$\delta p_1$	$\delta p_2$	...	$\delta p_M$
$\mathbf{w}_1$	$Q(\mathbf{w}_1, \delta p_1)$	$Q(\mathbf{w}_1, \delta p_2)$	...	$Q(\mathbf{w}_1, \delta p_M)$
$\mathbf{w}_2$	$Q(\mathbf{w}_2, \delta p_1)$	$Q(\mathbf{w}_2, \delta p_2)$	...	$Q(\mathbf{w}_2, \delta p_M)$
...	...	...	...	...
$\mathbf{w}_N$	$Q(\mathbf{w}_N, \delta p_1)$	$Q(\mathbf{w}_N, \delta p_2)$	...	$Q(\mathbf{w}_N, \delta p_M)$

TAB. 2.2 – Exemple d'une politique décisionnelle.

sont toutes nulles initialement. Elles sont ajustées à chaque fois qu'une décision est prise selon que le but est atteint ou non. Par exemple, pour le contrôle d'une orbite de période

1. le but est atteint si  $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n$ . Les entrées  $Q$  de la politique décisionnelle contiendront à la fin d'un entraînement l'information sur les récompenses numériques qui auront été attribuées. Nous choisissons ici les récompenses selon

$$r = \begin{cases} 0 & \text{si le but est atteint} \\ -1 & \text{si le but n'est pas atteint} \end{cases} . \quad (2.20)$$

Deux méthodes pour ajuster les  $Q(\mathbf{w}, \delta p)$  ont été implémentées<sup>2</sup>. Il s'agit de l'apprentissage de type  $Q$ , introduit par Watkins [76],

$$\Delta Q_n(\mathbf{w}_n, \delta p_n) = \beta[r_{n+1} + \gamma \max Q(\mathbf{w}_{n+1}, \delta p) - Q(\mathbf{w}_n, \delta p_n)] \quad (2.21)$$

et de l'apprentissage de type Sarsa [72],

$$\Delta Q_n(\mathbf{w}_n, \delta p_n) = \beta[r_{n+1} + \gamma Q(\mathbf{w}_{n+1}, \delta p_{n+1}) - Q(\mathbf{w}_n, \delta p_n)]. \quad (2.22)$$

Dans ces expressions, les constantes  $\beta$  et  $\gamma$  fixent le taux d'apprentissage, un peu comme  $\eta$  le faisait pour les RN. Elles prennent la valeur de 0.9 au cours de ce travail. Selon Gadaleta *et al.* [10], ce choix n'assure pas la convergence vers une politique parfaite mais permet au moins au duo système dynamique/contrôleur de s'adapter aux changements. Ceci est très utile dans des cas de stabilisation dynamique. Le terme  $\max$  renvoie à la plus grande valeur de  $Q$  pour un état  $\mathbf{w}$ .

Pour converger vers une politique efficace, il est nécessaire d'explorer tout l'espace des état-actions [25]. Ceci est accompli à l'aide d'une politique de décision complètement stochastique au départ et qui est figée en une politique déterministe avec le temps. Quand elle est complètement déterministe, la politique choisit  $\delta p$  tel que

$$\delta p(\mathbf{w}) = \max Q(\mathbf{w}, \delta p) \quad (2.23)$$

---

<sup>2</sup>La démonstration ayant mené à ces résultats déborde du cadre de ce travail et nous référons le lecteur intéressé aux publications correspondantes.

i.e. le  $\delta p$  correspondant au  $Q$  le plus élevé pour un état donné. Avant, pendant la phase d'apprentissage, il existe une probabilité  $\epsilon$  que l'action choisie ne soit pas celle correspondant à l'équation (2.23). Il s'agit de *refroidir*  $\epsilon$  de 1 à 0.

### 2.2.2 Application logistique

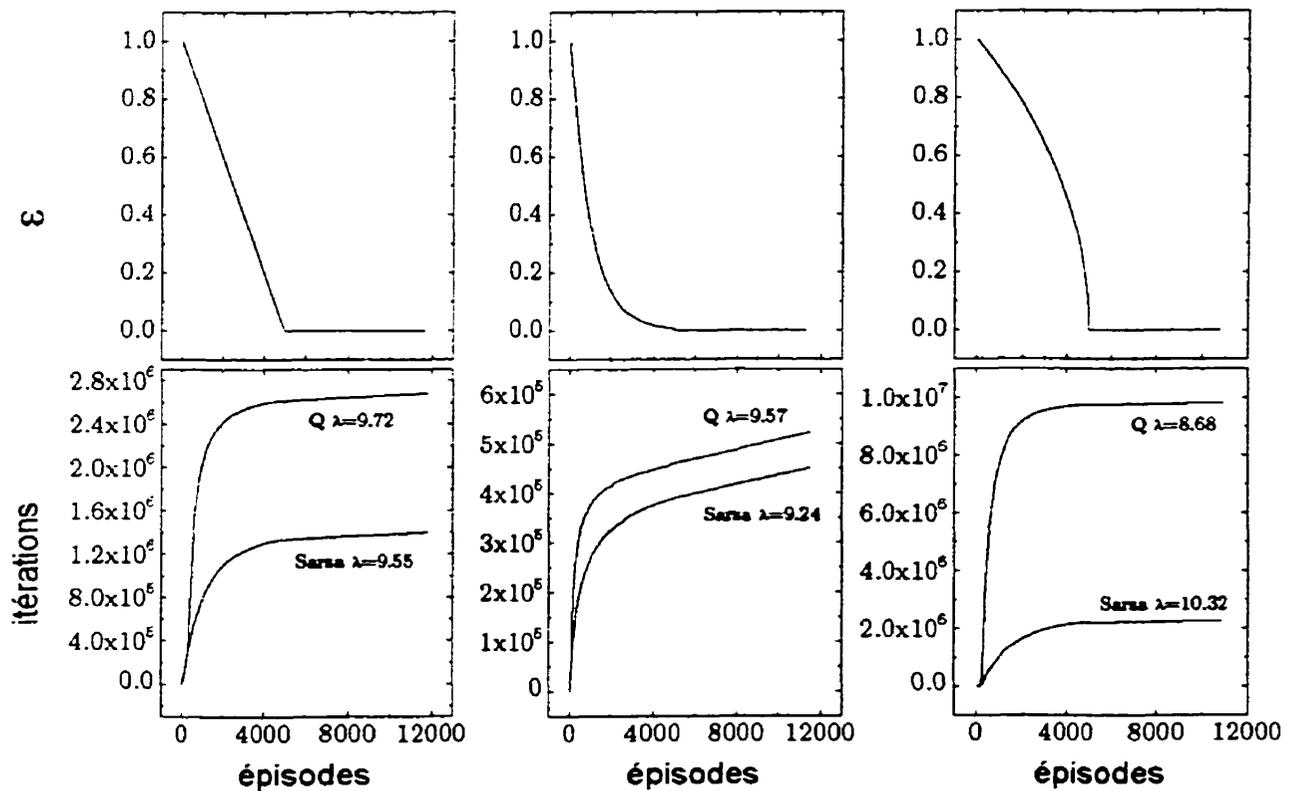


FIG. 2.7 – Différents profils de refroidissement—linéaire, exponentiel et quadratique.

Dans un premier temps, l'application logistique  $X_{n+1} = RX_n(1 - X_n)$  a été utilisée pour tester le fonctionnement de la stratégie de contrôle. Comme cette application est comprise entre 0 et 1, il est simple d'associer  $X_n$  à un état  $w_n$ . Pour un ensemble  $W =$

$\{0, 1, 2, \dots, 100\}$  contenant 101 états,  $w(X_n) = [100X_n + 0.5]$  où les crochets indique une valeur entière. Le point fixe  $X_F = 1 - \frac{1}{R} \approx 0.737$  pour  $R = 3.8$  a été stabilisé avec  $\Delta = \{-0.1, 0, 0.1\}$ . Quelques tests ont été effectués dans le but d'établir si le profil du refroidissement pouvait influencer les résultats. La figure 2.7 montre les résultats pour des refroidissements linéaire, exponentiel et quadratique. À première vue, il ne semble pas qu'il y ait une influence quelconque.

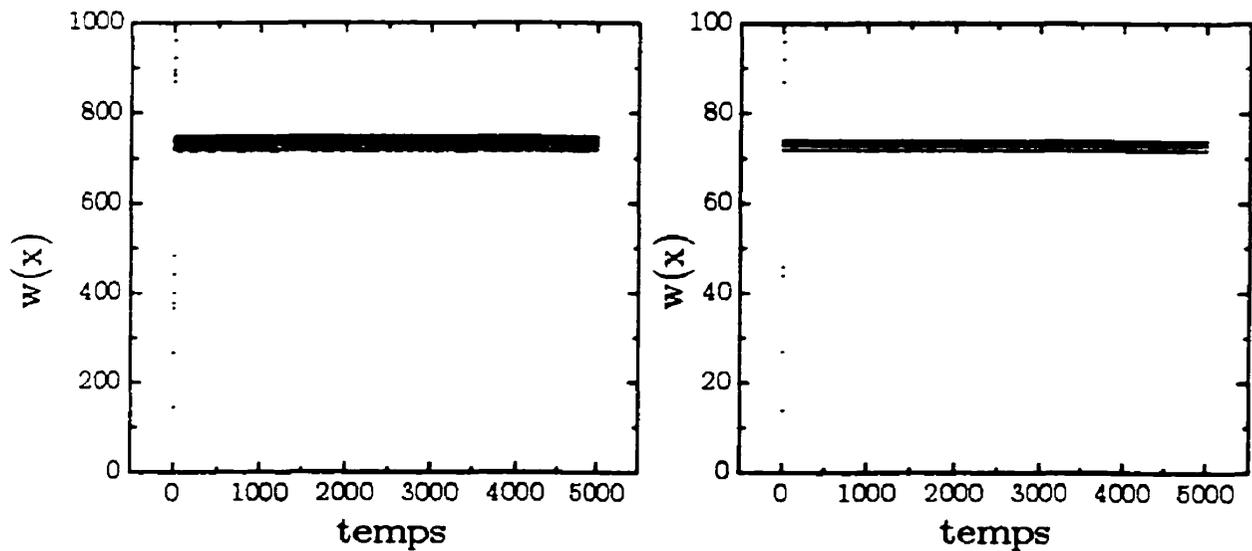


FIG. 2.8 – Contrôle du point fixe de l'application logistique. La fonction d'état-action a été obtenue par *Q-learning* sur 2000 (gauche) et 5000 (droite) épisodes avec refroidissement linéaire. À gauche, 1001 états sont possibles tandis que 101 le sont à droite. L'établissement du contrôle est très rapide.

Pour chaque expérience,  $\epsilon$  passe de 1 à 0 en 5000 épisodes. Un épisode est complété quand le but du contrôle est atteint. Pour le point fixe, le but est atteint pour  $w(X_{n+1}) = w(X_n)$ . Une fois un épisode terminé, un nouvel état initial est tiré au hasard. Le temps moyen pris pour atteindre le but, la pente  $\lambda$  du graphique, diminue considérablement au fur et

à mesure que les valeurs de  $Q(w, \delta p)$  sont ajustées. Les deux règles d'apprentissage produisent des résultats similaires. À la fin de l'entraînement, une condition initiale aléatoire prendra en moyenne environ 10 itérés avant d'atteindre le but, qui est de stabiliser l'orbite de période un. Pour le système sans contrôle, le temps moyen avant d'atteindre un voisinage de 0.005 autour de  $X_F$  est d'environ 160 itérés (calcul effectué avec 10000 conditions initiales aléatoires).

### 2.2.3 Contrôle en ligne

Cette méthode de contrôle permet aussi l'apprentissage en ligne (*online*). Il s'agit de mettre la politique d'action à jour sans repartir d'une nouvelle condition initiale après chaque épisode. C'est la seule différence avec l'algorithme décrit dans la section 2.2.1. La figure 2.9 montre ce type d'exercice. En environ 25000 itérés, le contrôleur apprend à stabiliser efficacement l'application logistique sans aucune information sur le système. Le même ensemble  $\Delta$  est utilisé. D'un point de vue expérimental, cette performance est intéressante; le contrôleur apprend de façon autonome comment agir pour stabiliser le système.

#### Adaptation

La qualité principale du contrôle en ligne est sa capacité d'adaptation aux changements de conditions. Cette caractéristique est démontrée à la figure 2.10. Pour cet exemple, la valeur de  $R$  est d'abord fixée à 3.65 et le contrôle en ligne est établi. À partir du 10000ième itéré,  $R$  est augmenté de 0.0001 tous les 10 itérés. Le contrôleur réussit à stabiliser le point

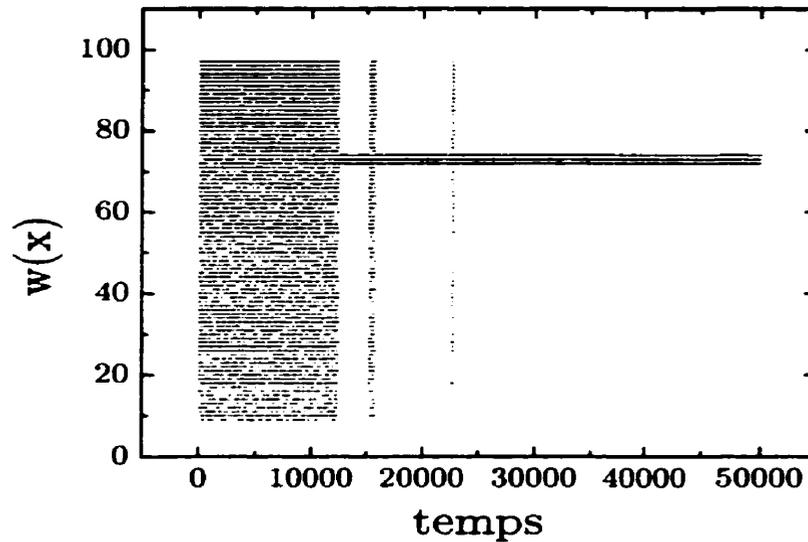


FIG. 2.9 – Contrôle en ligne du point fixe de l'application logistique. La fonction d'état-action est construite par *Sarsa-learning*.

fixe bien qu'il y ait quelques échappées. De façon surprenante, celles-ci ne se produisent pas nécessairement quand l'application oscille de façon régulière (orbites stables). Aussi, les échappées ne surviennent pas à des valeurs de paramètres pour lesquelles  $R \pm 0.1$  pourrait correspondre à un régime non-chaotique. Les résultats sont intéressants, dans la mesure où le contrôle du point fixe est maintenu sur des plages paramétriques où le comportement chaotique est absent. Des changements paramétriques plus radicaux ont été tentés. La figure 2.11 montre les résultats. Une fois la politique de contrôle édifiée, il semble facile au contrôleur de rétablir la stabilité après les changements paramétriques.

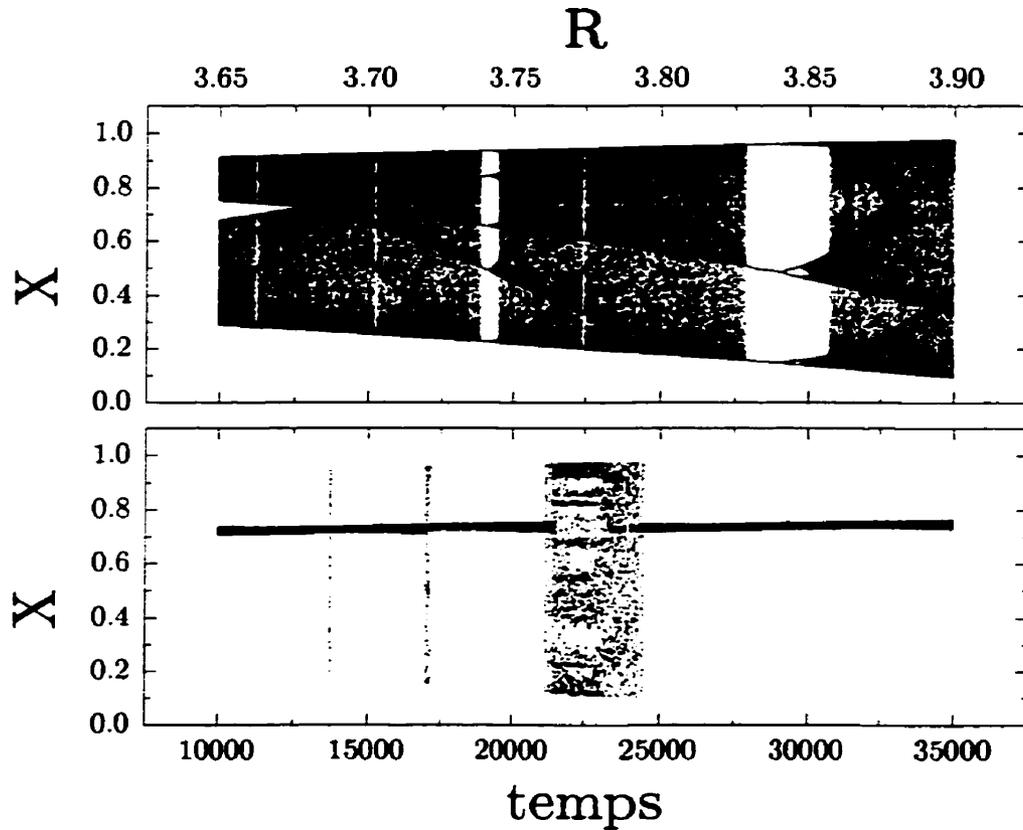


FIG. 2.10 – **Stabilisation dynamique en ligne.** La figure du haut montre le diagramme de bifurcation de l'application logistique et celle du bas la stabilisation du point fixe avec dérive paramétrique. L'échelle du haut est valable pour les deux parties. L'apprentissage est de type Sarsa avec réinitialisation à 0 de  $Q(w, \delta p)$  pour chaque but atteint. Ceci accélère le contrôle en ligne.

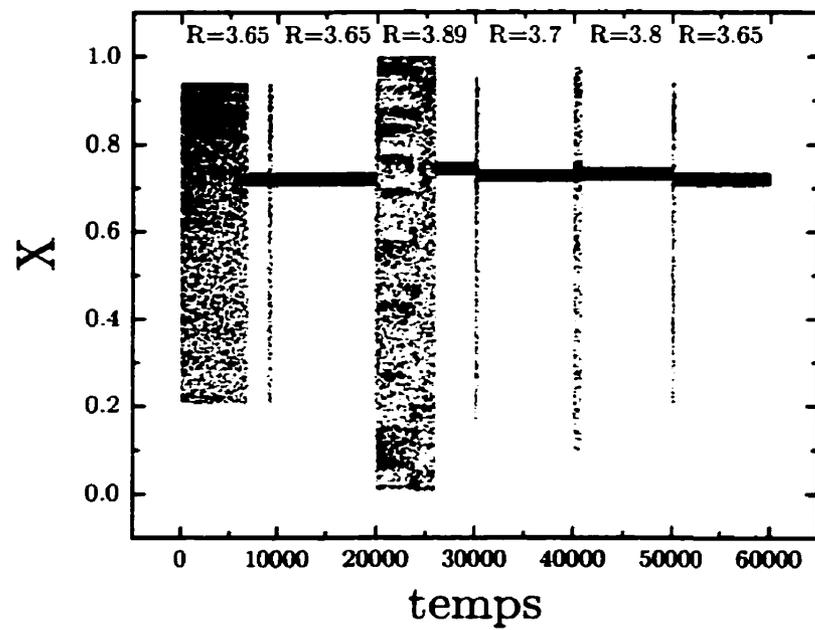


FIG. 2.11 – Malgré des changements paramétriques assez brutaux, le contrôleur réussit à reprendre le dessus rapidement.

### 2.2.4 Scénario de contrôle

À première vue, il semblerait que le contrôle d'orbites d'ordre supérieur soit facile. Il n'y a que le but à changer dans l'algorithme d'apprentissage. Par exemple, pour une orbite de période 2, celui-ci devient  $w_{n+2} = w_n$  avec  $w_{n+1} \neq w_n$ . Or, après quelques expériences, force est d'admettre que tout n'est pas si simple. Pour obtenir des résultats intéressants, il a fallu dicter à l'algorithme d'apprentissage que le but n'est pas atteint si l'état  $u(X_n)$  est près du point fixe<sup>3</sup>. Ceci est quelque peu artificiel et attaque sérieusement

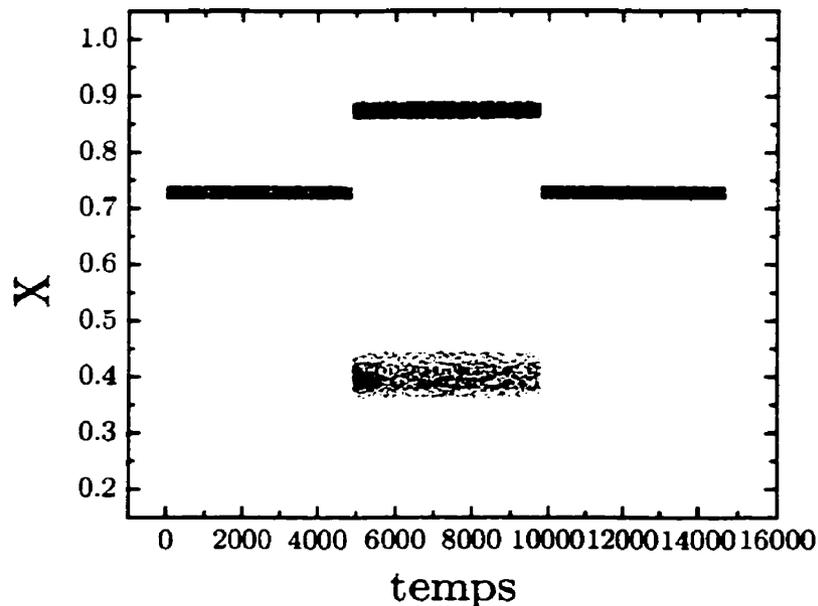


FIG. 2.12 – Scénario de contrôle P1-P2-P1 avec  $R=3.7$ .

le caractère boîte noire de l'algorithme. En fait, les politiques d'action obtenues pour des périodes supérieures ( $> 2$ ) n'ont pas conduit à la stabilisation de celles-ci. L'approche

<sup>3</sup>Les états 71 à 76 ne sont pas considérés comme un but atteint pour le contrôle d'une orbite de période 2.

considérée ici est celle d'une intervention par période. Les résultats pour un scénario simple, où 101 états sont possibles, sont montrées à la figure 2.12. On peut y voir que la stabilisation de l'UPO de période 2, dont les coordonnées sont  $X_1 = 0.880248$  et  $X_2 = 0.390022$ , est médiocre. L'état du système devrait osciller entre  $w = 88$  et  $w = 39$  mais le résultat obtenu est beaucoup plus diffus. C'est que plusieurs combinaisons d'états possibles satisfont le but dans le voisinage de l'orbite. Nous avons donc tenté d'augmenter le nombre d'états disponibles à 1001 mais sans plus de succès.

### 2.2.5 Discussion

Cette méthode de contrôle est intéressante mais moins intuitive que les techniques standards, principalement parce qu'aucun argument géométrique n'est utilisé. Néanmoins, elle a l'avantage d'inclure implicitement une procédure de ciblage ce qui peut être pratique dans certains cas. Une méthode de contrôle similaire, i.e. utilisant une table de référence (*look-up table*), a été introduite par Petrov et Showalter [44]. La généralisation en plusieurs dimensions est relatée dans [10].

# Chapitre 3

## Dynamique des billards classiques

Les systèmes vus jusqu'à présent (Lorenz, Rössler) sont dissipatifs, i.e. qu'un volume dans l'espace des phases se contracte dans le temps. D'autres types de systèmes conservent ce volume; ils sont dits hamiltoniens. Ce caractère n'empêche pas un comportement chaotique, comme nous le verrons dans ce chapitre.

### 3.1 Les billards classiques

Les billards de Birkhoff [3] sont des cas très simples de dynamique hamiltonienne<sup>1</sup>. Il s'agit tout simplement du mouvement sans friction d'une particule rebondissant sur un contour quelconque. Pour un contour circulaire,  $r(\varphi) = 1$ , le moment angulaire est

---

<sup>1</sup>D'autres cas incluent la dynamique céleste et le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. Le problème diamagnétique de Kepler (DKP), traité dans [45], est un très beau cas de dynamique hamiltonienne.

conservé ce qui permet d'extraire une solution analytique. C'est aussi le cas pour l'ellipse de forme paramétrique  $r(\varphi) = R/\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$ . La quantité conservée pour l'ellipse est le produit des moments angulaires par rapport aux deux foyers. Ces deux systèmes sont dits intégrables. D'autres contours, où aucune solution analytique ne peut être obtenue, produisent des comportements qui peuvent être complètement irréguliers. Dans la plupart des cas, on observera un mélange plus ou moins complexe de régularité et d'irrégularité dépendant des conditions initiales. Les billards sont en fait d'excellents objets de démonstration ; en déformant le cercle unitaire suffisamment, on parvient à rendre le système chaotique [52]. Il est aussi possible de déformer un système hamiltonien en son billard correspondant et d'en étudier les propriétés [5]. De plus, d'importants parallèles existent entre les billards et le chaos dit quantique [70, 69, 31, 32].

### 3.1.1 Méthode numérique

Korsch et Jodl [29] présentent une méthode pour la réalisation numérique du comportement dynamique des billards (FIG. 3.1). En connaissant l'angle  $\varphi_1$  du premier contact sur le contour ainsi que l'angle d'incidence  $\alpha_1$ , il est possible d'obtenir les points d'impacts  $P_n$  subséquents. Il faut pour ce faire calculer l'angle  $\vartheta$  entre la direction positive de la tangente et la direction radiale au point d'impact

$$\tan \vartheta_n = \left. \frac{r(\varphi)}{dr/d\varphi} \right|_n. \quad (3.1)$$

Ensuite, on définit l'angle  $\beta_n$  qu'a la trajectoire avec la direction  $\varphi = 0$

$$\beta_n = \pi + \varphi_n + \alpha_n - \vartheta_n. \quad (3.2)$$



et dont la limite  $\varepsilon = 1$  est une représentation générique d'une cardioïde (FIG. 3.2). Nous appellerons ce système billard cosinus. Pour  $\varepsilon = 0$ , nous retrouvons le cercle et le

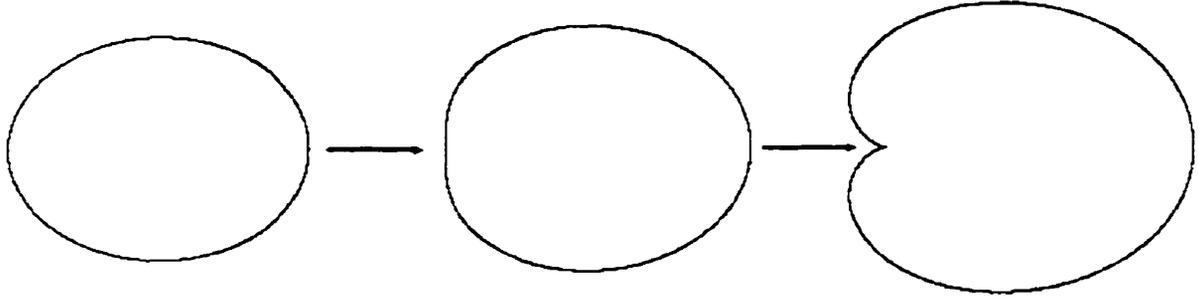


FIG. 3.2 - Déformation du cercle en cardioïde. De gauche à droite,  $\varepsilon = 0, 0.5$  et  $1$ , (3.6).

comportement est strictement régulier.

Des variables normalisées pour tous les contours peuvent être définies par

$$S(\varphi) = \frac{1}{L} \int_0^\varphi \sqrt{r^2(\varphi') + (dr/d\varphi')^2} d\varphi' \quad (3.7)$$

$$p(\alpha) = \cos(\alpha) \quad (3.8)$$

où  $L = S(2\pi)$  et  $S$  est une longueur d'arc.

Il est possible de trouver analytiquement la valeur de la matrice jacobienne dans l'espace  $(S, p)$ , i.e. la matrice  $\mathbf{M}_{10}$  telle que

$$\begin{pmatrix} dS_1 \\ dp_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{10} \begin{pmatrix} dS_0 \\ dp_0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

avec

$$\mathbf{M}_{10} = \frac{\partial(S_1, p_1)}{\partial(S_0, p_0)}. \quad (3.10)$$

La figure 3.3 montre la géométrie permettant d'obtenir les éléments de la matrice. On y voit que

$$\begin{aligned}
 l_{01}(d\alpha_0 + d\varphi_0) &= dS_0 \sin(\alpha_0 + d\alpha_0 + d\varphi_0) + dS_1 \sin(\alpha_1 + d\alpha_1) & (3.11) \\
 &= dS_0[\sin \alpha_0 \cos(d\alpha_0 + d\varphi_0) + \cos \alpha_0 \sin(d\alpha_0 + d\varphi_0)] \\
 &\quad + dS_1[\sin \alpha_1 \cos d\alpha_1 + \cos \alpha_1 \sin d\alpha_1] \\
 &\cong dS_0 \sin \alpha_0 + dS_1 \sin \alpha_1
 \end{aligned}$$

en ne conservant que les variations à l'ordre linéaire. Avec les équations (3.7) et (3.8), et avec la relation entre les angles

$$d\alpha_0 + d\varphi_0 = d\varphi_1 - d\alpha_1, \quad (3.12)$$

on arrive après un peu d'algèbre à

$$\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} -\frac{q_0}{q_1} + \frac{l_{10}}{q_1 \rho_0} & \frac{1}{L} \left( -\frac{l_{10}}{q_0 q_1} \right) \\ L \left( -\frac{l_{10}}{\rho_0 \rho_1} + \frac{q_1}{\rho_0} + \frac{q_0}{\rho_1} \right) & -\frac{q_1}{q_0} + \frac{l_{10}}{q_0 \rho_1} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

avec  $q_i = \sin \alpha_i$ . La quantité  $l_{10}$  est la longueur du segment entre les points d'impacts  $P_0$  et  $P_1$  et  $\rho_i$  est le rayon de courbure à  $\varphi_i$  :

$$\rho(\varphi) = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \quad (3.14)$$

avec  $r = r(\varphi)$ ,  $r' = dr/d\varphi$  and  $r'' = d^2r/d\varphi^2$ . Dans le cas du billard cosinus, nous avons

$$\rho(\varphi) = \frac{(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2)^{3/2}}{1 + 3\varepsilon \cos \varphi + 2\varepsilon^2} \quad (3.15)$$

et

$$l_{10} = \sqrt{r(\varphi_1)^2 + r(\varphi_0)^2 - 2r(\varphi_1)r(\varphi_0) \cos(\varphi_1 - \varphi_0)}. \quad (3.16)$$

Il est aisé de vérifier que le déterminant de  $\mathbf{M}_{10}$  est égal à 1, comme il se doit pour un système conservatif. Des tests ont été effectués pour savoir si la matrice jacobienne

reconstruite à partir des données ressemblait à celle obtenue analytiquement. Heureusement, les deux matrices concordent très bien jusqu'à 4 ou 5 décimales, ce qui indique que notre méthode de reconstruction est efficace (voir section 1.2.1). La matrice  $\mathbf{M}_{10}$  est définie analytiquement dans l'espace des variables  $(S, p)$ . Pour l'obtenir dans l'espace  $(\varphi, \alpha)$ , nous appliquons la règle de Leibnitz à l'équation 3.7 pour obtenir

$$\frac{dS_i(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{L} [r^2(\varphi_i) + r'^2(\varphi_i)]^{1/2} = A_i. \quad (3.17)$$

Avec

$$\frac{dp_i}{d\alpha} = -\sin \alpha_i = B_i, \quad (3.18)$$

nous trouvons que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{10}$  de l'espace  $(\varphi, \alpha)$  est

$$\mathbf{J}_{10} = \begin{pmatrix} \frac{A_0}{A_1} M_{11} & \frac{B_0}{A_1} M_{12} \\ \frac{A_0}{B_1} M_{21} & \frac{B_0}{B_1} M_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Le déterminant de cette matrice

$$\det \mathbf{J}_{10} = \frac{A_0 B_0}{A_1 B_1} \underbrace{\det \mathbf{M}_{10}}_1 \quad (3.20)$$

n'est pas nécessairement égal à 1. Cependant, pour un parcours fermé—une orbite—il doit l'être. L'ensemble des conditions respectant cette caractéristique des systèmes conservatifs serait donc l'ensemble des orbites possibles. Il reste à voir si l'on peut trouver des UPOs de cette façon.

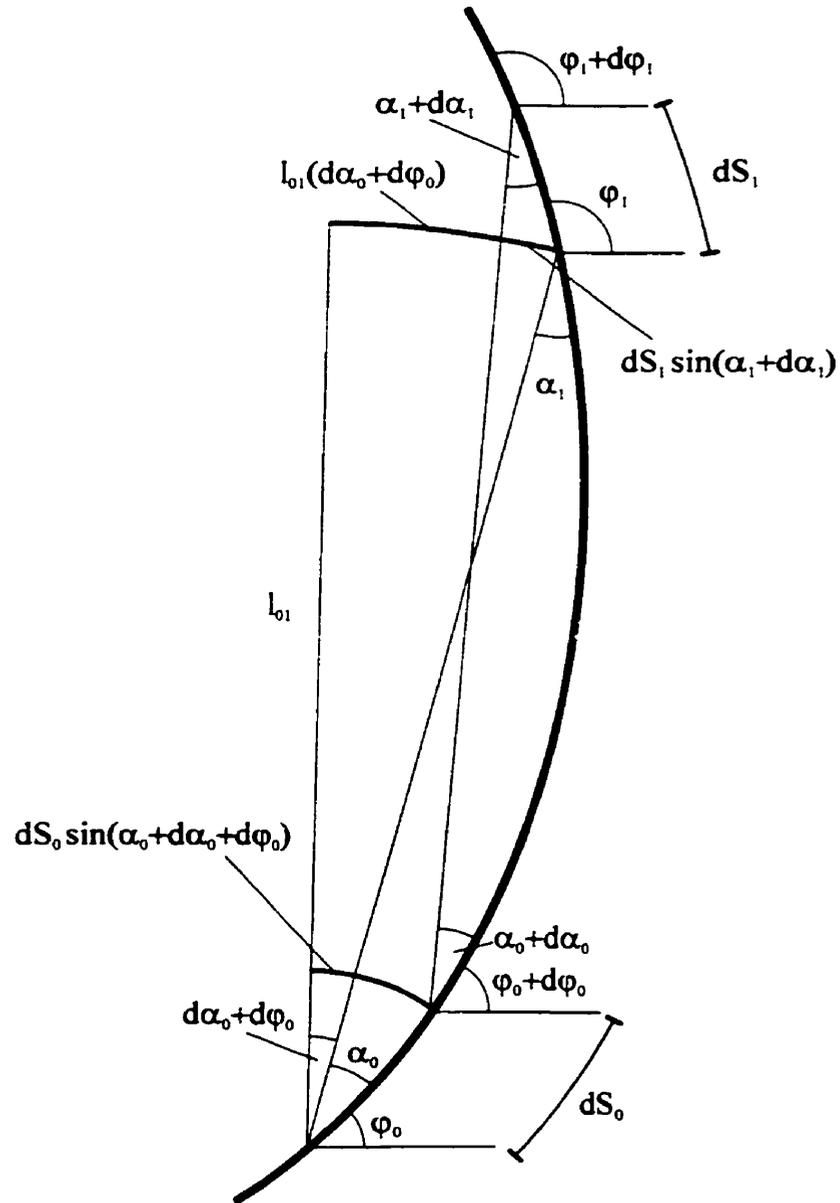


FIG. 3.3 - Géométrie pour déterminer la matrice jacobienne analytique. Tiré de [2].

Les trajectoires dans le billard cosinus s'inscrivent sur des courbes invariantes dans l'espace des phases  $(\varphi, \alpha)$  ou  $(S, p)$ . Au fur et à mesure que  $\varepsilon$  est augmenté, ces courbes sont détruites pour laisser la place à des bandes chaotiques. Pour  $\varepsilon = 0.3$ , la figure 3.4 montre une trajectoire régulière, une autre chaotique et l'espace des phases correspondant. La trajectoire régulière a été tracée en gras sur cette figure pour bien montrer qu'elle se trouve sur un îlot de régularité.

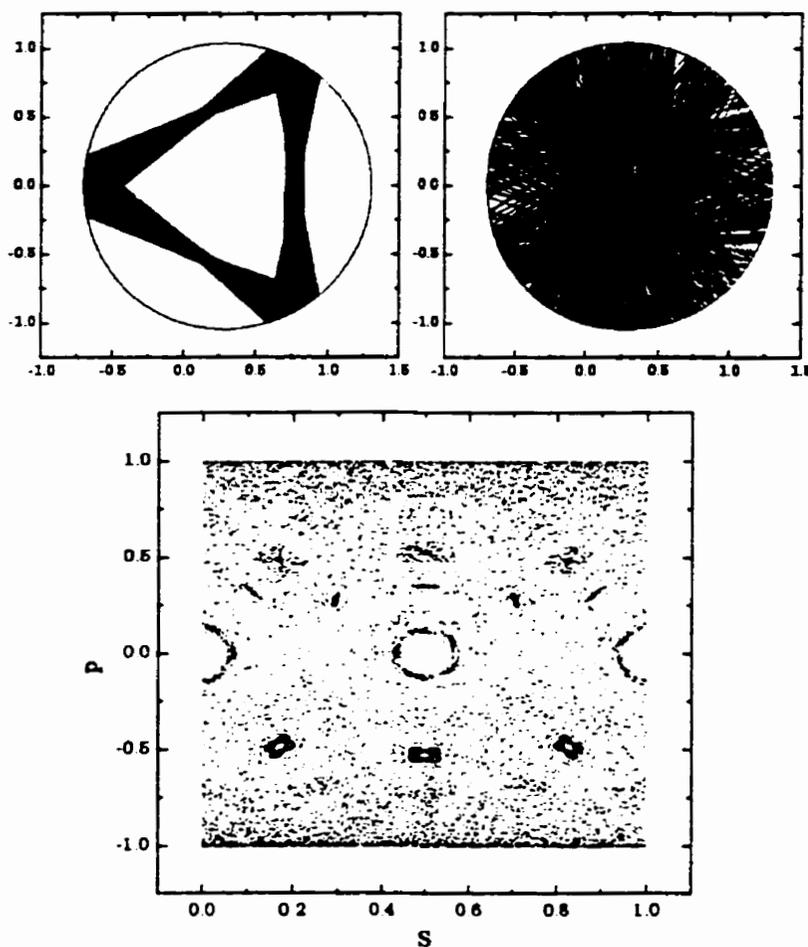


FIG. 3.4 - (en haut à gauche) Trajectoire régulière, 500 points,  $\varphi_0 = 3.2, \alpha_0 = 2.1$ . (en haut à droite) Trajectoire chaotique, 500 points,  $\varphi_0 = 1.5, \alpha_0 = 1.5$ . (en bas) Espace des phases pour  $\varepsilon = 0.3$ . En plus foncé, la trajectoire régulière.

### 3.1.2 Contrôle du chaos dans les billards

Une avenue intéressante de la dynamique des billards classiques est évidemment leur contrôle. Bien plus qu'un simple jeu, cet exercice peut ouvrir la voie à des réalisations expérimentales très prometteuses [15]. En fait, les billards peuvent être vus comme des systèmes mésoscopiques. Ceux-ci, bien que relevant clairement de la mécanique quantique, se prêtent très bien à des approximations de nature statistique. C'est le cas notamment du mouvement d'un électron dans un puits de potentiel bidimensionnel. Les solutions quantique (équation d'onde) et classique (rebonds sur le contour) sont étonnamment semblables (voir [20]). Le contrôle est d'autant plus intéressant dans ce cas car il permet de stabiliser un objet quantique avec des actions classiques (déformation du contour). C'est ce qui sera fait ici, la déformation du contour étant induite via le paramètre d'excentricité  $\varepsilon$ .

La localisation des UPOs se fait tout d'abord par récurrence. Par la suite, un schème itératif de Newton en  $2D$  permet d'obtenir avec précision les coordonnées de l'orbite. Les caractéristiques de stabilité d'un point d'une UPO sont obtenues comme à l'habitude : l'accumulation de points voisins et de leur images permet d'obtenir la matrice jacobienne en ce point (voir section 1.2). Un scénario de contrôle de type MED pour  $\varepsilon = 0.3$  a été effectué avec des orbites de période 4, 5 et 9. Le tableau 3.1 rassemble les paramètres de contrôle utilisés. La figure 3.5 montre les résultats. Notons qu'un contrôle de type OGY donne sensiblement les mêmes résultats.

	$\varphi_0$	$\alpha_0$	$J_{11}$	$J_{12}$	$J_{21}$	$J_{22}$	$\mathbf{g}_1$	$\mathbf{g}_2$
<i>P4</i>	5.65221392136	2.3691056915	1.960	9.544	0.269	1.823	0.385	0.0912
<i>P5</i>	2.12424659786	1.23775192119	3.465	16.69	0.325	1.870	-1.733	-0.0843
<i>P9</i>	5.17021227538	2.46200860655	3.001	29.88	0.281	3.215	1.025	0.251

TAB. 3.1 – Paramètres de contrôle pour billard.

## 3.2 Discussion

Il a donc été démontré que le contrôle d'une trajectoire chaotique dans un billard est possible, du moins numériquement. Reste à savoir si on peut espérer appliquer cette stabilisation à des systèmes physiques réels. Le cas du billard cosinus est expérimentalement complexe car la réalisation d'une déformation physique par l'excentricité semble utopique. Un contour tel le stade (deux demi-cercles rattachés par des segments droits) offre, à première vue, des simplifications techniques majeures ; en effet, il est possible de contrôler une trajectoire dans un tel objet en variant non pas l'excentricité mais la longueur des segments droits. Ce pourrait être réalisé avec un champ électrique par exemple. Ceci nous amène à discuter du contrôle du chaos dans les systèmes concrets, ceux des laboratoires de mécanique, de chimie, de biologie...etc. Le chapitre suivant propose donc une incursion dans le monde réel, plus spécifiquement celui de l'optique. Nous quittons donc le confort relatif des séquences synthétiques précises à  $10^{-15}$  pour nous attaquer à celles plus hostiles issues d'un environnement bruité et non-stationnaire.

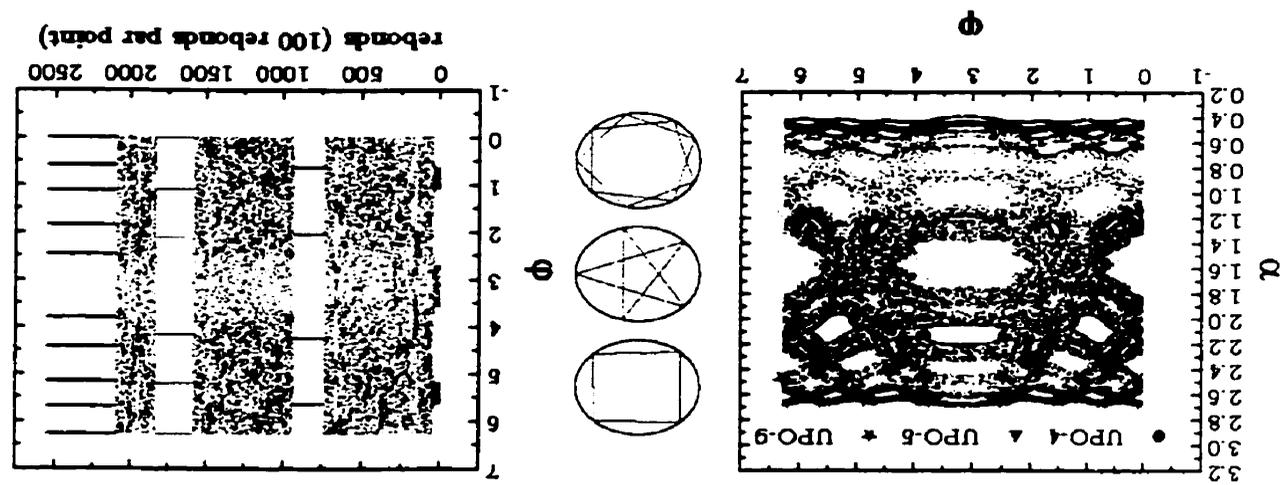


FIG. 3.5 - (droite) Espace des phases avec la position des UPOs. (milieu) Trajectoires physiques des orbites contrôlées. (gauche) Scénario de contrôle MED où les orbites sont stabilisées pendant 500 cycles chacune. Voisinage de contrôle de  $10^{-2}$ . On compte 6 et 10 lignes pour les UPOs 5 et 9 parce que le rebond survient près de la position 0 ou  $2\pi$ .

# Chapitre 4

## Détection de déterminisme

Des séquences expérimentales ont été obtenues dans le cadre d'une collaboration avec le Centre d'Optique et Photonique Laser de l'Université Laval. Des indices permettent de croire que le moteur moléculaire [11, 58] à l'étude oscille de façon chaotique dans certaines configurations. Il serait donc possible, en théorie, de contrôler ce système. Ce chapitre présente l'analyse de séquences expérimentales et les conclusions s'y rapportant.

### 4.1 Préliminaires

Le contrôle expérimental du chaos a été démontré pour la première fois en 1990 par Ditto *et al.* [6], peu de temps après l'article fondamental de OGY [36]. Il s'agissait de la stabilisation du comportement d'un ruban magnétoélastique soumis à un champ magnétique

périodique. La procédure de contrôle ne nécessitait aucun modèle et s'effectuait par de faibles perturbations sur un paramètre du système, exactement comme OGY l'avaient fait pour l'application de Hénon. Par la suite, d'autres systèmes ont pu être contrôlés par l'exploitation de leur caractère chaotique : une boucle de convection thermique [66], un circuit électronique [22], du tissu cardiaque en fibrillation [12], un système de laser [13] et une réaction chimique [42]. Tous ces cas de contrôle expérimental nécessitent, en général, les étapes suivantes :

### 1. Identification du système

Le système à l'étude doit d'abord être reconnu comme étant chaotique déterministe, i.e. qu'il ne provient pas d'un processus stochastique pur. L'allure d'une application de premier retour ou d'une section de Poincaré quelconque est souvent un bon indicateur de la nature du système. D'autres tests plus quantitatifs permettent une meilleure appréciation de la nature de la dynamique. Il s'agit le plus souvent d'un test de prédiction jumelé à une étude statistique effectuée avec des données synthétiques (*surrogates*).

### 2. Détection d'orbites périodiques instables (UPOs)

La localisation des UPOs dans les systèmes expérimentaux est rendue difficile par la présence de bruit et la faible longueur des séquences temporelles. La technique de base reste la recherche par récurrence mais d'autres méthodes utilisant la dynamique peuvent aider à la détection<sup>1</sup>.

### 3. Choix d'une méthode de contrôle et calcul des quantités requises

La nature du système impose souvent le choix de la méthode de contrôle à utiliser.

La simplicité globale de la technique et l'accessibilité aux quantités requises de-

---

<sup>1</sup>L'article de So *et al.*[68] constitue un bon point de départ en ce qui concerne les techniques de détection de UPOs.

vraient guider ce choix. Autrement dit, un contrôle de type OPF est préférable dans les cas expérimentaux. Il faut évidemment que le système réponde aux prérequis de la méthode.

#### 4. Contrôle expérimental

La réussite de l'étape ultime dépend de la qualité se dégageant des étapes précédentes. Malgré tout, il se peut que des effets indésirables (bruit, non-stationnarité) viennent gâcher les efforts investis. Dans bien des cas, un ajustement fin des paramètres de contrôle est nécessaire à la bonne marche de la stabilisation.

On espère pouvoir caractériser convenablement la dynamique du moteur moléculaire pour éventuellement en contrôler le comportement. Ce que l'on cherche, c'est une dynamique de basse dimension pour laquelle une méthode de contrôle serait efficace.

## 4.2 Description de l'expérience

Le système à l'étude consiste en l'interaction lumière/matière se produisant dans une cellule de cristaux liquides éclairée par un faisceau laser. Différentes configurations expérimentales permettent l'observation de comportements variés. Ici, un faisceau d'un laser à l'argon (514.5nm) incident à angle droit et ayant une polarisation circulaire, est dirigé sur une cellule contenant des cristaux liquides (100 $\mu$ m d'épaisseur, matériau E7). En variant l'intensité, on observe sur un écran d'observation la formation d'anneaux de diffraction. L'hypothèse de base est que l'intensité horizontale (en polarisation) détectée au centre du patron d'anneaux est représentative de la dynamique du système. Les séquences temporelles (échantillonnage 5 fois par seconde) de cette intensité horizontale seront analysées à l'aide de différents outils qui ont fait leurs preuves sur des séquences synthétiques pro-

duites numériquement. Les séquences expérimentales recueillies sont montrées à l'annexe B.

### 4.3 Analyse des données

Les méthodes développées dans le cadre du nouveau paradigme du chaos déterministe ont suscité l'enthousiasme dans plusieurs champs de compétence scientifique. Les quantités et concepts utilisés autrefois par les mathématiciens et les physiciens sont entrés dans les laboratoires de biologie, d'optique, de finance, de médecine...et la liste ne cesse de s'allonger. Le vent d'optimisme soulevé par ces nouveaux outils est dû en grande partie aux résultats parfois spectaculaires qu'ils génèrent. Le contrôle expérimental du chaos, par exemple, a permis une compréhension nouvelle de certains phénomènes physiques. La prédiction non-linéaire a suscité un renouveau dans le monde financier et l'anticipation de défaillances comme l'épilepsie a relancé la recherche vers des solutions non-pharmaceutiques. Dans un tel contexte, où les attentes sont très grandes, plusieurs publications sont apparues sans que celle-ci amènent un éclairage véritablement nouveau. Les exemples de récupération douteuse sont dus, en général, à l'utilisation à l'aveuglette des outils algorithmiques et à une interprétation naïve<sup>2</sup>. Dans la plupart des cas, le principal problème est relié au postulat de base : le système à l'étude est chaotique déterministe. Une telle affirmation se doit d'être vérifiée, surtout dans un contexte expérimental. Si elle ne l'est pas, il faut être en mesure de dire en quoi les outils de la dynamique non-linéaire sont supérieurs aux autres méthodes d'analyse.

---

<sup>2</sup>[24, 23, 77] sont des exemples récents pigés au hasard.

Le besoin d'une stratégie d'approche scientifiquement rigoureuse est évident ici. Schreiber présente dans [61] une revue des problèmes reliés à l'utilisation à outrance de la théorie du chaos. Il propose des solutions intéressantes et une ligne de conduite à suivre pour aborder les séquences temporelles issues du monde réel. Cet article sera à la base du travail d'analyse des séquences provenant du système laser/cristaux liquides. La grande partie des algorithmes utilisés ici sont tirés du progiciel TISEAN [19], disponible sur <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean>.

### 4.3.1 Approche linéaire

Il serait inapproprié de se lancer dans une analyse non-linéaire de séquences temporelles sans avoir au préalable tiré l'information linéaire disponible. Par la suite, les outils non-linéaires pourront entrer en jeu. L'idée est de déterminer lequel des deux modèles, linéaire ou non, réussit le mieux à décrire les observations.

Dans un premier temps, le spectre en puissance de Fourier a été obtenu pour chacune des séquences. Un temps transitoire a été enlevé pour chaque séquence. Le tableau B.1 en annexe résume les coupures effectuées. La figure 4.1 montre les résultats pour les quatre intensités les plus faibles. Le caractère périodique de la séquence à 225 mW s'exprime par le pic centré à 0.02777 Hz, soit 36 s. Pour les deux séquences suivantes, 250 et 275 mW, le spectre est plus large, signe d'un comportement possiblement chaotique. Le pic le plus grand se situe pour ces deux séquences au même endroit, soit  $1.6479 \times 10^{-2}$  Hz. L'analyse de la séquence à 300 mW s'est faite en deux parties : une où toute la séquence a été utilisée et une autre où seulement le segment 500-1500 s a été soumis au FFT. Le spectre du segment démontre bien le pic à 0.10254Hz (9.75 s) tandis que l'autre est plus diffus à

cause de la non-stationnarité observée. D'ailleurs, il est possible de quantifier celle-ci par des mesures (moyenne, variance, dimensions...etc...) prises sur différentes fenêtres de la séquence. Ce travail n'est pas fait ici puisque l'allure générale en dit assez long, i.e. qu'il est évident qu'une dérive causée par un élément extérieur est présente.

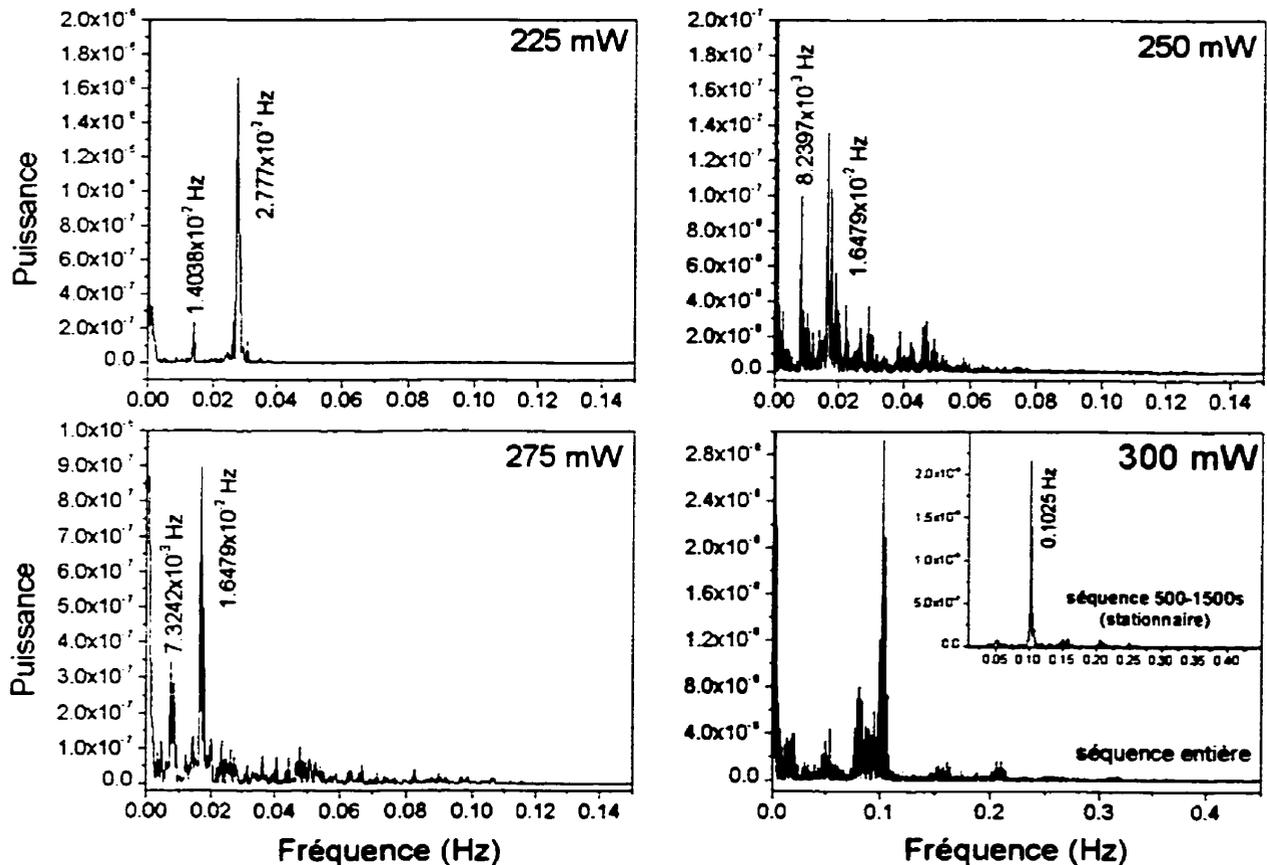


FIG. 4.1 – Spectres de Fourier I—Les séquences à 250 et 275 mW ont un spectre plus étendu. L'élargissement du spectre à 300 mW est dû à la non-stationnarité de la séquence.

Dans une étude datant de 1993, Cipparrone *et al.* [4] ont conclu à un comportement chaotique du système laser/cristaux liquides dans un montage très semblable à celui

utilisé ici<sup>3</sup>. Leur raisonnement se base essentiellement sur l'étude des spectres de Fourier : avec l'augmentation de l'amplitude, une cascade de dédoublement de période semble se produire. De plus, le calcul de l'exposant de Lyapunov maximal donne un résultat plus grand que 0, signalant ainsi la présence de chaos. Dans le cas présent, il est difficile de conclure à un dédoublement de période avec l'augmentation de l'intensité. Le spectre devient plus large, mais ce n'est pas une condition suffisante au diagnostic chaotique. Les séquences à 325-350-375-400 mW (figure 4.2) montrent un comportement somme toute assez régulier. Il faudrait chercher la cascade de dédoublement dans la zone 225-250 mW.

Un changement qualitatif spectaculaire survient pour les intensités 425-450-500 mW. Le temps caractéristique d'oscillation du système augmente radicalement (facteur  $\sim 20$ ). À ce jour, rien n'explique ce phénomène et il mériterait d'être étudié davantage. Pour le reste, ces séquences ont produit des spectres peu fiables, du fait que les données ne contiennent pas assez d'oscillations.

---

<sup>3</sup>La principale différence vient de l'angle d'incidence du laser, qui n'est pas à 90 degrés dans leur cas.

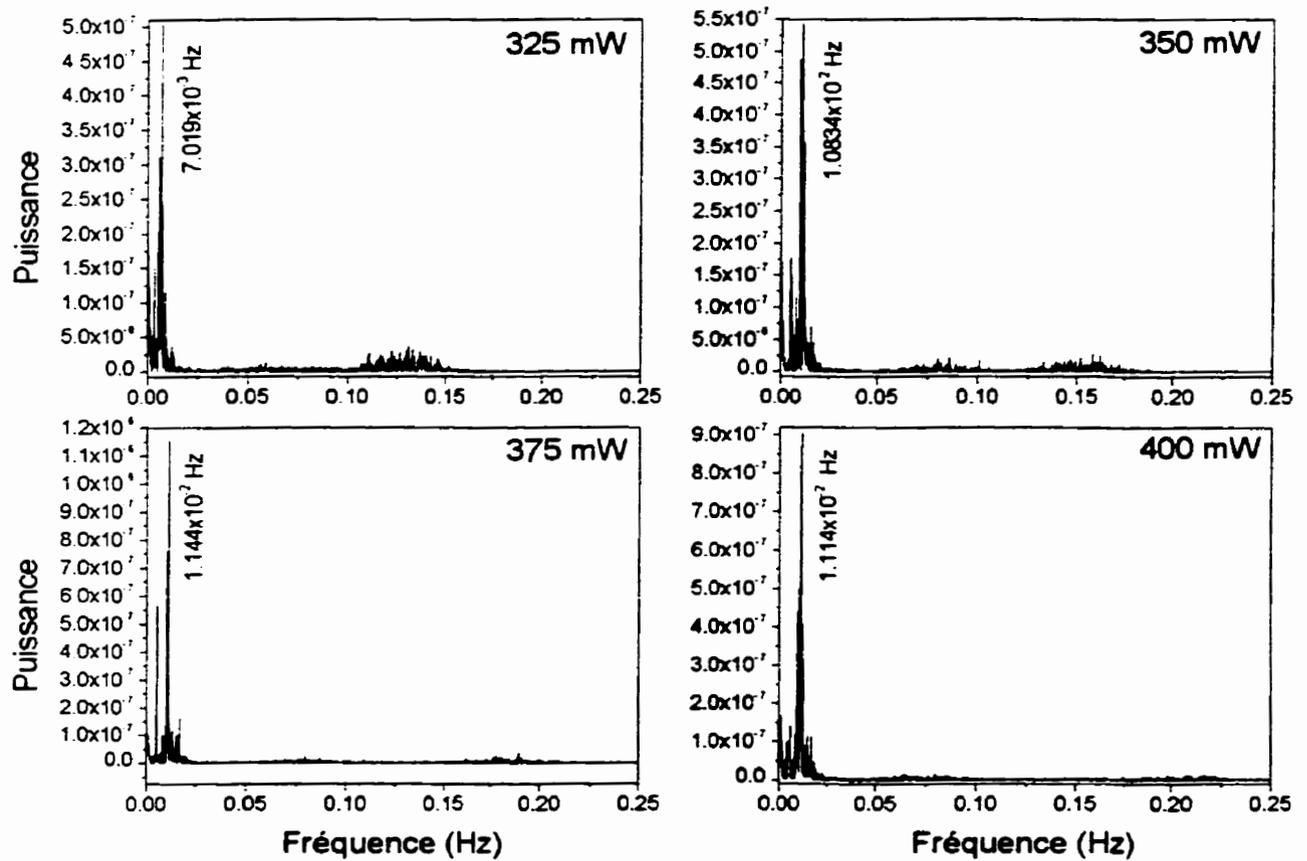


FIG. 4.2 - Spectres de Fourier II—Le comportement régulier périodique est mis en évidence par l'étroitesse des pics.

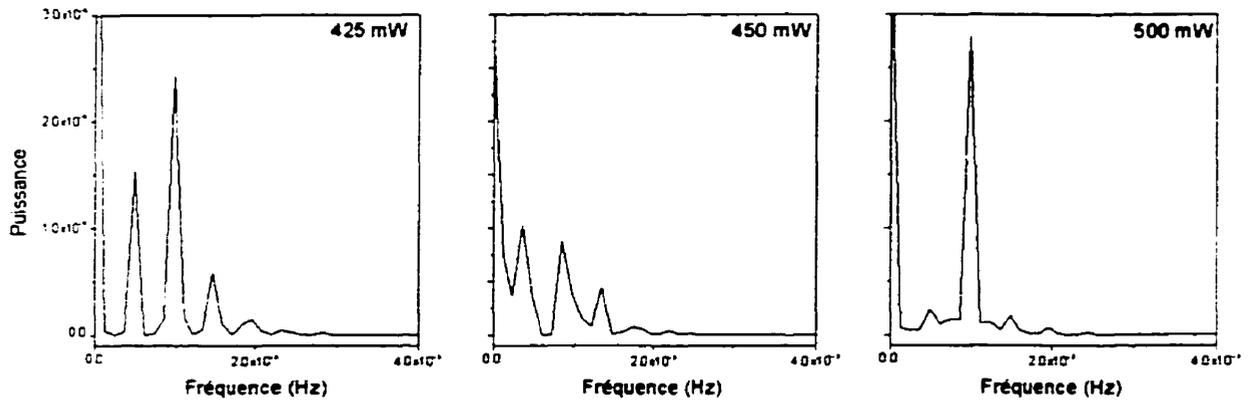


FIG. 4.3 – Spectres de Fourier III—Le petit nombre d'oscillations diminue la qualité de la statistique.

### 4.3.2 À la recherche de non-linéarité et de déterminisme

Les séquences à 250 et 275 mW semblent plus riches, dynamiquement, que les autres. Il n'est malheureusement pas possible de conclure pour l'instant de façon positive à la présence de chaos déterministe. Par contre, il existe des tests permettant de détecter le caractère non-linéaire d'une séquence. Ceux-ci ont été éprouvés sur des séquences numériques et se sont montrés relativement fiables. Les sous-sections suivantes présentent quelques-unes de ces méthodes.

#### Utilisation de données synthétiques (*surrogates*)

L'utilisation de données synthétiques s'impose de plus en plus dans le traitement statistique des séquences temporelles. Un article fondamental sur le sujet, et en rapport avec la

dynamique moderne, est certainement celui de Theiler *et al.*[74] paru en 1992. Les tests effectués avec les données synthétiques comprennent deux aspects : une hypothèse nulle à confronter aux données observées et une statistique discriminante. L'idée est de rejeter l'hypothèse nulle en démontrant qu'elle n'est pas adéquate pour décrire les observations. Cette discrimination est faite sur la base d'une mesure statistique. Le dynamiqueur aura avantage à choisir cette dernière parmi la gamme des nouveaux outils non-linéaires : dimensions, exposants de Lyapunov, prédictions...etc...

Les données synthétiques sont créées pour respecter les caractéristiques de l'hypothèse nulle choisie tout en conservant certaines propriétés des données observées : moyenne, variance, spectre de Fourier... Dans le cas présent, l'hypothèse nulle consiste à supposer que les données ont été produites par un processus linéaire stochastique gaussien. Si les constructions synthétiques et les données originales engendrent des résultats statistiquement différents pour des mesures non-linéaires, alors l'hypothèse nulle pourra être rejetée. Par contre, cela ne veut pas nécessairement dire que les observations proviennent d'un système non-linéaire ; il est seulement possible d'affirmer qu'elles ne proviennent pas d'un processus stochastique linéaire.

Les séquences synthétiques produites ici le seront par transformée de Fourier à amplitude ajustée (AAFT) [74] avec l'amélioration proposée par Schreiber et Schmitz [62]. En fait, la routine `surrogate` de TISEAN fera le travail. Quelques tests ont d'abord été effectués avec la variable  $x$  du système de Lorenz. La figure 4.4 montre que le spectre de Fourier est conservé sous la transformation. Il en est de même de la fonction d'autocorrélation.

La prochaine étape consiste à choisir une mesure à laquelle seront soumises les données originales et synthétiques. Schreiber et Schmitz [63] ont discuté du pouvoir discriminant

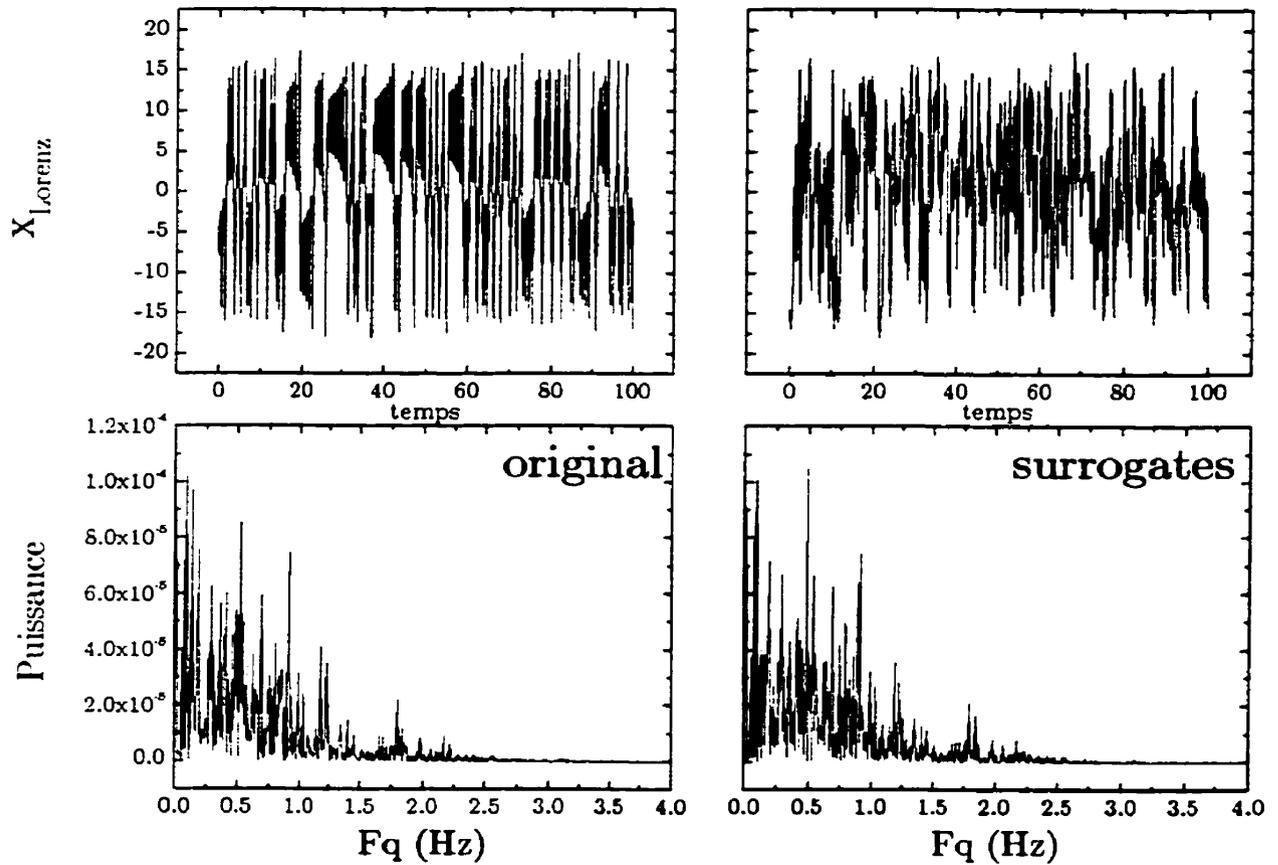


FIG. 4.4 – **Données synthétiques : comparaison.** Les données synthétiques ont les mêmes caractéristiques spectrales que les données originales (variable  $x$  de Lorenz)

de plusieurs mesures : dimension de corrélation, prédictions, réversibilité temporelle, autocovariance de degré supérieur, etc... Il s'est avéré que l'efficacité de chacune de ces mesures était grandement dépendante de l'application étudiée. Il semble toutefois que la prédiction soit un outil de choix. Dans le cas de séquences réelles, où il est impossible de vérifier la puissance d'un test, vaut mieux utiliser cette mesure, qui présente l'avantage de ne pas dépendre de beaucoup de paramètres.

### Prédiction non-linéaire

Deux outils de prédiction non-linéaire ont été utilisés pour obtenir une mesure statistique. Le premier en est un d'ordre 0, soit la routine `zeroth` de `TISEAN`. La valeur prédite d'un point de la séquence est la moyenne des valeurs futures de ses voisins

$$\hat{X}_{n+k} = \frac{1}{|\mathcal{U}_n|} \sum_{X_j \in \mathcal{U}_n} X_{j+k}. \quad (4.1)$$

Ici,  $\mathcal{U}_n$  est le voisinage de  $X_n$ . Tous les points de chaque séquence<sup>4</sup> furent utilisés pour établir la valeur RMS (4.3) de l'erreur de prédiction, qui est de ce fait qualifiée d'erreur intra-échantillon (*in-sample error*). Dans chaque cas, le voisinage utilisé comprend 30 voisins. Les paramètres de reconstruction ont été établis par la technique des faux-voisins (dimension) et par la fonction d'autocorrélation (délai). Le tableau 4.1 résume ceux-ci.

TAB. 4.1 – Paramètres de reconstruction

Séquence	m	$\tau_0$
Rössler	3	145
Lorenz	3	58
225mW	3	50
250mW	5	58
275 mW	5	80

Les séquences (Rössler, Lorenz, 225mW, 250mW et 275mW) analysées sont toutes issues de processus continus. Il est alors important d'être prudent dans l'interprétation des résultats de prédiction. Une séquence suréchantillonnée (taux d'acquisition beaucoup

<sup>4</sup>Exception faite du temps transitoire, voir tableau B.1.

plus grand que le temps d'oscillation caractéristique du système) donnera assurément de bon résultats à court terme mais ceux-ci sont biaisés. Ici, le temps que prend la fonction d'autocorrélation pour atteindre 0 ( $\tau_0$ ) servira de phare pour toutes les séquences. Les performances de l'outil de prédiction seront jaugées à l'intérieur de la plage de prédiction  $[1, 2\tau_0]$ . À l'instar de Salvino *et al.* [57], la performance sera ramenée à un seul nombre, soit :

$$P = \frac{1}{2\tau_0 - 1} \int_1^{2\tau_0} [1 - e(t)] dt \quad (4.2)$$

où  $e(t)$  est l'erreur normalisée

$$e(t) = \frac{\langle [\hat{X}(t) - X(t)]^2 \rangle^{1/2}}{\langle [X(t) - \langle X \rangle]^2 \rangle^{1/2}} \quad (4.3)$$

Ainsi,  $P = 1$  signifie une excellente capacité de prédiction et  $P = 0$  une incapacité totale. La figure 4.5 montre les résultats obtenus. Les valeurs de  $P$  correspondantes se trouvent dans le tableau 4.2.

Un outil de prédiction non-linéaire d'ordre 1 a aussi été implémenté. Comme le montre la figure 4.5, son efficacité est supérieure dans tous les cas avec tous les paramètres inchangés (voir aussi tableau 4.2). Son fonctionnement repose sur une régression linéaire calculée localement dans un voisinage  $\mathcal{U}_n$ . L'hypothèse de base est qu'une fonction  $\mathbf{F}$  telle que  $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n)$  existe en première approximation. Le développement en série de Taylor de cette fonction, jusqu'au premier ordre, introduit les inconnues  $\mathbf{J}_n$  et  $\mathbf{b}_n$  qui peuvent être déterminées par minimisation de

$$\sigma^2 = \sum_{\mathbf{X}_j \in \mathcal{U}_n} (\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{J}_n \mathbf{X}_j - \mathbf{b}_n)^2 \quad (4.4)$$

La prédiction est alors  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{J}_n \mathbf{X}_n + \mathbf{b}_n$ .

Comparons maintenant ces résultats avec des données synthétiques. Celles-ci ont le même

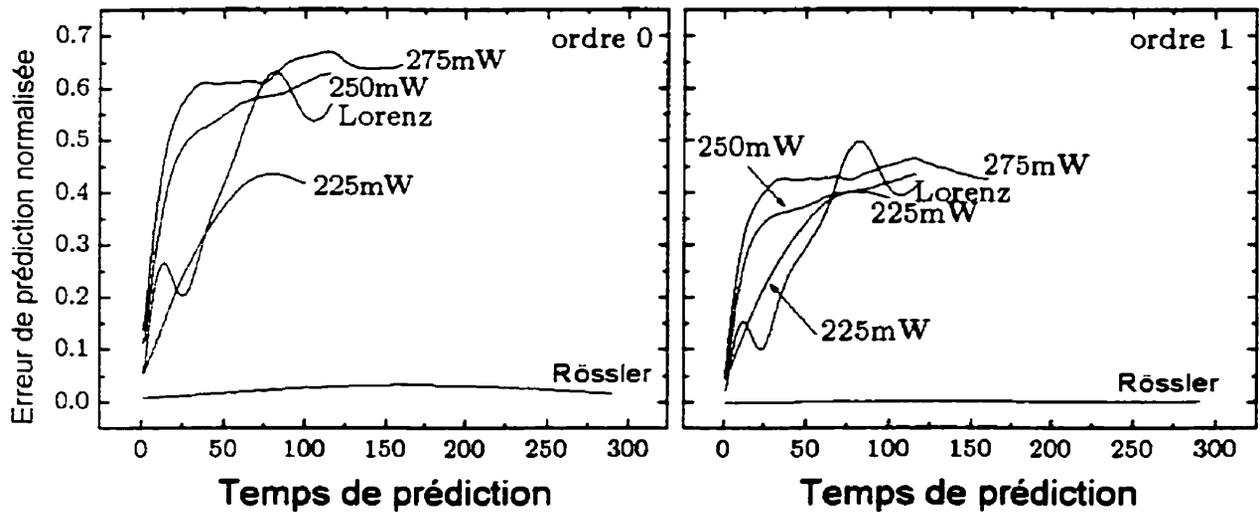


FIG. 4.5 – De meilleurs résultats sont possibles avec l’outil de prédiction à régression linéaire. Voir texte pour discussion.

spectre de Fourier, et donc la même fonction d’autocorrélation que les données originales. La figure 4.6 montre les résultats pour Lorenz de même que pour les séquences expérimentales à 250 et 275 mW. Dans le cas de Lorenz, il est clair que l’hypothèse nulle peut être rejetée. La performance de prédiction passe de 68.8% à 27.8%. Du côté expérimental, il existe un léger avantage de performance des séquences originales sur les séquences synthétiques (voir tableau 4.2). Pour confirmer statistiquement cet avantage, l’exercice a été repris plusieurs fois (20) avec des données synthétiques différentes<sup>5</sup>. Il est alors possible de tracer les fourchettes d’incertitudes. Le graphe 4.7 montre les résultats pour la séquence à 250 mW. Sur la base de celui-ci, il semble possible de rejeter l’hypothèse nulle.

<sup>5</sup>Kugiumtzis [30] sert une mise en garde contre l’utilisation de l’algorithme AAFT de génération de données synthétiques. Néanmoins, ce dernier a été utilisé ici.

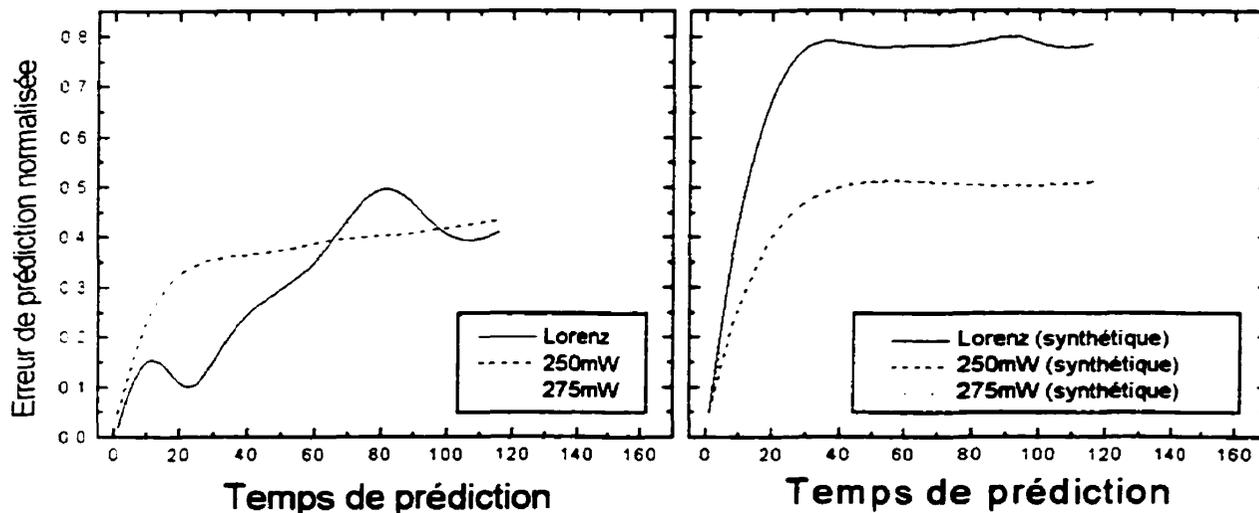


FIG. 4.6 – La performance est semblable pour les séquences expérimentales et leurs équivalents synthétiques.

TAB. 4.2 – Capacité de prédiction sur  $2\tau_0$ .

Séquence	$P_{ordre0}(\%)$	$P_{ordre1}(\%)$	$P_{ordre1}(\%)$ (synth.)
Rössler	97.5	99.9	—
Lorenz	56.8	68.8	27.8
225mW	67.1	69.7	—
250mW	47.3	63.6	54.3
275mW	39.8	58.4	51.5

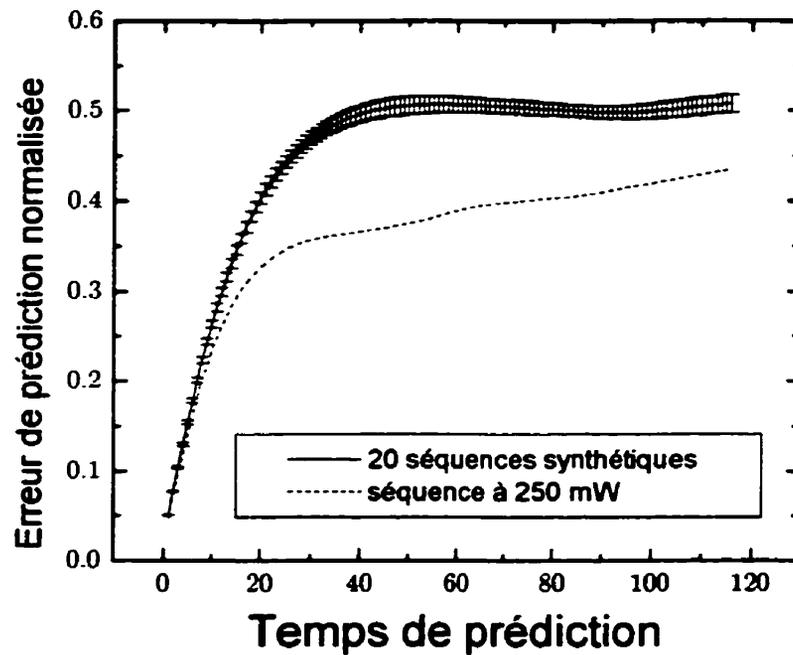


FIG. 4.7 - La différence entre les données observées et synthétiques est statistiquement significative. La courbe est la moyenne sur 20 essais de données synthétiques et les barres d'erreur représentent l'écart-type.

### Caricature de la dynamique

Une mesure développée par Kaplan et Glass en 1991 [27] permet de tracer un portrait grossier d'un flot. S'il y a une certaine cohésion dans celui-ci, elle apparaît clairement sur un diagramme de vecteurs. Ce dernier est créé en enregistrant les passages de la trajectoire reconstruite sur une grille plus ou moins fine, dépendant de l'échelle d'observation désirée. Pour chaque passage  $k$  dans une boîte  $j$ , les coordonnées d'entrée et de sortie sont transformées en un vecteur unitaire  $v_{k,j}$  s'alignant sur l'axe entrée-sortie. Puis, pour chaque boîte, un vecteur résultant est calculé en sommant les contributions des  $n_j$  passages,

$$V_j = \frac{\sum_k v_{k,j}}{n_j}. \quad (4.5)$$

Cet exercice a d'abord été effectué sur une séquence de la variable  $x$  du système de Rössler. La grille utilisée est de  $32 \times 32$  et la dimension de reconstruction a été fixée à 2. La figure 4.8 montre bien l'écoulement. Évidemment, si la direction du flot calculée dans une boîte est constante, comme cela devrait l'être pour un système déterministe à une échelle appropriée, le vecteur résultant sera aussi unitaire. À l'inverse, un flot complètement désordonné créera un vecteur  $V_j$  tel que  $|V_j| \rightarrow 0$ . Il est donc possible de définir une quantité qui mesurera la cohésion du flot en général. Comme la statistique dépendra du nombre de passages dans chaque boîte, cette quantité devra aussi en dépendre. Il apparaît donc naturel d'utiliser la moyenne de la norme des vecteurs  $V_j$  sur les boîtes qui sont visitées  $n$  fois.

$$\bar{L}_n = \langle |V_j| \rangle_{n_j=n} \quad (4.6)$$

Le test de données synthétiques a aussi été mis à contribution ici. La figure 4.9 montre le diagramme produit par l'algorithme pour Lorenz et une séquence synthétique ayant le

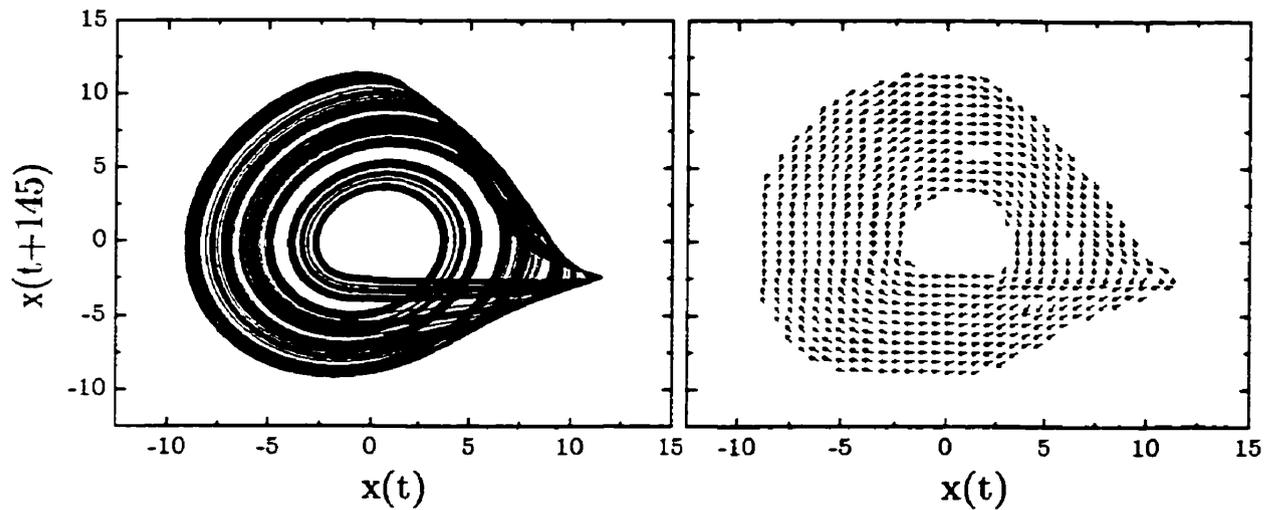


FIG. 4.8 – Caricature de la dynamique pour la variable  $x$  de Rössler. Le délai donné ici correspond à un nombre de données et non au temps absolu.

même spectre de Fourier. Le manque de cohérence est nettement visible sur le diagramme de vecteurs des données synthétiques.

La quantité de l'équation (4.6) de même que l'écart-type associé ont été calculés pour Rössler, Lorenz et des données synthétiques de Lorenz. Ces dernières se distinguent nettement du comportement déterministe des deux autres. Une remarque importante s'impose cependant : la reconstruction effectuée ici est bidimensionnelle. L'attracteur reconstruit ne sera donc pas un difféomorphisme dans la grande majorité des cas réels. Il faudrait idéalement faire le test dans une dimension de recouvrement  $m$  suffisamment grande. Une des principales conséquences de ce défaut est que la quantité  $L_n$  ne tendra pas nécessairement vers 1 pour une grille infinitésimale (pour un système purement déterministe). Ceci est évidemment dû aux croisements de trajectoire qui surviennent quand  $m < 2D_0 + 1$ , où  $D_0$  est la dimension de capacité. D'ailleurs, le cas Lorenz vs

Rössler montre bien cet effet : la reconstruction de Lorenz comporte beaucoup plus de croisements de trajectoire que Rössler, ce qui se traduit par un  $L_n$  moins parfaitement près de 1.

Les caricatures des séquences à 250 et 275mW sont montrées à la figure 4.11. Les graphes de  $L_n$  correspondants sont à la figure 4.12.

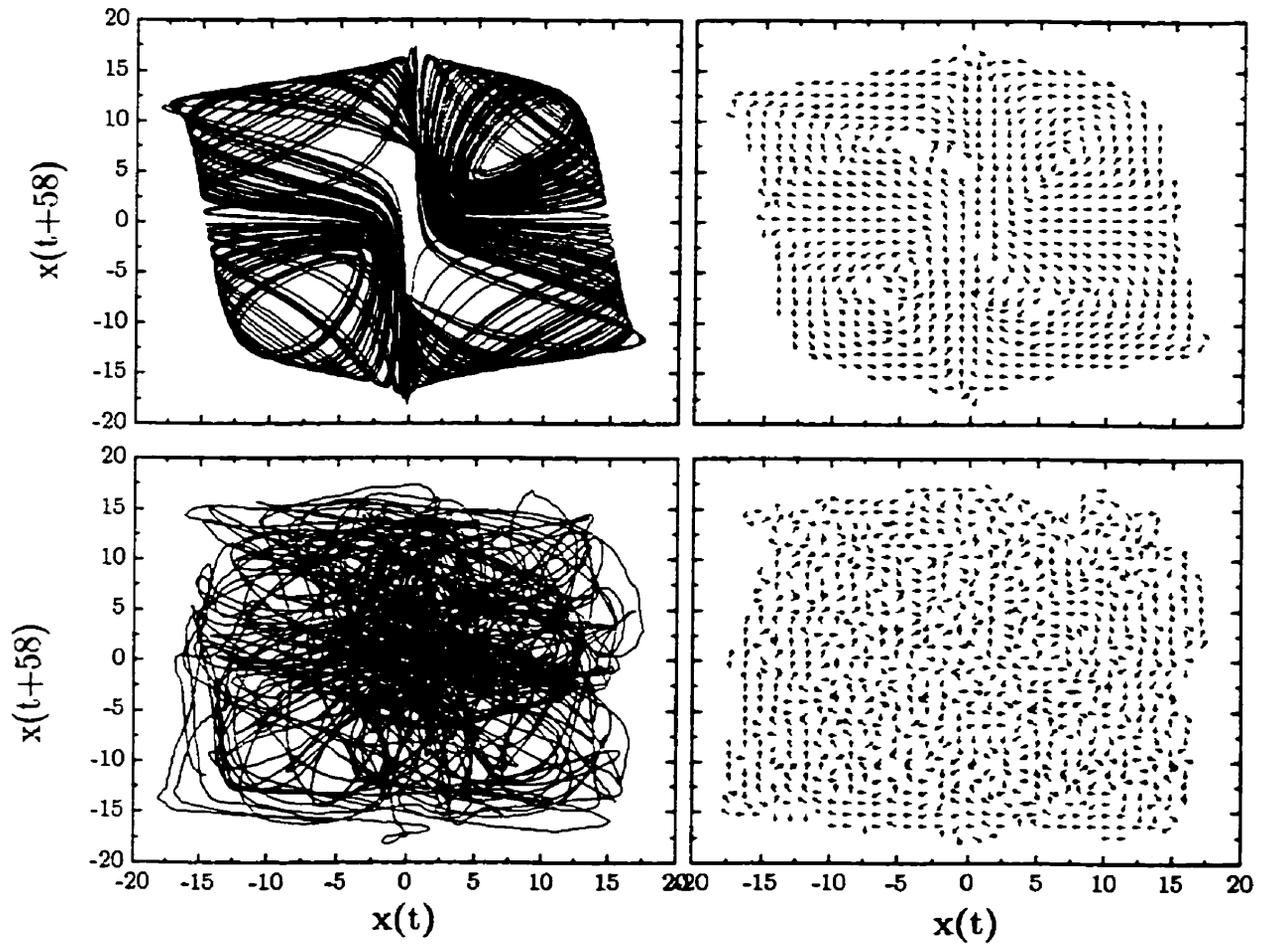


FIG. 4.9 – Caricature de la dynamique pour la variable  $x$  de Lorenz. Le panneau du bas provient de données synthétiques.

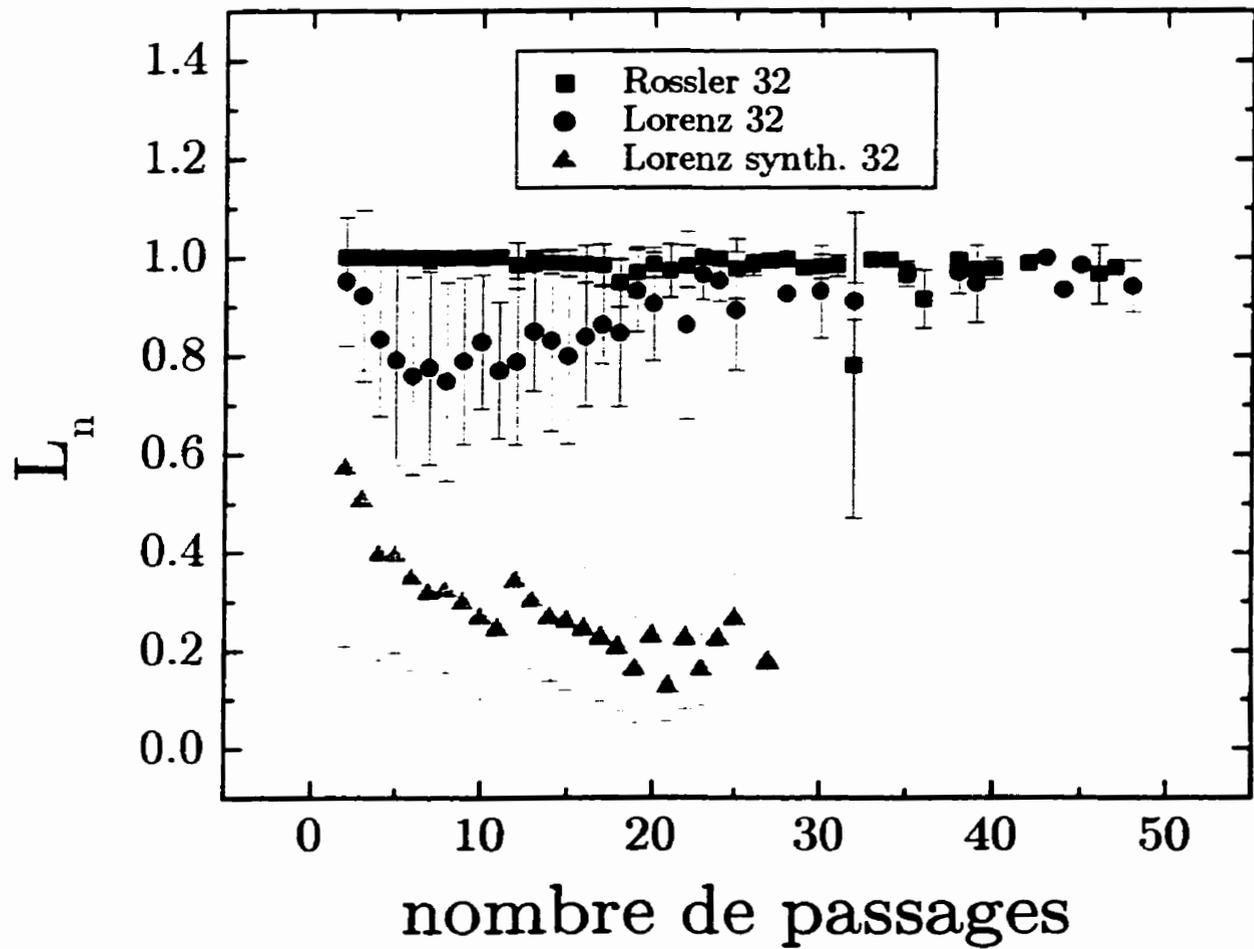


FIG. 4.10 - Les données synthétiques (processus stochastique linéaire) se distinguent bien des cas déterministes (grille de  $32 \times 32$  dans les trois cas).

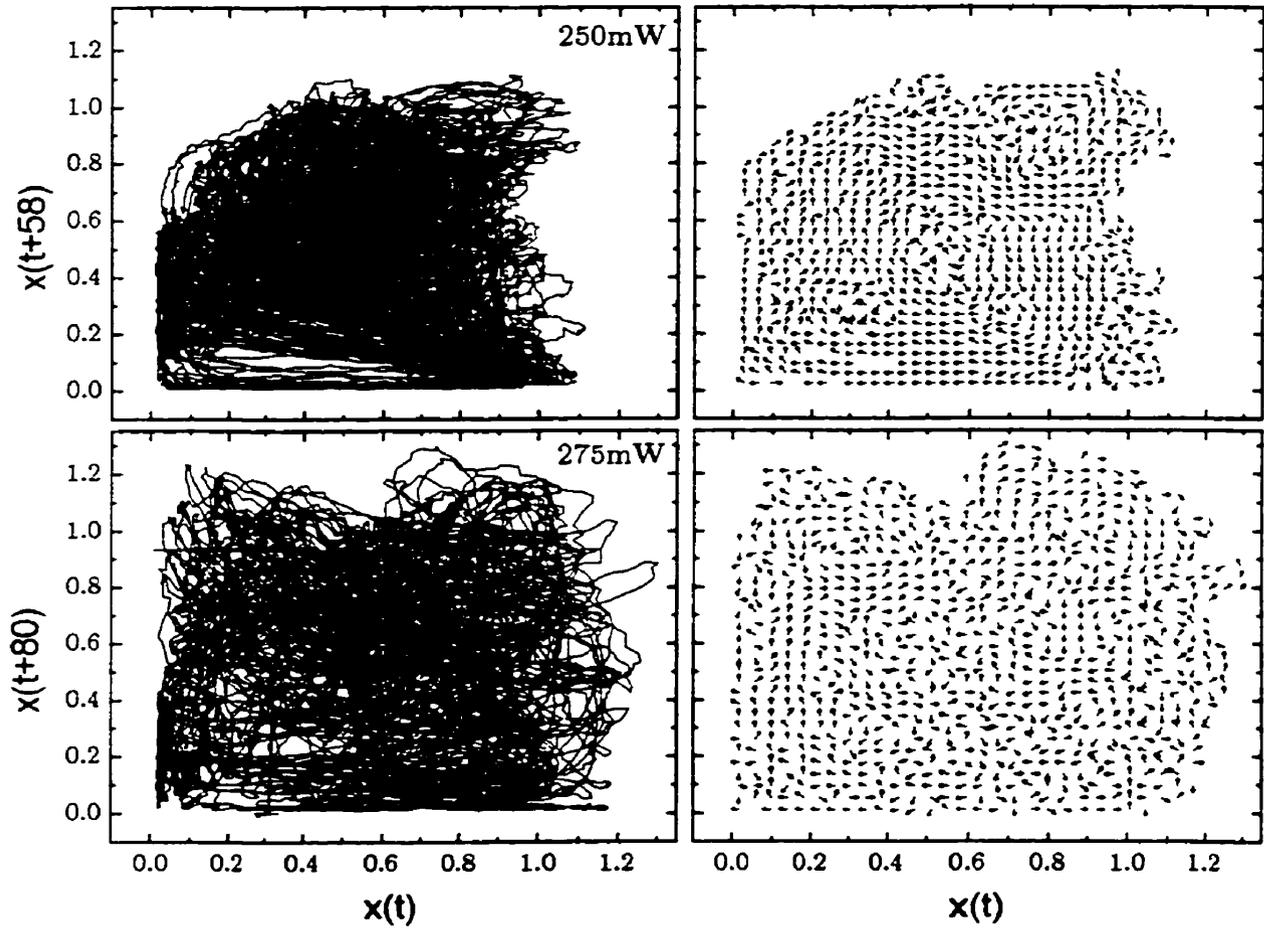


FIG. 4.11 – Caricature des séquences à 250 et 275 mW. Une certaine structure est visible... Le délai donné est en terme du nombre de données; le temps absolu est  $\tau$ /échantillonnage qui est de 5 Hz ici.

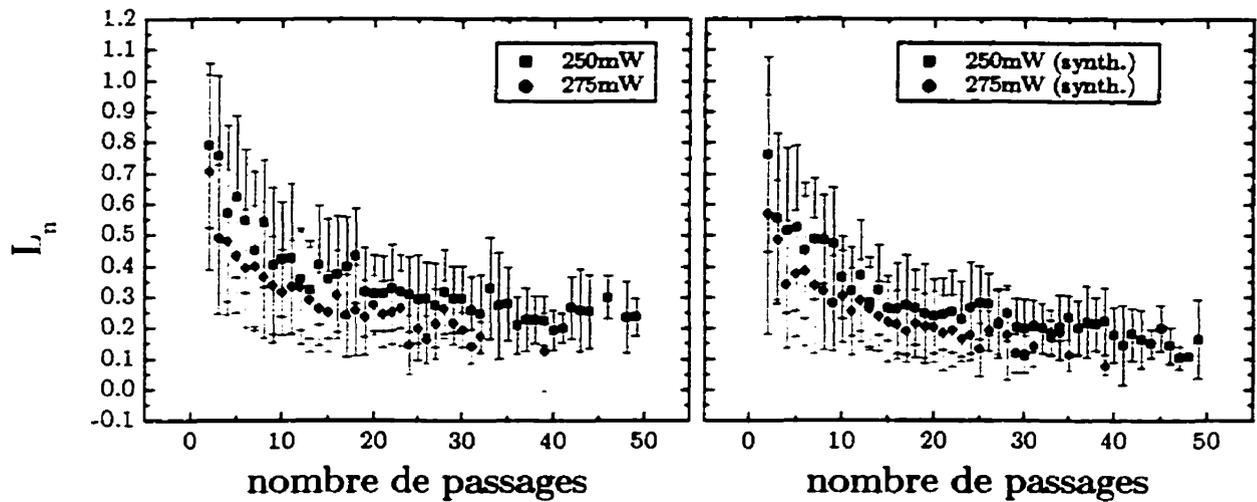


FIG. 4.12 – Impossible de distinguer les données synthétiques des données observées.

## 4.4 Discussion

Il semble évident que les séquences expérimentales ne sont pas issues d'un processus purement déterministe. D'ailleurs, cela aurait été très surprenant : les systèmes du monde réel interagissent avec leur environnement, ce qui est source de bruit et de non-stationnarité. Aussi, cette dernière peut induire en erreur lors de tests d'hypothèse comme ceux utilisés ici. Elle peut amener à ne pas rejeter l'hypothèse nulle même si le système à l'étude n'est pas de même nature que celle-ci.

En résumé, le test de prédiction semble dire qu'une composante déterministe non-linéaire est présente dans les séquences expérimentales. La caricature de la dynamique, pour sa part, n'est pas assez performante pour distinguer quoique ce soit. Il serait possible de raffiner la méthode (extension en plusieurs dimensions, grille plus fine) mais le bruit

expérimental limite ces efforts. La prudence nous dicte de ne pas conclure à la présence de déterminisme sur la base de ces résultats.

Il est donc difficile, dans ce contexte, d'espérer un contrôle positif de ce système. La dynamique de basse dimension que nous recherchions ne semble pas être présente. Le système a plutôt l'air complexe et très sensible à l'environnement extérieur. Néanmoins, il reste une étude dynamique intéressante à faire : l'analyse de la transition entre le comportement régulier (225 mW) à celui plus erratique (250 et 275 mW).

# Conclusion

La détection et le contrôle du chaos ont été explorés au cours de ce travail. L'attracteur de Rössler a d'abord permis de tester différentes stratégies de contrôle. Cette exploration a fait bien plus que vérifier le fonctionnement des techniques ; ce qui se dégage de l'exercice, c'est la grande souplesse de la théorie du contrôle du chaos. En effet, celle-ci peut s'adapter à des situations à prime abord délicates. C'est le cas notamment des espaces reconstruits où toute l'information est tirée d'une mesure scalaire. La stabilisation obtenue avec les maxima de la variable  $z$  de Rössler constitue aussi un exemple démontrant la puissance des méthodes de contrôle.

En second lieu, deux nouvelles techniques de contrôle ont été abordées : les réseaux de neurones et l'apprentissage renforcé. La motivation derrière le développement de ces méthodes est très certainement un besoin d'autonomie. Un contrôleur parfait devrait pouvoir s'adapter à tout système, caractériser la dynamique, détecter les UPOs, choisir une stratégie de contrôle, réduire le bruit....etc. Ces deux techniques sont simplement un pas dans cette direction. Malheureusement, il semble que nous soyons encore loin du contrôleur *boîte noire*.

L'étude des billards permet de constater que le chaos peut être présent dans des systèmes dynamiques peu complexes. Encore une fois, ce genre de système peut être stabilisé avec les techniques traditionnelles de contrôle. Ceci ouvre la porte à des applications expérimentales intéressantes ; ainsi, on peut imaginer être en mesure de dicter une trajectoire à un objet quantique tel un électron dans un puits de potentiel. En fait, le rapprochement entre la théorie du chaos et la mécanique quantique semble très prometteur.

L'analyse de séquences expérimentales n'a pas mené aux résultats attendus. Il aurait été fascinant de découvrir un système dynamique de basse dimension derrière les données obtenues. Quoiqu'il en soit, l'exercice a permis de cerner les pièges qui se tendent quand vient le temps d'appliquer la *théorie du chaos* au monde réel.

# Bibliographie

- [1] D. AUERBACH, C. GREBOGI, E. OTT, AND J. A. YORKE, *Controlling chaos in high dimensional systems*, Phys.Rev.Lett., 69 (1992), pp. 3479–3482.
- [2] M. V. BERRY, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billard'*, Eur. J. Phys., 2 (1981), pp. 90–102.
- [3] G. D. BIRKHOFF, *On the periodic motions of dynamical systems*, Acta Math., 50 (1927), pp. 359–379.
- [4] G. CIPPARRONE, V. CARBONE, C. VERSACE, C. UMETON, AND R. BARTOLINO, *Optically induced chaotic behavior in nematic liquid-crystal films*, Phys.Rev. E, 47 (1993), pp. 3741–3744.
- [5] P. COLLAS, D. KLEIN, AND H.-P. SCHWEBLER, *Convergence of Hamiltonian systems to billiards*, Chaos, 8 (1998), pp. 466–474.
- [6] W. L. DITTO, S. N. RAUSEO, AND M. L. SPANO, *Experimental control of chaos*, Phys.Rev.Lett., 65 (1990), pp. 3211–3214.
- [7] U. DRESSLER AND G. NITSCHKE, *Controlling chaos using time delay coordinates*, Phys.Rev.Lett., 68 (1992), pp. 1–4.
- [8] L. J. DUBÉ AND P. DESPRÉS, *The Control of Dynamical Systems—Recovering Order from Chaos*, in The Physics of Electronic and Atomic Collisions, XXI International Conference, vol. 500, AIP CONFERENCE PROCEEDINGS, 2000.
- [9] A. FRASER AND H. SWINNEY, *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Phys. Rev. A, 33 (1986), p. 1134.
- [10] S. GADALETA AND G. DANGELMAYR, *Optimal chaos control through reinforcement learning*, Chaos, 9 (1999), pp. 775–788.
- [11] T. V. GALSTYAN AND V. DRNOYAN, *Light-Driven Molecular Motor*, Phys.Rev.Lett., 78 (1997), pp. 2760–2763.

- [12] A. GARFINKEL, M. SPANO, W. DITTO, AND J. WEISS, *Controlling cardiac chaos*, Science, 257 (1992), pp. 1230–1235.
- [13] Z. GILLS, C. IWATA, R. ROY, I. SCHWARTZ, AND I. TRIANAF, *Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : The diode resonator*, Phys.Rev.Lett., 69 (1992), pp. 3169–3172.
- [14] L. GLASS AND M. C. MACKEY, *Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems*, Ann. N.Y. Acad. Sci., 316 (1979), p. 214.
- [15] C. GMACHL, F. CAPASSO, E. E. NARIMANOV, J. U. NÖCKEL, A. D. STONE, J. FAIST, D. L. SIVCO, AND A. Y. CHO, *High-Power Directional Emission from Microlasers with Chaotic Resonators*, Science, 280 (1998), pp. 1556–1564.
- [16] P. GRASSBERGER, T. SCHREIBER, AND C. SCHAFFRATH, *Non-linear time sequence analysis*, Int. J. Bifurcation and Chaos, 1 (1991), p. 521.
- [17] C. GREBOGI, E. OTT, AND J. A. YORKE, *Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors*, Phys.Rev. A, 37 (1988), pp. 1711–1724.
- [18] M. T. HAGAN, H. B. DEMUTH, AND M. BEALE, *Neural Network Design*, PWS Publishing, 1995.
- [19] R. HEGGER, H. KANTZ, AND T. SCHREIBER, *Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package*, Chaos, 9 (1999), pp. 413–435.
- [20] E. J. HELLER, M. F. CROMMIE, C. P. LUTZ, AND D. M. EIGLER, *Mesoscopic Systems and Quantum Corrals*, in The Physics of Electronic and Atomic Collisions, XIX International Conference, vol. 360, AIP CONFERENCE PROCEEDINGS, 1995.
- [21] M. HÉNON, *On numerical computation of Poincaré maps*, Physica D, 5 (1982), pp. 412–414.
- [22] E. R. HUNT, *Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : The diode resonator*, Phys.Rev.Lett., 67 (1991), pp. 1953–1955.
- [23] J. JEONG, D.-J. KIM, J.-H. CHAE, S. Y. KIM, H.-J. KO, AND I.-H. PAIK, *Nonlinear analysis of the EEG of schizophrenics with optimal embedding dimension*, Medical Engineering & Physics, 20 (1998), pp. 669–676.
- [24] J. JEONG, S. Y. KIM, AND S.-H. HAN, *Non-linear dynamical analysis of the EEG in Alzheimer's disease with optimal embedding dimension*, Electroencephalography and clinical Neurophysiology, 106 (1998), pp. 220–228.
- [25] L. P. KAELBLING, M. L. LITTMAN, AND A. W. MOORE, *Reinforcement Learning : A Survey*, Journal of Artificial Intelligence Research, 4 (1996), pp. 237–285.

- [26] H. KANTZ AND T. SCHREIBER, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, 1997.
- [27] D. KAPLAN AND L. GLASS, *Direct test for determinism in a time series*, Phys.Rev.Lett., 68 (1992), pp. 427–430.
- [28] M. KENNEL, R. BROWN, AND H. ABARBANEL, *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*, Phys. rev. A. 45 (1992), pp. 3403–3411.
- [29] H. J. KORSH AND H.-J. JODL. *CHAOS—A Program Collection for the PC*, Springer-Verlag, 1994.
- [30] D. KUGIUMTZIS, *Test your surrogate data before you test for nonlinearity*, Phys.Rev. E, 60 (1999), pp. 2808–2816.
- [31] B. LI, M. ROBNIK, AND B. HU, *Relevance of chaos in numerical solutions of quantum billiards*, Phys.Rev. E, 57 (1998), pp. 4095–4105.
- [32] V. LOPAC, I. MRKONJIĆ, AND D. RADIĆ, *Classical and quantum chaos in the generalized parabolic lemon-shaped billiard*, Phys.Rev. E, 59 (1999), pp. 303–311.
- [33] E. N. LORENZ, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., 20 (1963), p. 130.
- [34] R. MAÑÉ, *On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps*, in Lecture Notes in Math., vol. 898, Springer-Verlag, 1981.
- [35] G. NITSCHKE AND U. DRESSLER, *Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates*, Physica D, 58 (1992), pp. 153–164.
- [36] E. OTT, C. GREBOGI, AND J. A. YORKE, *Controlling chaos*, Phys.Rev.Lett., 64 (1990), pp. 1196–1199.
- [37] E. OTT, T. SAUER, AND J. A. YORKE, *Coping with chaos*, Wiley series in nonlinear science, 1994.
- [38] N. PACKARD, J. CRUTCHFIELD, D. FARMER, AND R. SHAW, *Geometry from a time series*, Phys.Rev.Lett., 45 (1980), p. 712.
- [39] T. S. PARKER AND L. O. CHUA, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 1989.
- [40] B. PENG, V. PETROV, AND K. SHOWALTER, *Controlling chemical chaos*, J.Phys.Chem, 95 (1991), pp. 4957–4959.
- [41] ———, *Controlling low-dimensional chaos by proportionnal feedback*, Physica A. 188 (1992), pp. 210–216.
- [42] V. PETROV, V. GÁSPÁR, J. MASERE, AND K. SHOWALTER, *Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction*, Nature, 361 (1993), pp. 240–243.

- [43] V. PETROV, B. PENG, AND K. SHOWALTER, *A map-based algorithm for controlling low-dimensional chaos*, J.Chem.Phys, 96 (1992), pp. 7506–7513.
- [44] V. PETROV AND K. SHOWALTER, *Nonlinear control of dynamical systems from time series*, Phys.Rev.Lett., 76 (1996), pp. 3312–3315.
- [45] B. POURBOHLOUL, *Control and Tracking of Chaos in Hamiltonian Systems*, PhD thesis, Université Laval, 1999.
- [46] W. PRESS, B. FLANNERY, S. TEUKOLSKY, AND W. VETTERLING, *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing (second edition)*, Cambridge University Press, 1992.
- [47] C. REYL, L. FLEPP, R. BADDI, AND E. BRUN, *Control of NMR-laser chaos in high-dimensional embedding space*, Phys.Rev. E, 47 (1993), pp. 267–272.
- [48] M. A. RHODE, R. W. ROLLINS, AND H. D. DEWALD, *On a simple recursive control algorithm automated and applied to an electrochemical experiment*, Chaos, 7 (1997), pp. 653–663.
- [49] M. A. RHODE, J. THOMAS, R. W. ROLLINS, AND A. J. MARKWORTH, *Automated adaptive recursive control of unstable orbits in high-dimensional chaotic systems*, Phys.Rev. E, 54 (1996), pp. 4880–4887.
- [50] C. RHODES AND M. MORARI, *False-nearest-neighbors algorithm and noise-corrupted time series*, Phys.Rev. E, 55 (1997), pp. 6162–6170.
- [51] C. ROBERT, *Le contrôle du chaos*, Master's thesis, Université Laval, août 1995.
- [52] M. ROBNIK, *Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries*, J. Phys. A, 16 (1983), pp. 3971–3986.
- [53] R. W. ROLLINS, P. PARMANANDA, AND P. SHERARD, *Controlling chaos in highly dissipative systems : A simple recursive algorithm*, Phys.Rev. E, 47 (1993), pp. R780–783.
- [54] F. J. ROMEIRAS, C. GREBOGI, E. OTT, AND W. P. DAYAWANSA, *Controlling chaotic dynamical systems*, Physica D, 58 (1992), p. 165.
- [55] O. E. RÖSSLER, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A, 57 (1976), p. 397.
- [56] J. C. ROUX, A. ROSSI, S. BACHELART, AND C. VIDAL, *Representation of a strange attractor from an experimental study of chemical turbulence*, Phys. Lett. A, 77 (1980), p. 391.
- [57] L. W. SALVINO, R. CAWLEY, C. GREBOGI, AND J. A. YORKE, *Predictability in time series*, Physics Letters A, 209 (1995), pp. 327–332.

- [58] E. SANTAMATO, B. DAINO, M. ROMAGNOLI, M. SETTEMBRE, AND Y. R. SHEN, *Collective Rotation of Molecules Driven by the Angular Momentum of Light in a Nematic Film*, Phys.Rev.Lett., 57 (1986), pp. 2423–2426.
- [59] T. SAUER, J. A. YORKE, AND M. CASDAGLI, *Embedology*, J. Stat. Phys., 65 (1991), p. 579.
- [60] A. SCHENCK ZU SCHWEINSBERG, T. RITZ, U.DRESSLER, B. HÜBINGER, R. DOERNER, AND W. MARTIENSSEN, *Quasicontinuous control of a bronze ribbon experiment using time-delay coordinates*, Phys.Rev. E, 55 (1997), pp. 2145–2157.
- [61] T. SCHREIBER, *Interdisciplinary application of nonlinear time series methods*, Physics Report, 308 (1999), pp. 1–64.
- [62] T. SCHREIBER AND A. SCHMITZ, *Improved surrogate data for nonlinearity tests*, Phys.Rev.Lett., 77 (1996), pp. 635–639.
- [63] ———, *Discrimination power of measures for nonlinearity in a time series*, Phys.Rev. E, 55 (1997), pp. 5443–5447.
- [64] I. B. SCHWARTZ, T. W. CARR, AND I. TRIANDAF, *Tracking controlled chaos : Theoretical foundations and applications*, Chaos, 7 (1997), pp. 664–679.
- [65] I. B. SCHWARTZ AND I. TRIANDAF, *Tracking unstable orbits in experiments*, Phys.Rev. A, 46 (1992), pp. 7439–7444.
- [66] J. SINGER, Y.-Z. WANG, AND H. H. BAU, *Controlling a chaotic system*, Phys.Rev.Lett., 66 (1991), pp. 1123–1126.
- [67] P. SO AND E. OTT, *Controlling chaos using time delay coordinates via stabilization of periodic orbits*, Phys.Rev. E, 51 (1995), pp. 2955–2962.
- [68] P. SO, E. OTT, T. SAUER, B. J. GLUCKMAN, C. GREBOGI, AND S. J. SCHIFF, *Extracting unstable periodic orbits from chaotic time series data*, Phys.Rev. E, 55 (1997), pp. 5398–5417.
- [69] J. STEIN AND H.-J. STÖCKMANN, *Experimental Determination of Billiard Wave Functions*, Phys.Rev.Lett., 68 (1992), pp. 2867–2870.
- [70] H.-J. STÖCKMANN AND J. STEIN, *"Quantum" Chaos in Billiards Studied by Microwave Absorption*, Phys.Rev.Lett., 64 (1990), pp. 2215–2218.
- [71] S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Addison-Wesley, 1994.
- [72] R. SUTTON, *Advances in Neural Information Processing Systems : Proceedings of the 1995 Conference*, edited by D. Touretsky, M. Mozer, and M. Hasselmo, 1996.

- [73] F. TAKENS, *Detecting strange attractors in turbulence*, in Lecture Notes in Math., vol. 898, Springer-Verlag, 1981.
- [74] J. THEILER, S. EUBANK, A. LONGTIN, B. GALDRAKIAN, AND J. D. FARMER, *Testing for nonlinearity in time series : The method of surrogate data*, Physica D, 58 (1992), pp. 77–94.
- [75] Y.-Z. WANG, J. SINGER, AND H. H. BAU, *Controlling chaos in a thermal convection loop*, J. Fluid Mechanics, 237 (1992), pp. 479–498.
- [76] C. J. C. H. WATKINS, *Learning from Delayed Rewards*, PhD thesis, King's College, Cambridge University, 1989.
- [77] M. J. WOYSHVILLE, J. M. LACKAMP, J. A. EISENGART, AND J. A. M. GILLILAND, *On the Meaning and Measurement of Affective Instability : Clues from Chaos Theory*, Biol Psychiatry, 45 (1999), pp. 261–269.
- [78] P. K. YUEN, *Dynamics and control of flow in a thermal convection loop*, PhD thesis, University of Pennsylvania, 1997.
- [79] P. K. YUEN AND H. H. BAU, *Rendering a subcritical Hopf bifurcation supercritical*, J. Fluid Mechanics, 317 (1996), pp. 91–109.
- [80] —, *Controlling chaotic convection using neural nets—theory and experiments*, Neural Networks, 11 (1998), pp. 557–569.

# Annexe A

## Un mot sur l'intégrateur

L'intégrateur utilisé ici est du type Runge-Kutta. La valeur du prochain itéré est, au quatrième ordre,

$$y_{n+1}^* = y_n + c_1^* k_1 + c_2^* k_2 + c_3^* k_3 + c_4^* k_4 + c_5^* k_5 + c_6^* k_6 + \mathcal{O}(h^5) \quad (\text{A.1})$$

et, au cinquième ordre,

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4 + c_5 k_5 + c_6 k_6 + \mathcal{O}(h^6) \quad (\text{A.2})$$

avec les  $k_i$  de la forme générale

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \\ &\dots \\ k_6 &= hf(x_n + a_6 h, y_n + b_{61} k_1 + \dots + b_{65} k_5). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Les coefficients sont situés dans le tableau A.1. L'utilisation d'une évaluation au cinquième ordre permet de définir une erreur

$$\Delta \equiv y_{n+1} - y_{n+1}^* = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i \quad (\text{A.4})$$

qui renseigne sur la divergence de deux trajectoires. La routine utilisée pour intégrer calcule, à chaque itération, la valeur de ce  $\Delta$ . Si celui-ci est plus grand qu'une certaine

tolérance. l'intégration est reprise avec un pas plus petit. Cette procédure est reprise tant et aussi longtemps que le  $\Delta$  ne satisfait pas la tolérance. L'intégrateur est alors dit à pas adaptatif. Dans le cadre de ce travail, la tolérance a été fixée à  $10^{-12}$ .

Coefficients de Cash-Karp pour la méthode de Runge-Kutta								
i	$a_i$	$b_{ij}$					$c_i$	$c_i^*$
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
	j=	1	2	3	4	5		

TAB. A.1 – Ces coefficients sont tirés de [46] en page 717.

# Annexe B

## Séquences expérimentales

Cette section présente les séquences issues du système laser/cristaux liquides. Le tableau B.1 montre les temps transitoires amputés aux séries lors de leur analyse.

TAB. B.1 – Temps transitoires des séquences expérimentales

Séquence	Temps transitoire	Séquence	Temps transitoire
225 mW	100 s (500 pts)	375 mW	300 s (1500 pts)
250 mW	100 s (500 pts)	400 mW	200 s (1000 pts)
275 mW	100 s (500 pts)	425 mW	2000 s
300 mW	100 s (500 pts)	450 mW	600 s
325 mW	100 s (500 pts)	500 mW	4000 s
350 mW	300 s (1500 pts)		

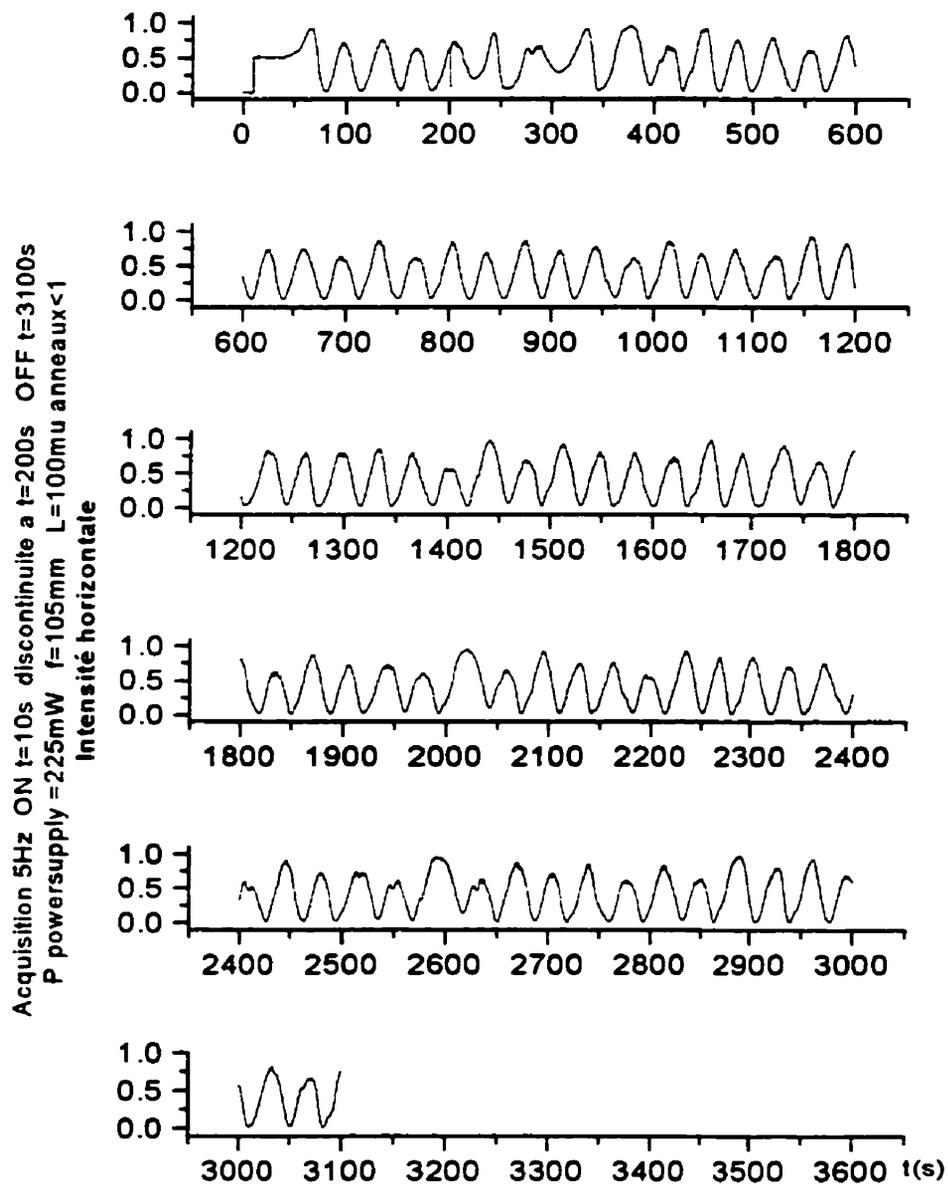


FIG. B.1 - 225 mW

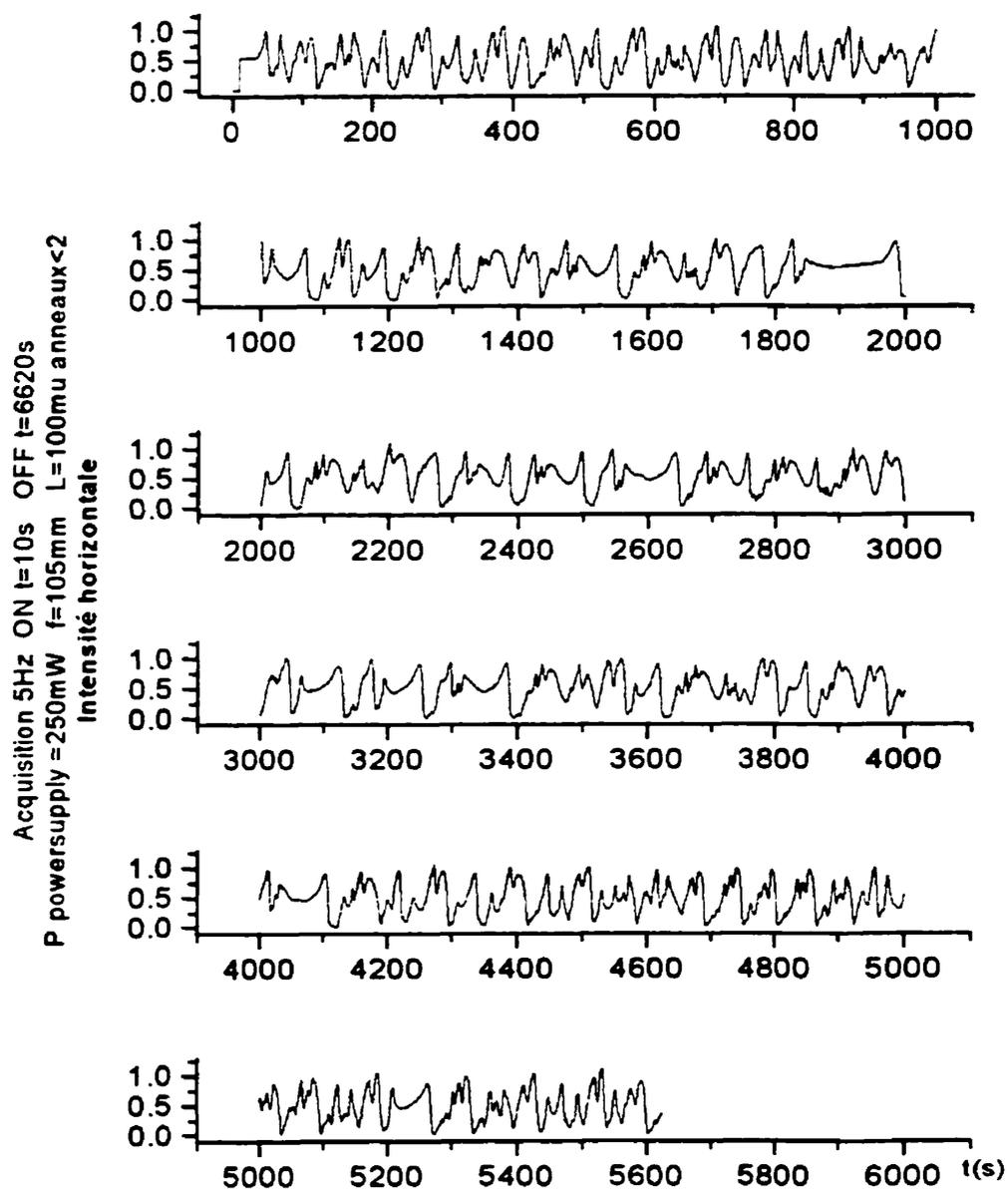


FIG. B.2 - 250 mW

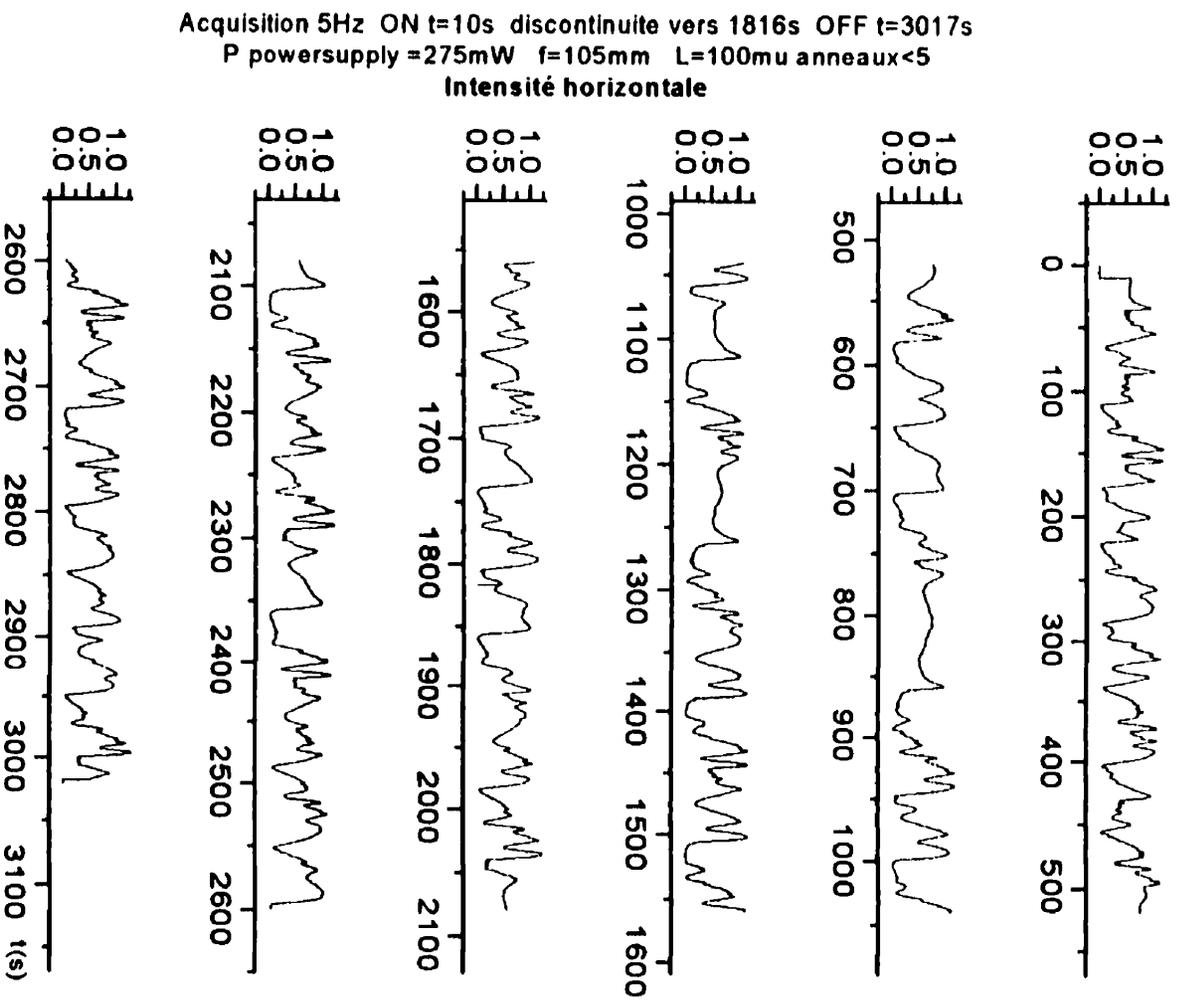


FIG. B.3 - 275 mW

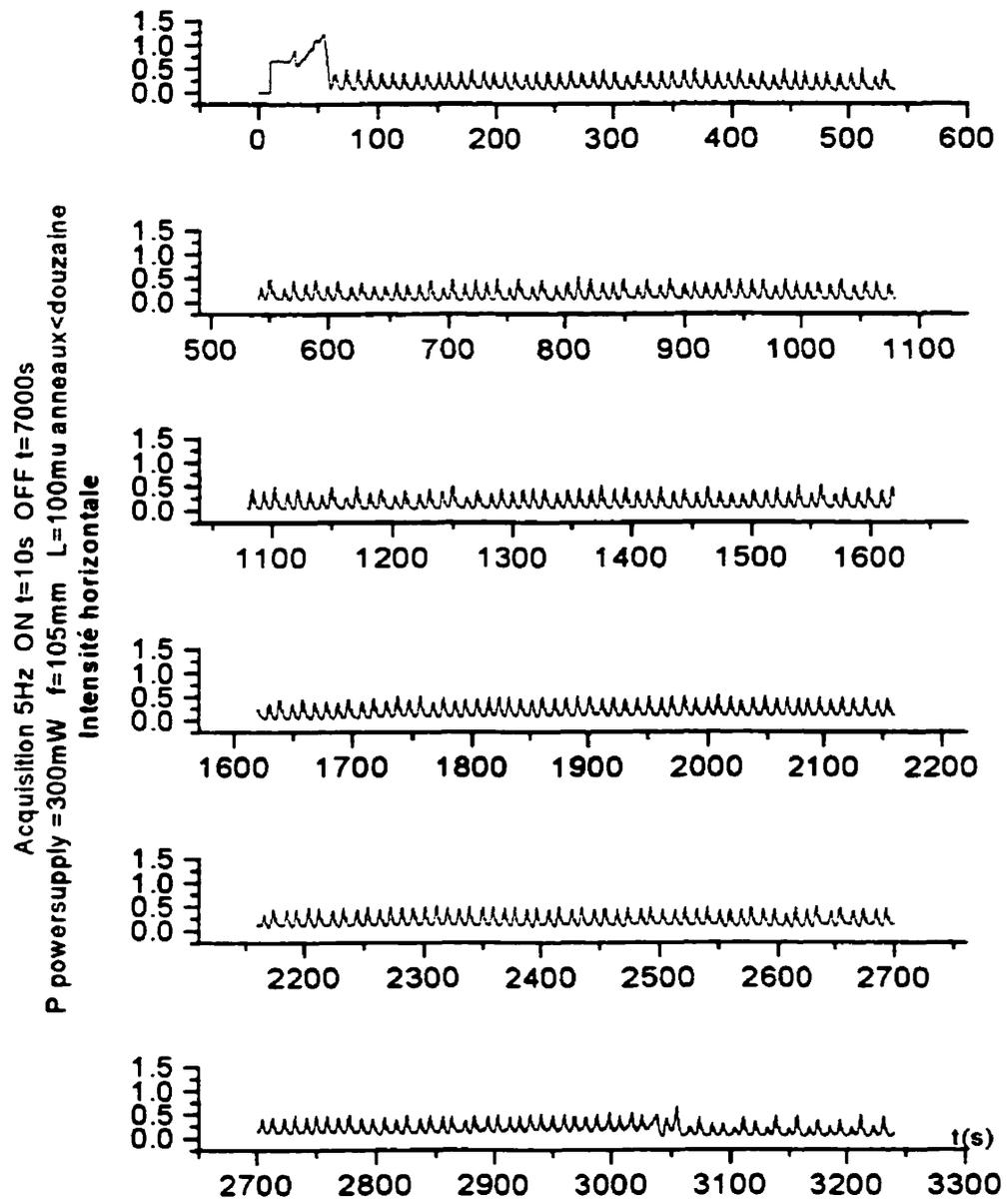


FIG. B.4 - 300 mW

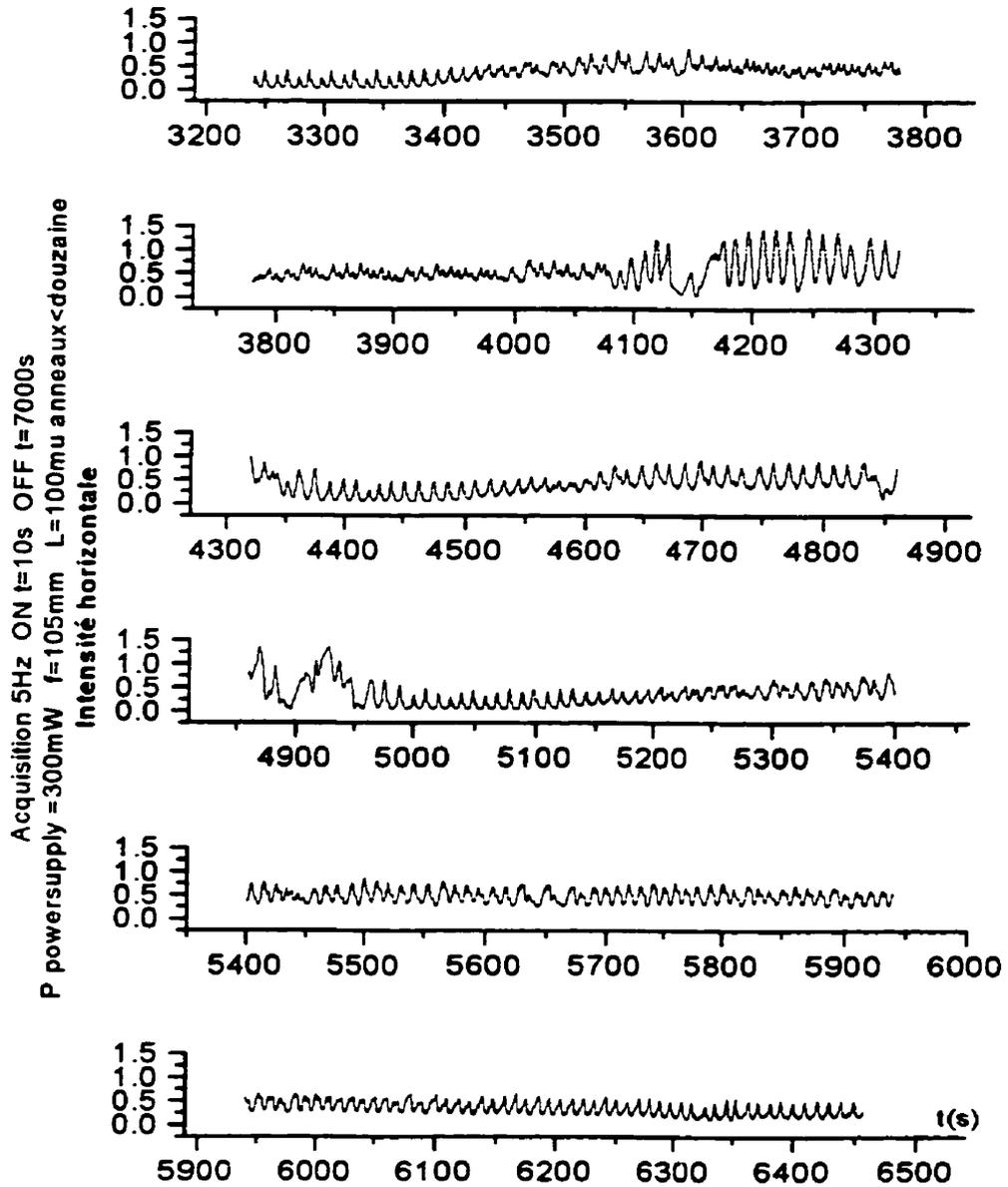


FIG. B.5 - 300 mW (suite)

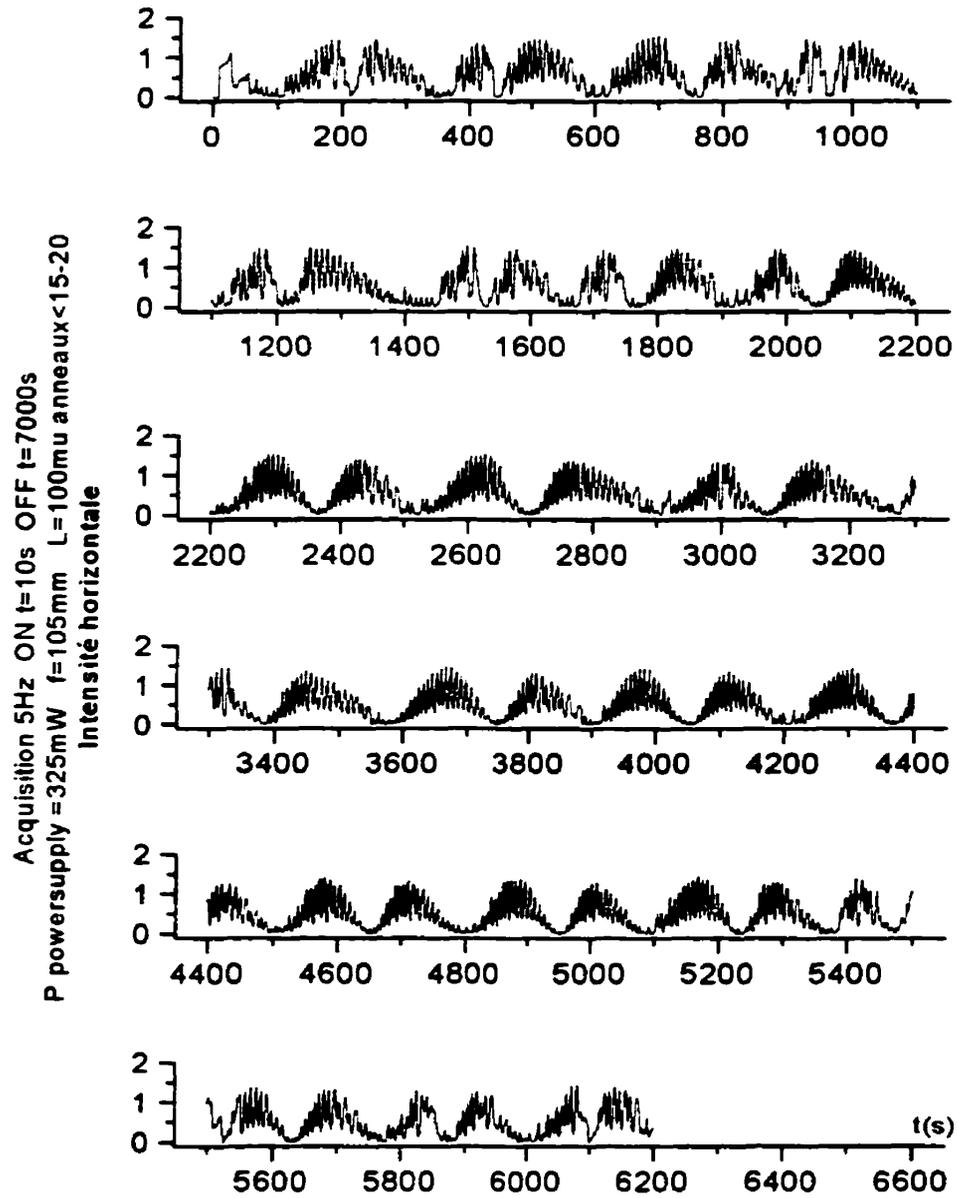


FIG. B.6 - 325 mW

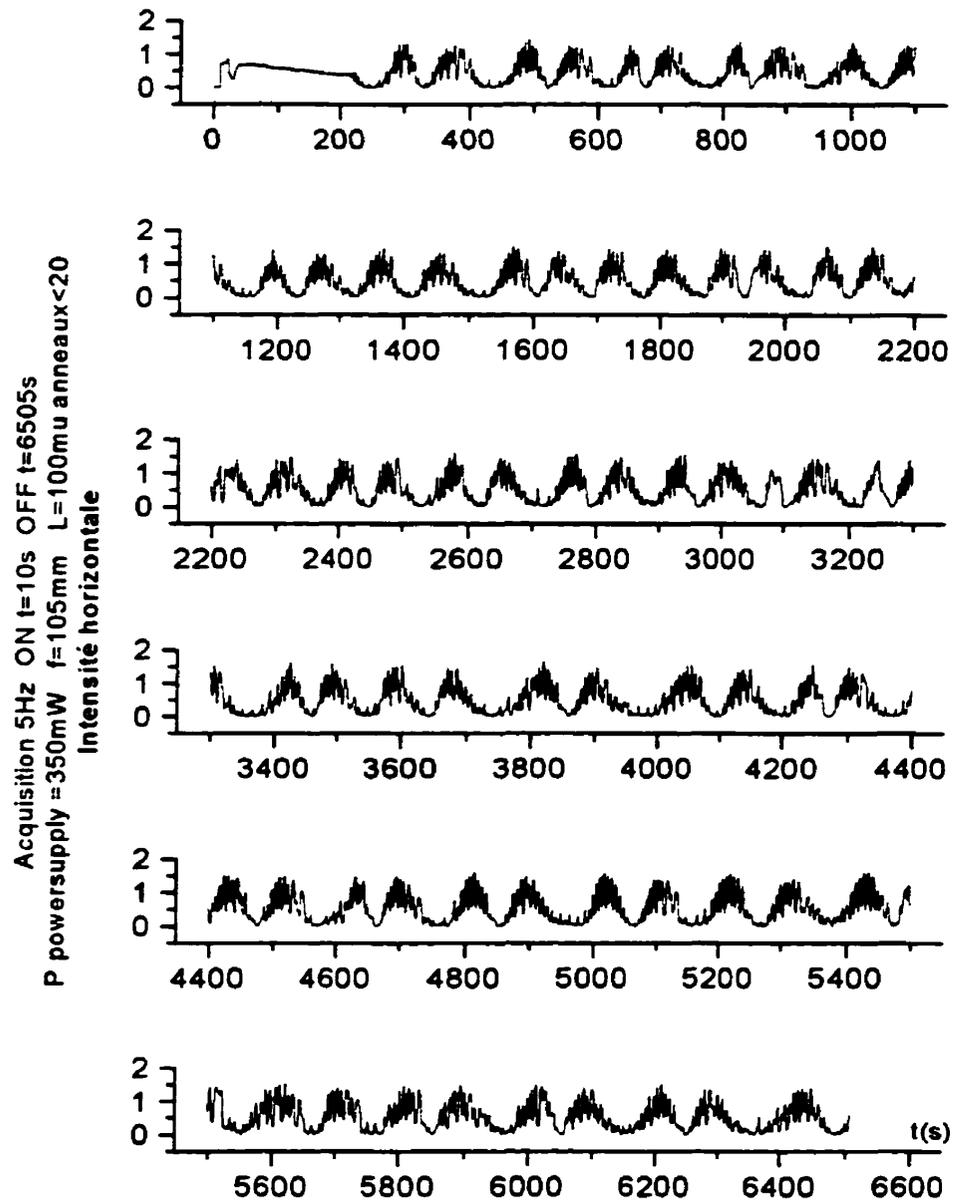


FIG. B.7 - 350 mW

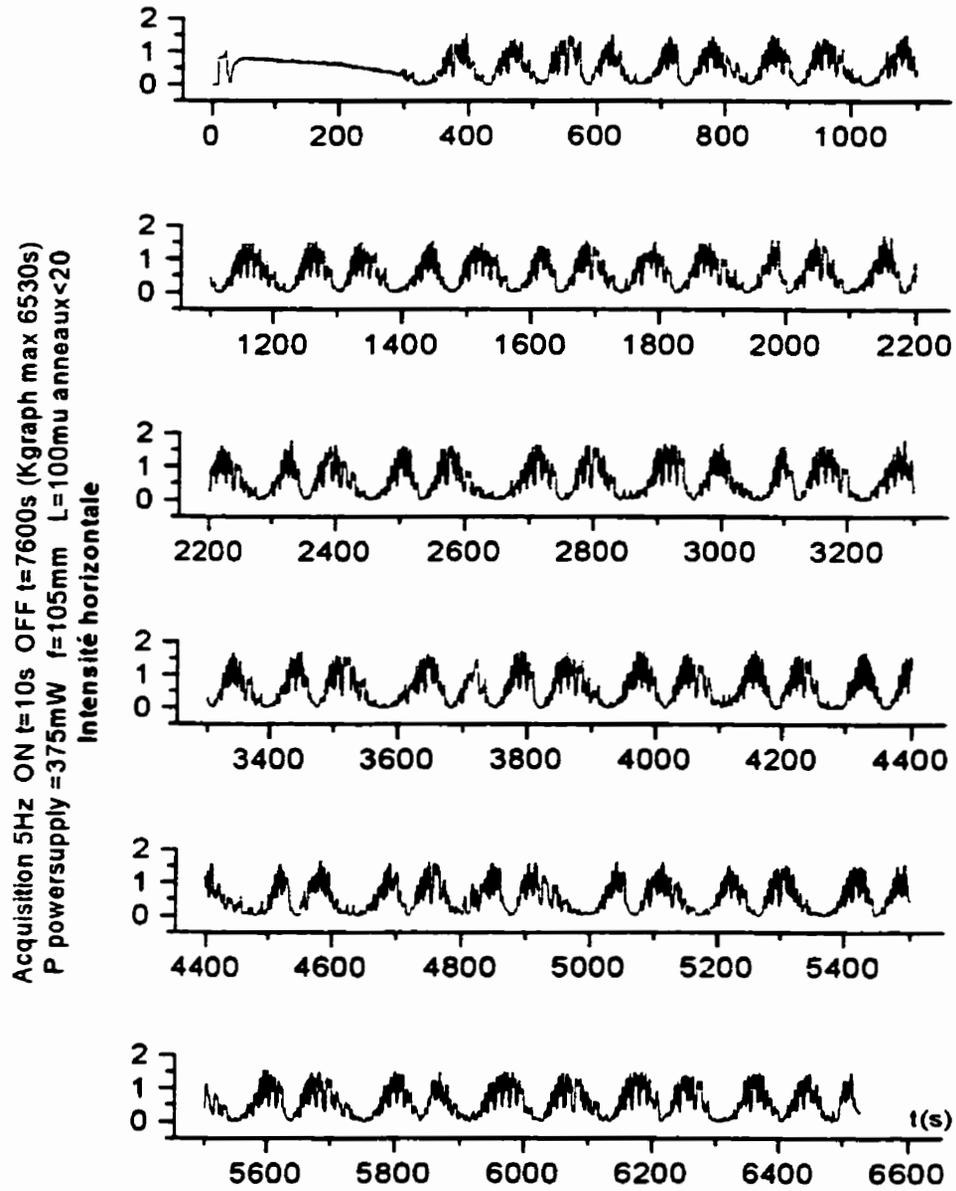


FIG. B.8 - 375 mW

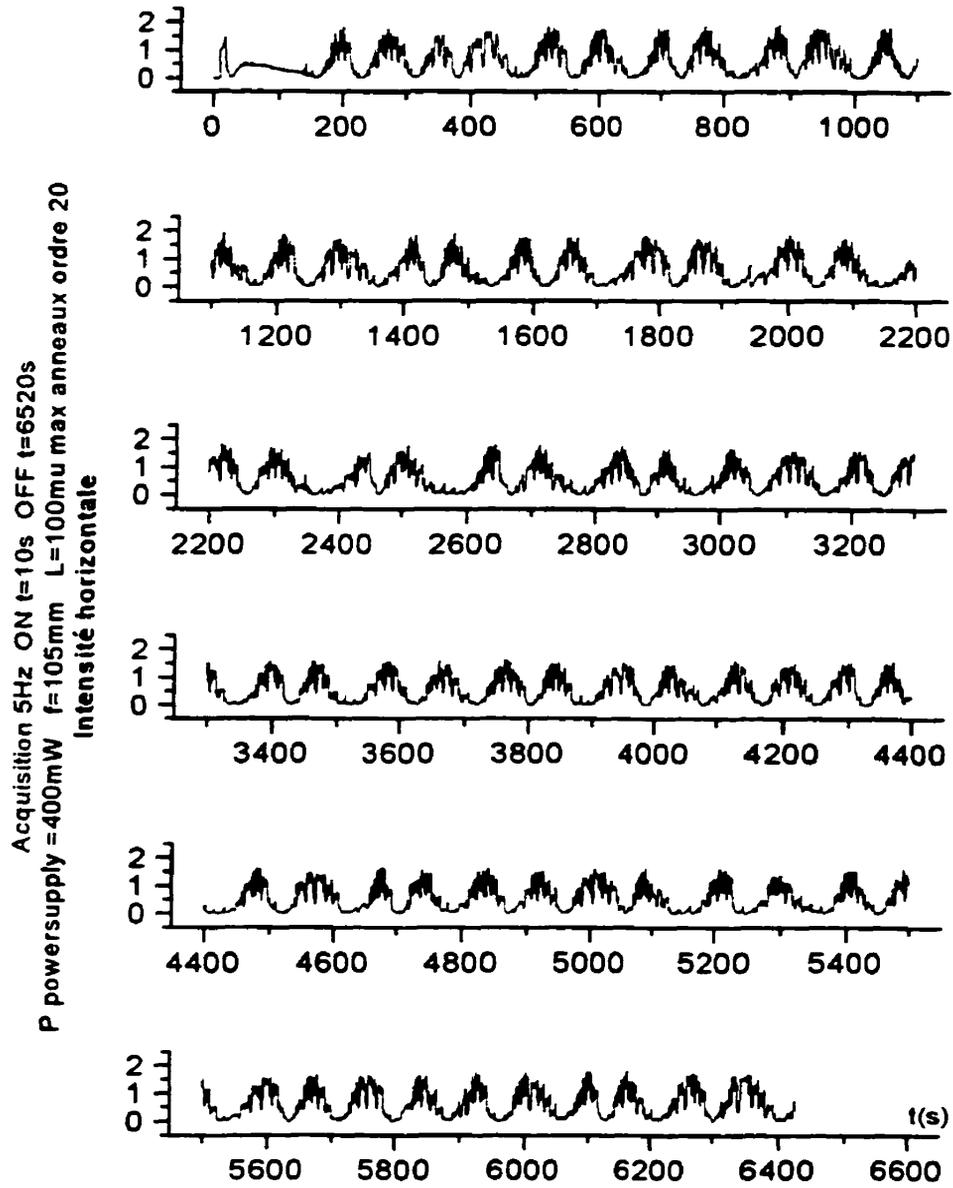


FIG. B.9 - 400 mW

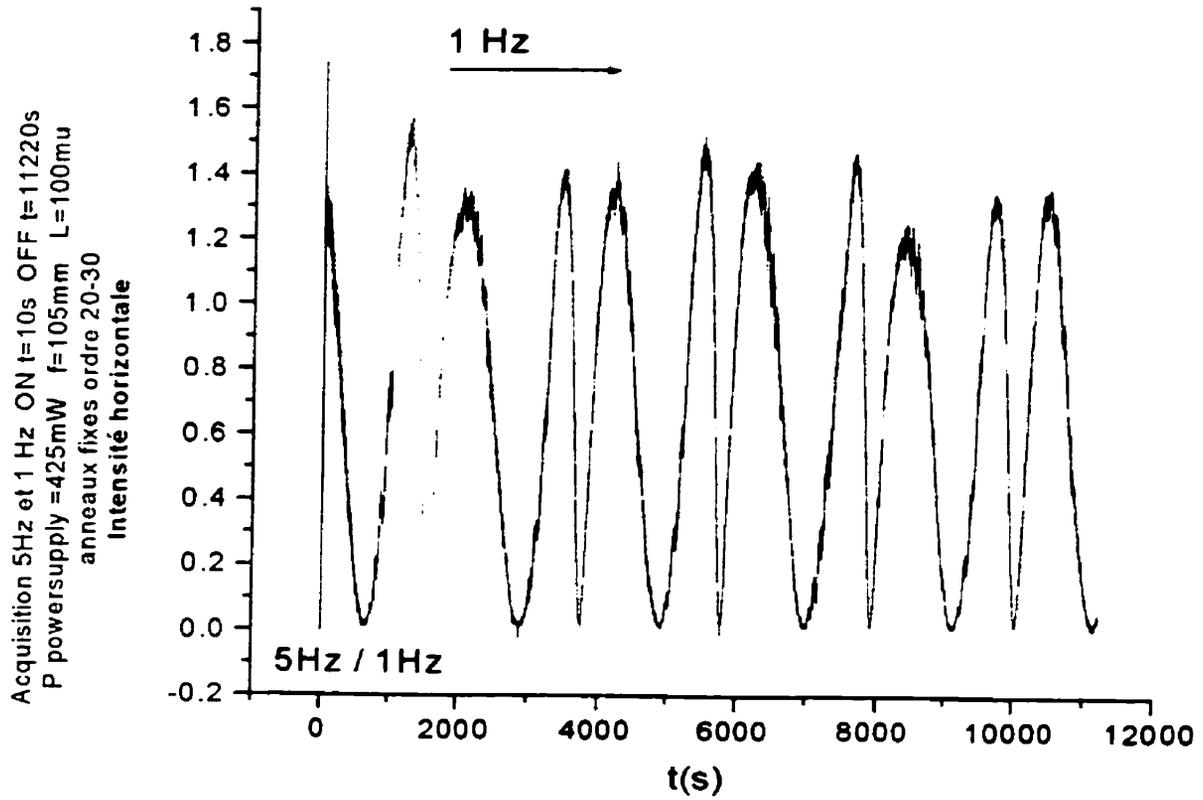


FIG. B.10 - 425 mW

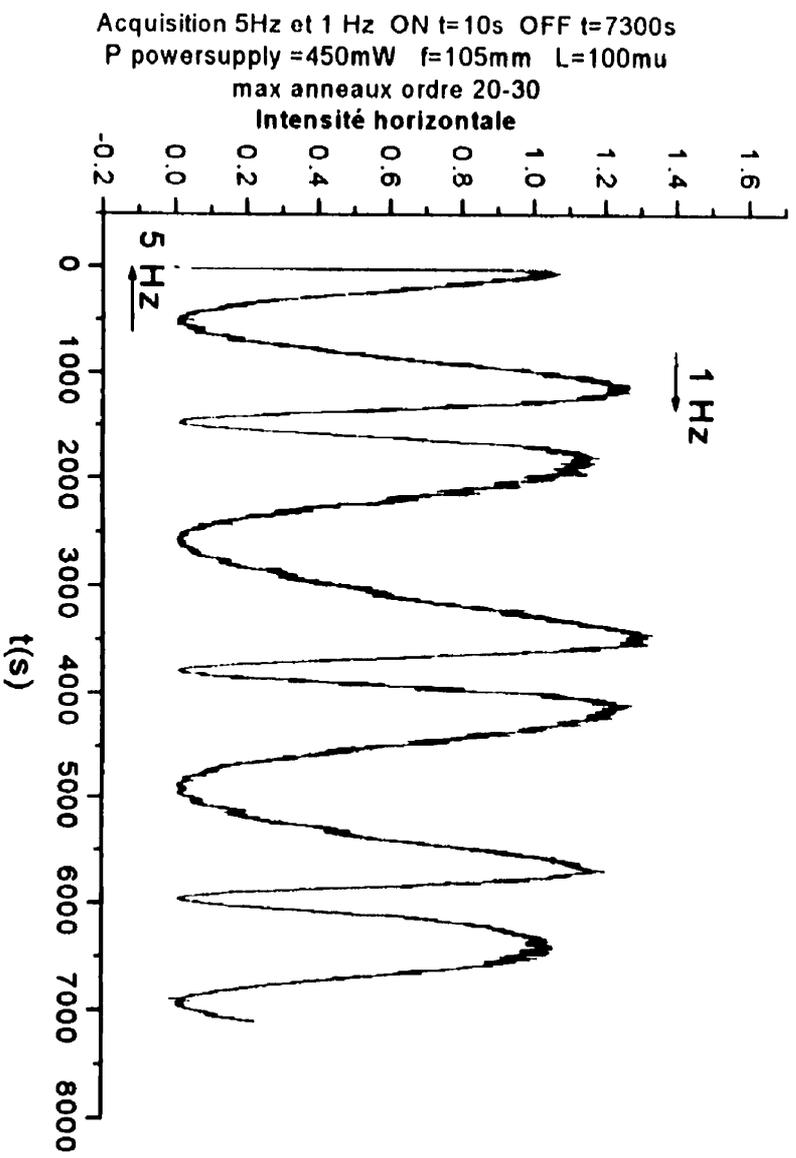


FIG. B.11 - 450 mW

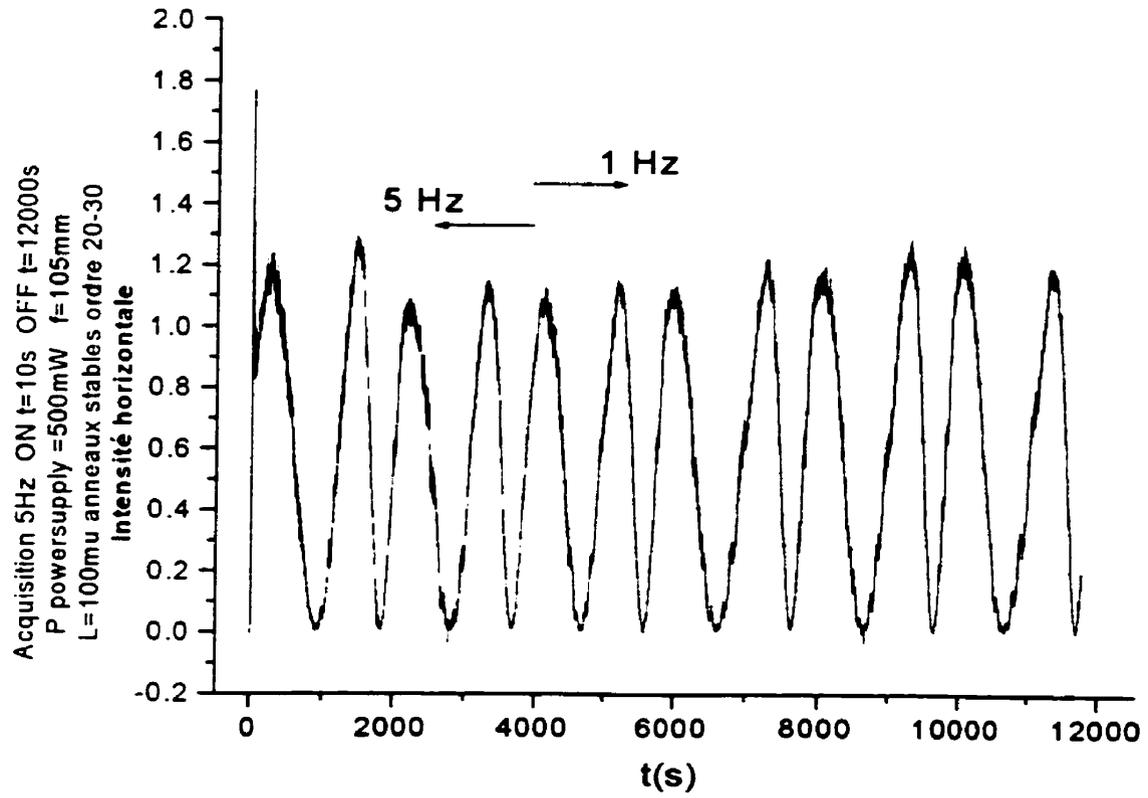


FIG. B.12 - 500 mW